

# Лекция 11.

## Предел функции

---

Лектор: к.ф.-м.н., доцент кафедры ПМиИТ  
Журавлева Ирина Викторовна.

## Определение предела

⇒ *Окрестностью* точки  $x_0$  называется любой интервал с центром в точке  $x_0$ .

Пусть функция  $f(x)$  определена в некоторой окрестности точки  $x_0$  кроме, быть может, самой точки  $x_0$ . Дадим первое определение предела функции (по Гейне):

⇒ Число  $A$  называется *пределом функции*  $f(x)$  в точке  $x_0$ , если для любой последовательности  $\{x_n\}$ , сходящейся к  $x_0$  ( $x_n \neq x_0 \forall n$ ), последовательность  $\{f(x_n)\}$  соответствующих значений функции сходится к  $A$ .

Обозначается это так:  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$  или  $f(x) \rightarrow A$  (при  $x \rightarrow x_0$ ).

Первое определение предела функции эквивалентно второму определению (по Коши):

⇒ Число  $A$  называется *пределом функции*  $f(x)$  в точке  $x_0$ , если для любого сколь угодно малого числа  $\varepsilon > 0$  найдется такое число  $\delta > 0$  (вообще говоря, зависящее от  $\varepsilon$ ), что для всех  $x$  таких, что  $|x - x_0| < \delta$ ,  $x \neq x_0$ , выполняется неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ .

Первое определение называется также определением предела функции «на языке последовательностей», а второе — определением предела «на языке  $\varepsilon$ - $\delta$ » (эпсилон-дельта).

## Операции над пределами функций

Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  определены в некоторой окрестности точки  $x_0$  и, кроме того,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$ . Тогда:

1. Предел суммы (разности) этих функций равен сумме (соответственно, разности) их пределов, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B.$$

2. Предел произведения функций равен произведению их пределов, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B.$$

3. Предел частного функций равен частному их пределов (при условии  $B \neq 0$ ), т. е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

Отсюда, в частности, вытекает, что постоянный множитель можно выносить за знак предела функции, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \implies \forall \alpha \in R : \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha f(x) = \alpha \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \alpha A.$$

Для функций справедливы аналоги соответствующих теорем для последовательностей о пределах корня и степени.

## Пределы функций и неравенства

Пусть функции  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  определены в некоторой окрестности точки  $x_0$  (кроме, быть может, самой этой точки) и  $f_1(x) \leq f_2(x)$  для всех значений  $x$  из этой окрестности. Пусть, кроме того,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = A_1, \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = A_2.$$

Тогда  $A_1 \leq A_2$ .

**Теорема 6.2 (о промежуточной переменной).** Пусть функции  $f_1(x)$ ,  $f(x)$ ,  $f_2(x)$  определены в некоторой окрестности  $U(x_0)$  точки  $x_0$  (кроме, быть может, самой этой точки) и для всех  $x \in U(x_0)$ ,  $x \neq x_0$  верно неравенство  $f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x)$ . Пусть, кроме того,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f_2(x) = A$ . Тогда  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  также существует и равен  $A$ .

**Теорема 6.3 (о сохранении знака).** Если предел функции в данной точке  $x_0$  положителен, то и все значения функции в некоторой окрестности этой точки (кроме, быть может, самой точки  $x_0$ ) положительны.

**Теорема 6.4 (об ограниченности функции, имеющей предел).** Пусть функция имеет предел в данной точке. Тогда она ограничена в некоторой окрестности этой точки.

## Предел функции на бесконечности

Пусть функция  $f(x)$  определена на бесконечном промежутке  $(a; +\infty)$ .

$\Rightarrow$  Число  $A$  называется *пределом функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$* , если для любой положительной бесконечно большой последовательности  $\{x_n\}$  (т. е.  $x_n \rightarrow +\infty, n \rightarrow \infty$ ) последовательность  $\{f(x_n)\}$  соответствующих значений функции сходится к  $A$ .

Обозначение:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ .

