Лекция 11.

Предел функции

Лектор: к.ф.-м.н., доцент кафедры ПМиИТ
Журавлева Ирина Викторовна.

Определение предела

⇛ *Окрестностью* точки x_0 называется любой интервал с центром в точке x_0.

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 кроме, быть может, самой точки x_0. Дадим первое определение предела функции (по Гейне):

⇛ Число A называется *пределом функции* $f(x)$ в точке x_0, если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x_0 ($x_n \neq x_0$ $\forall n$), последовательность $\{f(x_n)\}$ соответствующих значений функции сходится к A.

Обозначается это так: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ (при $x \to x_0$).

Первое определение предела функции эквивалентно второму определению (по Коши):

⇛ Число A называется *пределом функции* $f(x)$ в точке x_0, если для любого сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$ (вообще говоря, зависящее от ε), что для всех x таких, что $|x - x_0| < \delta$, $x \neq x_0$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Первое определение называется также определением предела функции «на языке последовательностей», а второе — определением предела «на языке ε–δ» (эпсилон–дельта).

Операции над пределами функций

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0 и, кроме того, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = B$. Тогда:

1. Предел суммы (разности) этих функций равен сумме (соответственно, разности) их пределов, т. е.

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B.$$

2. Предел произведения функций равен произведению их пределов, т. е.

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B.$$

3. Предел частного функций равен частному их пределов (при условии $B \neq 0$), т. е.

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

Отсюда, в частности, вытекает, что постоянный множитель можно выносить за знак предела функции, т. е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \implies \forall \alpha \in R: \lim_{x\to x_0} \alpha f(x) = \alpha \lim_{x\to x_0} f(x) = \alpha A.$$

Для функций справедливы аналоги соответствующих теорем для последовательностей о пределах корня и степени.

Пределы функций и неравенства

Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0 (кроме, быть может, самой этой точки) и $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ для всех значений x из этой окрестности. Пусть, кроме того,

$$\lim_{x\to x_0} f_1(x) = A_1, \quad \lim_{x\to x_0} f_2(x) = A_2.$$

Тогда $A_1 \leqslant A_2$.

Теорема 6.2 (о промежуточной переменной). Пусть функции $f_1(x)$, $f(x)$, $f_2(x)$ определены в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 (кроме, быть может, самой этой точки) и для всех $x \in U(x_0)$, $x \neq x_0$ верно неравенство $f_1(x) \leqslant f(x) \leqslant f_2(x)$. Пусть, кроме того, $\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x) = \lim\limits_{x\to x_0} f_2(x) = A$. Тогда $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ также существует и равен A.

Теорема 6.3 (о сохранении знака). Если предел функции в данной точке x_0 положителен, то и все значения функции в некоторой окрестности этой точки (кроме, быть может, самой точки x_0) положительны.

Теорема 6.4 (об ограниченности функции, имеющей предел). Пусть функция имеет предел в данной точке. Тогда она ограничена в некоторой окрестности этой точки.

Предел функции на бесконечности

Пусть функция $f(x)$ определена на бесконечном промежутке $(a; +\infty)$.

$\Rightarrow$ Число A называется *пределом функции* $f(x)$ *при* $x \to +\infty$, если для любой положительной бесконечно большой последовательности $\{x_n\}$ (т. е. $x_n \to +\infty$, $n \to \infty$) последовательность $\{f(x_n)\}$ соответствующих значений функции сходится к A.

Обозначение: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$.

Равносильное определение предела функции при $x \to +\infty$ на языке ε–δ будет выглядеть так:

$\Rightarrow$ Число A называется *пределом функции* $f(x)$ *при* $x \to +\infty$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $M > 0$, что для всех значений $x > M$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

Аналогично определяется предел функции $f(x)$ при $x \to -\infty$.

Обозначение: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A$.

Односторонние пределы

⇛ Пусть функция $f(x)$ определена в правой полуокрестности точки x_0, т. е. на некотором интервале $(x_0, x_0+\delta)$, где $\delta > 0$. Тогда говорят, что число A называется *пределом функции* $f(x)$ *справа* в точке x_0 (или *правосторонним пределом*), если для любой последовательности $\{x_n\}$, сходящейся к x_0 и такой, что все ее члены больше, чем x_0, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к числу A.