Равносильное определение предела функции при  $x \rightarrow +\infty$  на языке  $\epsilon$ - $\delta$  будет выглядеть так:

$\Rightarrow$  Число  $A$  называется *пределом функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow +\infty$* , если для любого числа  $\epsilon > 0$  найдется такое число  $M > 0$ , что для всех значений  $x > M$  выполняется неравенство  $|f(x) - A| < \epsilon$ .

Аналогично определяется предел функции  $f(x)$  при  $x \rightarrow -\infty$ .

Обозначение:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$ .

## Односторонние пределы

⇒ Пусть функция  $f(x)$  определена в правой полуокрестности точки  $x_0$ , т. е. на некотором интервале  $(x_0, x_0 + \delta)$ , где  $\delta > 0$ . Тогда говорят, что число  $A$  называется *пределом функции  $f(x)$  справа* в точке  $x_0$  (или *правосторонним пределом*), если для любой последовательности  $\{x_n\}$ , сходящейся к  $x_0$  и такой, что все ее члены больше, чем  $x_0$ , соответствующая последовательность значений функции  $\{f(x_n)\}$  сходится к числу  $A$ .

Обозначения:  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = A$  или  $f(x_0 + 0) = A$ .

Аналогично определяется *предел функции слева* (или *левосторонний предел*) в точке  $x_0$ , обозначаемый  $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$  или  $f(x_0 - 0)$ .

Очевидно, что  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  существует в том и только в том случае, когда существуют и односторонние пределы  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$ , причем все три числа равны, т. е.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x).$$

## Замечательные пределы

*Первый замечательный предел*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

*Второй замечательный предел*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

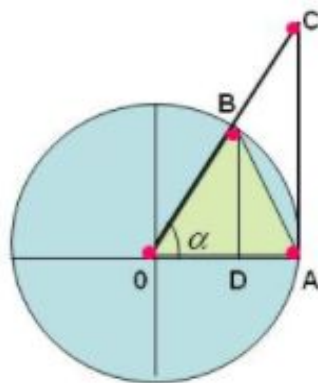
Часто используются следующие следствия из обоих замечательных пределов:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{x} = \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R};$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = e, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

• 7. Первый замечательный предел.

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$$



• Доказательство.

• 1.  $\alpha \rightarrow 0 \Rightarrow |\alpha| < \frac{\pi}{2}$

• 2.  $y = \frac{\sin \alpha}{\alpha}$  — четная функция

$(y(-\alpha) \equiv y(\alpha))$

$\Rightarrow$  рассмотрим  $\alpha > 0$

• 3.  $\triangle OBA \subset \text{сегмент} OBA \subset \triangle OCA$

$$S_{\triangle OBA} < S_{\text{сегмент} OBA} < S_{\triangle OCA}$$

$$\left. \begin{aligned} OA = 1 \Rightarrow S_{OBA} &= \frac{1}{2} OA \cdot BD = \frac{1}{2} \sin \alpha \\ \Rightarrow S_{OBA} &= \frac{1}{2} OA \cdot (\cap AB) = \frac{1}{2} \alpha \\ \Rightarrow S_{OCA} &= \frac{1}{2} OA \cdot AC = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{1}{2} \sin \alpha < \frac{1}{2} \alpha < \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha$$

• 4.  $\sin \alpha < \alpha < \operatorname{tg} \alpha \Rightarrow 1 < \frac{\alpha}{\sin \alpha} < \frac{1}{\cos \alpha} \Rightarrow 1 > \frac{\sin \alpha}{\alpha} > \cos \alpha$

• 5.  $\alpha \rightarrow 0 \Rightarrow B \rightarrow A \Rightarrow D \rightarrow A \Rightarrow OD \rightarrow OA$   
 $\parallel \quad \parallel$   
 $\cos \alpha \rightarrow 1$

• 6. По первому признаку существования предела:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$$



## Бесконечно малые и бесконечно большие функции

⇒ Функция  $\varphi(x)$  называется *бесконечно малой* при  $x \rightarrow x_0$  (или в окрестности точки  $x_0$ ), если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = 0$ .