Обозначения: $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = A$ или $f(x_0+0) = A$.

Аналогично определяется *предел функции слева* (или *левосторонний предел*) в точке x_0, обозначаемый $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ или $f(x_0-0)$.

Очевидно, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ существует в том и только в том случае, когда существуют и односторонние пределы $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$, причем все три числа равны, т. е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0+0} f(x) = \lim_{x\to x_0-0} f(x).$$

Замечательные пределы

Первый замечательный предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

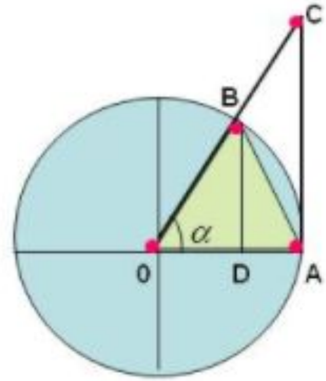
Часто используются следующие следствия из обоих замечательных пределов:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{x}=\alpha,\quad \alpha\in\mathbb{R};$$

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

- **7. Первый замечательный предел.**

$$\boxed{\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1}$$



- Доказательство.
- 1. $\alpha \to 0 \Rightarrow |\alpha| \prec \dfrac{\pi}{2}$
- 2. $y=\dfrac{\sin\alpha}{\alpha}$ *– четная функция*

  $(y(-\alpha)\equiv y(\alpha))$

  $\Rightarrow$ *рассмотрим* $\alpha \succ 0$

- 3. $\triangle OBA \subset \sphericalangle OBA \subset \triangle OCA$ $\Longrightarrow$ $\boxed{S_{\triangle OBA} \prec S_{\sphericalangle OBA} \prec S_{\triangle OCA}}$

$$\left.\begin{aligned} OA=1 \Rightarrow S_{OBA}&=\frac{1}{2}OA\bullet BD=\frac{1}{2}\sin\alpha\\ \Rightarrow S_{OBA}&=\frac{1}{2}OA\bullet(\cup AB)=\frac{1}{2}\alpha\\ \Rightarrow S_{OCA}&=\frac{1}{2}OA\bullet AC=\frac{1}{2}tg\alpha \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \boxed{\frac{1}{2}\sin\alpha \prec \frac{1}{2}\alpha \prec \frac{1}{2}tg\alpha}$$

- 4. $\sin\alpha \prec \alpha \prec tg\alpha \Rightarrow 1 \prec \dfrac{\alpha}{\sin\alpha} \prec \dfrac{1}{\cos\alpha} \Rightarrow 1 \succ \dfrac{\sin\alpha}{\alpha} \succ \cos\alpha$
- 5. $\alpha \to 0 \Rightarrow B \to A \Rightarrow D \to A \Rightarrow \underset{\cos\alpha \to 1}{\underset{\|\quad\backslash\backslash}{OD \to OA}}$
- 6. По первому признаку существования предела:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha}=1$$

Бесконечно малые и бесконечно большие функции

⇛ Функция $\varphi(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to x_0$ (или в окрестности точки x_0), если $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$.

Таким образом,

$$A = \lim_{x \to x_0} f(x) \iff f(x) = A + \alpha(x),$$

где $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$.

⇛ Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — бесконечно малые функции при $x \to x_0$ Тогда:

1) Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$, то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *бесконечно малыми одного порядка в окрестности точки* x_0.

В частности, если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются *эквивалентными бесконечно* малыми (в окрестности точки x_0), что обозначается так: $\alpha(x) \sim \beta(x)$, $x \to x_0$.

2) Если $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$, то функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка, чем $\beta(x)$. Этот факт записывается так: $\alpha(x) = o(\beta(x))$, $x \to x_0$ и говорят, что $\alpha(x)$ — *о малое* от $\beta(x)$ при $x \to x_0$. В частности, если $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to x_0$, то $\alpha(x) = o(1)$, $x \to x_0$.

При решении многих задач используются следующие эквивалентности, верные при $x \to 0$:

$$\sin x \sim x, \quad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \quad \operatorname{tg} x \sim x, \quad \arcsin x \sim x, \quad \operatorname{arctg} x \sim x,$$

$$\ln(1 + x) \sim x, \quad a^x - 1 \sim x \ln a \text{ (в частности, } e^x - 1 \sim x\text{)},$$

$$\sqrt[n]{1 + x} - 1 \sim \frac{x}{n}.$$

Кроме того, имеет место следующий факт: если $\beta(x) \sim \beta_1(x)$, $x \to x_0$ и существуют пределы $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) \cdot \beta(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, то

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) \cdot \beta(x) = \lim_{x \to x_0} \alpha(x) \cdot \beta_1(x),$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta_1(x)}.$$

Таким образом, предел произведения или частного двух бесконечно малых не меняется при замене любой из них на эквивалентную бесконечно малую.

Используя свойства пределов функций, найти следующие пределы:

1) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{3x^2-1}{4x^2+5x+2}$;

2) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}$;

3) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}$;

4) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{1+x-x^2}{2x^2+3x}$.

◐ 1) Применяя теорему о действиях над пределами функций, получим:

$$\lim_{x\to -1} \frac{3x^2-1}{4x^2+5x+2} = \frac{\lim\limits_{x\to -1}(3x^2-1)}{\lim\limits_{x\to -1}(4x^2+5x+2)} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to -1} 3x^2 - \lim\limits_{x\to -1} 1}{\lim\limits_{x\to -1} 4x^2 + \lim\limits_{x\to -1} 5x + \lim\limits_{x\to -1} 2} =$$

$$= \frac{3\lim\limits_{x\to -1} x \cdot \lim\limits_{x\to -1} x - 1}{4\lim\limits_{x\to -1} x \cdot \lim\limits_{x\to -1} x + 5\lim\limits_{x\to -1} x + 2} =$$

$$= \frac{3\cdot(-1)(-1)-1}{4(-1)(-1)+5(-1)+2} = 2.$$

2) Так как пределы числителя и знаменателя при $x \to 2$ равны нулю, то мы имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. «Раскроем» эту неопределенность (т.е. избавимся от нее), разложив числитель и знаменатель на множители и сократив их далее на общий множитель $x - 2$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-3}.$$

В полученной дроби знаменатель уже не стремится к нулю при $x \to 2$, поэтому можно применять теорему о пределе частного:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-3} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}(x+2)}{\lim\limits_{x\to 2}(x-3)} = \frac{2+2}{2-3} = -4.$$

Окончательно $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6} = -4.$

3) Здесь мы также имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Домножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное к числителю (избавляемся от иррациональности в числителе):

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{x+8}+3)}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+8})^2-3^2}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x+8)-9}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+8}+3}=\frac{1}{\sqrt{1+8}+3}=\frac{1}{6}.$$

4) Числитель и знаменатель дроби — бесконечно большие функции, поэтому здесь имеет место неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$. Раскрывая эту неопределенность, поделим числитель и знаменатель дроби на старшую степень x, т. е. на x^2:

$$\frac{1+x-x^2}{2x^2+3x}=\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-1}{2+\frac{3}{x}}.$$

Осталось воспользоваться свойствами пределов, а также тем, что функции $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{x^2}$ — бесконечно малые при $x\to\infty$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1+x-x^2}{2x^2+3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-1}{2+\frac{3}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}-1\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{3}{x}\right)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}-\lim\limits_{x\to\infty}1}{\lim\limits_{x\to\infty}2+3\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}}=\frac{0+0-1}{2+0}=-\frac{1}{2}.$$ ●

Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin \alpha x}{x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$;

3) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\cos x}{2x-\pi}$;

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin x}{x}$.

◐ 1) Сделаем замену $y = \alpha x$; тогда $y \to 0$ при $x \to 0$ и $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin \alpha x}{x} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\sin y}{\left(\frac{y}{\alpha}\right)} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\alpha \sin y}{y} = \alpha \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\sin y}{y} = \alpha$. В последнем равенстве мы воспользовались первым замечательным пределом.

Таким образом, $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin \alpha x}{x} = \alpha$.

2) Поделим числитель и знаменатель дроби под знаком предела на x, после чего воспользуемся предыдущим пунктом:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(\frac{\sin 5x}{x}\right)}{\left(\frac{\sin 3x}{x}\right)} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 5x}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin 3x}{x}\right)} = \frac{5}{3}.$$

3) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x-\pi}$;

3) Сводя предел к первому замечательному, сделаем замену $y = x - \frac{\pi}{2}$. Тогда $y \to 0$ при $x \to \frac{\pi}{2}$, а $x = y + \frac{\pi}{2}$, откуда

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x-\pi} = \lim_{y\to 0} \frac{\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right)}{2\left(y+\frac{\pi}{2}\right)-\pi} =$$

$$= \lim_{y\to 0} \frac{-\sin y}{2y} = -\frac{1}{2}\lim_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = -\frac{1}{2}.$$

Во втором равенстве в этой цепочке мы использовали формулу приведения, а в последнем — первый замечательный предел.

4) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x}$

4) Сделаем замену $t = \arcsin x$, т. е. $x = \sin t$. Ясно, что $t \to 0$ при $x \to 0$, поэтому

$$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{t\to 0} \frac{t}{\sin t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{\left(\frac{\sin t}{t}\right)} = \frac{1}{\lim\limits_{t\to 0} \frac{\sin t}{t}} = 1.$$

●

Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x$, $k \in \mathbb{R}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1+5x}$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+3}{x-2}\right)^x$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{7x}$.

◐ 1) В данном случае мы имеем неопределенность вида 1^∞. Для ее раскрытия сделаем замену $y = \frac{x}{k}$. Тогда $y \to \infty$ при $x \to \infty$ и исходный предел сводится ко второму замечательному пределу:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{x}{k}\right)}\right)^{k\cdot\frac{x}{k}} = \lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{ky} =$$

$$= \left[\lim_{y\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^y\right]^k = e^k.$$

2) Поскольку $\sqrt[x]{1+5x} = (1+5x)^{\frac{1}{x}}$, то здесь мы также имеем дело с неопределенностью 1^{∞}, для раскрытия которой нам снова понадобится одна из форм второго замечательного предела. Сделаем замену $y = 5x$. Тогда $y \to 0$ при $x \to 0$ и

$$\lim_{x\to 0} \sqrt[x]{1+5x} = \lim_{x\to 0} (1+5x)^{\frac{1}{5x}\cdot 5} =$$

$$= \lim_{y\to 0} (1+y)^{\frac{1}{y}\cdot 5} = \left[\lim_{y\to 0} (1+y)^{\frac{1}{y}}\right]^5 = e^5.$$

3) Поделив числитель и знаменатель дроби на x, сведем данный предел к частному пределов из пункта 1):

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+3}{x-2}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{1+\frac{3}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+\frac{3}{x}\right)^x}{\left(1-\frac{2}{x}\right)^x} =$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{3}{x}\right)^x}{\lim\limits_{x\to\infty} \left(1-\frac{2}{x}\right)^x} = \frac{e^3}{e^{-2}} = e^5.$$

4) Сделав замену $y = 2x$ и применяя одно из следствий из второго замечательного предела, получим:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{7x} = \lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{\frac{7}{2}y} = \frac{2}{7} \lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} = \frac{2}{7}.$$

Заменяя бесконечно малые эквивалентными, найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{\sin 3x}$,

2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x(e^x - 1)}{1 - \cos x}$.

○ 1) В силу следствия из первого замечательного предела $\sin \alpha x \sim \alpha x$, $x \to 0$. Отсюда (при $x \to 0$) $\sin 4x \sim 4x$, а $\sin 3x \sim 3x$, поэтому

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{4x}{3x} = \frac{4}{3}.$$

2) При $x \to 0$ имеем $e^x - 1 \sim x$ и $1 - \cos \sim \dfrac{x^2}{2}$, откуда

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \cdot (e^x - 1)}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x \cdot x}{\left(\frac{x^2}{2}\right)} = 2.$$ ●

НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

Непрерывность функции в точке

$\Rrightarrow$ Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если она определена в некоторой окрестности этой точки и $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Если обозначить $x - x_0 = \Delta x$ (приращение аргумента), $f(x) - f(x_0) = \Delta y$ (приращение функции, соответствующее приращению аргумента Δx), то это определение можно записать в эквивалентной форме.

$\Rrightarrow$ Функция $f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если она определена в некоторой окрестности этой точки и

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0.$$

Таким образом, если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то бесконечно малому приращению аргумента в этой точке соответствует бесконечно малое приращение функции.

Односторонняя непрерывность

$\Rrightarrow$ Функция $f(x)$ называется *непрерывной слева в точке* x_0, если она определена на некотором полуинтервале $(a; x_0]$ и

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0).$$

$\Rrightarrow$ Функция $f(x)$ называется *непрерывной справа в точке* x_0, если она определена на некотором полуинтервале $[x_0; b)$ и

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда она непрерывна слева и справа в этой точке, т. е. когда

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Непрерывность функции на промежутке

⇛ Функция $f(x)$ называется *непрерывной* на данном промежутке (интервале, полуинтервале, отрезке), если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

При этом если функция определена в конце промежутка, то под непрерывностью в этой точке понимается непрерывность справа или слева. В частности, функция $f(x)$ называется *непрерывной на отрезке* $[a;b]$, если она:

1) непрерывна в каждой точке интервала $(a;b)$;
2) непрерывна справа в точке a;
3) непрерывна слева в точке b.

Точки разрыва функции

⇛ Пусть точка x_0 принадлежит области определения функции $f(x)$ или является граничной точкой этой области. Точка x_0 называется *точкой разрыва функции* $f(x)$, если $f(x)$ не является непрерывной в этой точке.

Точки разрыва подразделяются на точки разрыва 1-го рода и 2-го рода.

⇒ Если в точке x_0 существуют конечные односторонние пределы $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, но они не равны между собой, или же односторонние пределы равны между собой, а значение функции в этой точке не совпадает с односторонними пределами, то x_0 называется *точкой разрыва* 1-го рода.

Если в точке x_0 существует конечный предел $\lim\limits_{x\to x_0} f(x_0)$, а $f(x_0)$ не определено или $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, то эта точка называется *точкой устранимого разрыва.*

Точки разрыва 1-го рода функции $f(x)$, не являющиеся точками устранимого разрыва, называются *точками скачка* этой функции.

Если x_0 — точка скачка функции $f(x)$, то разность $\Delta f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) - \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ не равна нулю и называется *скачком функции* $f(x)$ в точке x_0.

⇒ Если в точке x_0 не существует хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$, то x_0 называется *точкой разрыва 2-го рода.*

Свойства функций, непрерывных в точке

Теорема 6.5. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в точке x_0. Тогда функции $f(x) \pm g(x)$; $f(x) \cdot g(x)$ и $f(x)/g(x)$ (если $g(x_0) \neq 0$) также непрерывны в точке x_0.

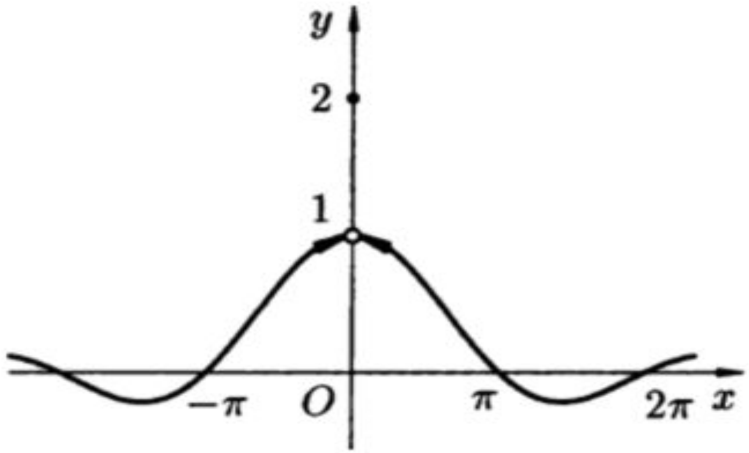
В частности, если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то функция $\alpha \cdot f(x)$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, также непрерывна в точке x_0.

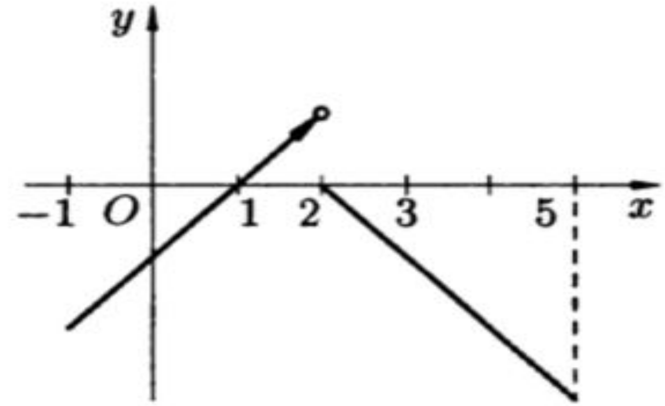
Теорема 6.6 (о непрерывности сложной функции). Пусть функция $u(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = u(x_0)$. Тогда сложная функция $f(u(x))$ непрерывна в точке x_0.

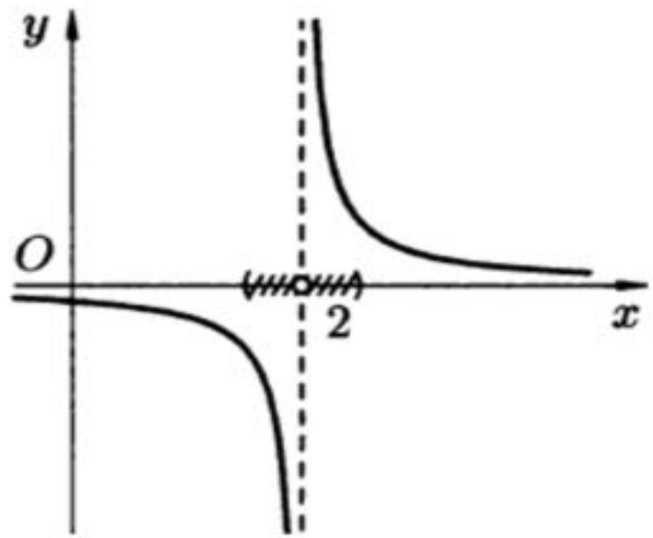
Непрерывность элементарных функций

Теорема 6.7. Все простейшие элементарные функции (c, x^α, a^x, $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$, $\arcsin x$, $\arccos x$) непрерывны в каждой точке своих областей определения.

Из этой теоремы, а также из двух предыдущих следует, что также непрерывны в каждой точке своих областей определения все функции, полученные из простейших с помощью конечного числа арифметических операций и операции композиции.


y
2
1
−π
O
π
2π
x


y
−1
O
1
2
3
5
x


y
O
2
x

Свойства функций, непрерывных на отрезке

Теорема 6.8 (Больцано–Коши). Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$ и принимает на его концах разные знаки. Тогда найдется хотя бы одна такая точка $x_0 \in (a;b)$, что $f(x_0) = 0$.

Теорема 6.9 (о промежуточных значениях). Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$. Тогда для любого числа C, заключенного между числами $f(a)$ и $f(b)$, найдется такая точка $x_0 \in [a;b]$, что $f(x_0) = C$.

Теорема 6.10 (1-я теорема Вейерштрасса). Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$. Тогда эта функция ограничена на этом отрезке.

Теорема 6.11 (2-я теорема Вейерштрасса). Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a;b]$. Тогда эта функция принимает на отрезке $[a;b]$ свои наибольшие и наименьшие значения, т. е. существуют такие точки $x_1, x_2 \in [a;b]$, что для любой точки $x \in [a;b]$ справедливы неравенства

$$f(x_1) \leqslant f(x) \leqslant f(x_2).$$

Исследовать на непрерывность и построить график функции

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \leqslant -\pi, \\ \sin x & \text{при } -\pi < x < \dfrac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{при } x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти скачок функции в точках скачка.

◐ Функции $y = x$, $y = \sin x$ и $y = 1$ непрерывны на всей числовой прямой, поэтому данная функция может иметь разрывы только в точках, где меняется ее аналитическое выражение, т. е. в точках $x_1 = -\pi$ и $x_2 = \frac{\pi}{2}$.

Исследуем функцию на непрерывность в этих точках, для чего найдем соответствующие односторонние пределы и значения функции.

В точке $x_1 = -\pi$ имеем:

$$\lim_{x\to-\pi-0} f(x) = \lim_{x\to-\pi} x = -\pi, \quad \lim_{x\to-\pi+0} f(x) = \lim_{x\to-\pi} \sin x = 0,$$
$$f(-\pi) = -\pi.$$

Таким образом, в этой точке

$$\lim_{x\to-\pi-0} f(x) = f(-\pi) \neq \lim_{x\to-\pi+0} f(x),$$

т. е. функция имеет разрыв 1-го рода и непрерывна слева. Скачок функции $f(x)$ в точке $x_1 = -\pi$ равен

$$\Delta f(-\pi) = \lim_{x\to-\pi+0} f(x) - \lim_{x\to-\pi-0} f(x) = \pi.$$

Аналогично, для точки $x_2 = \frac{\pi}{2}$ получим:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-0} \sin x = \sin\frac{\pi}{2} = 1,$$
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}+0} 1 = 1,$$

а значение $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ не определено. Отсюда следует, что $x_2 = \frac{\pi}{2}$ — точка устранимого разрыва для функции $f(x)$.

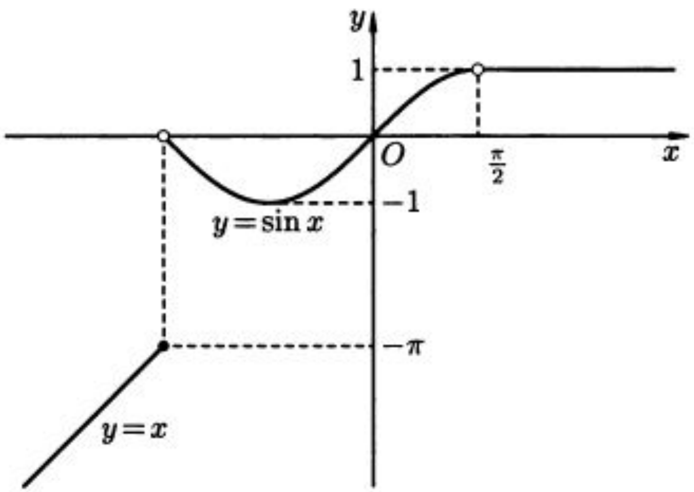


Рис. 78

Установить характер разрыва функции $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$ в точке $x_0 = 2$.

Находим:

$$\lim_{x \to 2-0} \frac{2x+1}{x-2} = -\infty, \quad \lim_{x \to 2+0} \frac{2x+1}{x-2} = -\infty,$$

то есть функция в точке $x_0 = 2$ не имеет ни одного из односторонних пределов. Отсюда следует, что $x_0 = 2$ — точка разрыва 2-го рода.

Исследовать функцию $y = \dfrac{1}{(x+2)(x-3)}$ на непрерывность на отрезке $[a; b]$, если

а) $[a; b] = [-1; 2]$;

б) $[a; b] = [-5; 0]$;

в) $[a; b] = [-3; 4]$.

❍ Данная функция элементарная, поэтому она непрерывна на области определения, т. е. при всех x, не равных -2 и 3. В точке $x_1 = -2$ функция терпит разрыв 2-го рода, так как

$$\lim_{x\to -2-0} \frac{1}{(x+2)(x-3)} = +\infty, \quad \lim_{x\to -2+0} \frac{1}{(x+2)(x-3)} = -\infty.$$

В точке $x_2 = 3$ также разрыв 2-го рода, потому что

$$\lim_{x\to 3-0} \frac{1}{(x+2)(x-3)} = -\infty, \quad \lim_{x\to 3+0} \frac{1}{(x+2)(x-3)} = +\infty.$$

Отсюда следует, что данная функция непрерывна на отрезке $[-1; 2]$ (так как $x_1, x_2 \notin [-1; 2]$); на отрезке $[-5; 0]$ функция непрерывна всюду, кроме точки -2, в которой терпит разрыв 2-го рода ($x_1 \in [-5; 0]$, $x_2 \notin [-5; 0]$); на отрезке $[-3; 4]$ функция имеет две точки разрыва 2-го рода $x_1 = -2$, $x_2 = 3$, а в остальных точках непрерывна ($x_1; x_2 \in [-3; 4]$). ●