Таким образом,

$$A = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \iff f(x) = A + \alpha(x),$$

где  $\alpha(x)$  — бесконечно малая при  $x \rightarrow x_0$ .

⇒ Пусть  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  — бесконечно малые функции при  $x \rightarrow x_0$   
Тогда:

1) Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0$ , то функции  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  называются *бесконечно малыми одного порядка* в окрестности точки  $x_0$ .

В частности, если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ , то  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  называются *эквивалентными бесконечно малыми* (в окрестности точки  $x_0$ ), что обозначается так:  $\alpha(x) \sim \beta(x)$ ,  $x \rightarrow x_0$ .

2) Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ , то функция  $\alpha(x)$  называется *бесконечно малой более высокого порядка*, чем  $\beta(x)$ . Этот факт записывается так:  $\alpha(x) = o(\beta(x))$ ,  $x \rightarrow x_0$  и говорят, что  $\alpha(x)$  — *o малое* от  $\beta(x)$  при  $x \rightarrow x_0$ . В частности, если  $\alpha(x)$  — бесконечно малая при  $x \rightarrow x_0$ , то  $\alpha(x) = o(1)$ ,  $x \rightarrow x_0$ .

При решении многих задач используются следующие эквивалентности, верные при  $x \rightarrow 0$ :

$$\sin x \sim x, \quad 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \quad \operatorname{tg} x \sim x, \quad \arcsin x \sim x, \quad \operatorname{arctg} x \sim x,$$

$$\ln(1+x) \sim x, \quad a^x - 1 \sim x \ln a \quad (\text{в частности, } e^x - 1 \sim x),$$

$$\sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}.$$

Кроме того, имеет место следующий факт: если  $\beta(x) \sim \beta_1(x)$ ,  $x \rightarrow x_0$  и существуют пределы  $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) \cdot \beta(x)$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$ , то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) \cdot \beta(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) \cdot \beta_1(x),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta_1(x)}.$$

Таким образом, предел произведения или частного двух бесконечно малых не меняется при замене любой из них на эквивалентную бесконечно малую.

Используя свойства пределов функций, найти следующие пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - 1}{4x^2 + 5x + 2};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - 3}{x-1};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x-x^2}{2x^2+3x}.$$

○ 1) Применяя теорему о действиях над пределами функций, получим:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 - 1}{4x^2 + 5x + 2} &= \frac{\lim_{x \rightarrow -1} (3x^2 - 1)}{\lim_{x \rightarrow -1} (4x^2 + 5x + 2)} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow -1} 3x^2 - \lim_{x \rightarrow -1} 1}{\lim_{x \rightarrow -1} 4x^2 + \lim_{x \rightarrow -1} 5x + \lim_{x \rightarrow -1} 2} = \\ &= \frac{3 \lim_{x \rightarrow -1} x \cdot \lim_{x \rightarrow -1} x - 1}{4 \lim_{x \rightarrow -1} x \cdot \lim_{x \rightarrow -1} x + 5 \lim_{x \rightarrow -1} x + 2} = \\ &= \frac{3 \cdot (-1)(-1) - 1}{4(-1)(-1) + 5(-1) + 2} = 2. \end{aligned}$$

2) Так как пределы числителя и знаменателя при  $x \rightarrow 2$  равны нулю, то мы имеем неопределенность вида  $\frac{0}{0}$ . «Раскроем» эту неопределенность (т.е. избавимся от нее), разложив числитель и знаменатель на множители и сократив их далее на общий множитель  $x - 2$ :

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)(x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 2}{x - 3}.$$

В полученной дроби знаменатель уже не стремится к нулю при  $x \rightarrow 2$ , поэтому можно применять теорему о пределе частного:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 2}{x - 3} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x + 2)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x - 3)} = \frac{2 + 2}{2 - 3} = -4.$$

Окончательно  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = -4$ .

3) Здесь мы также имеем неопределенность вида  $\frac{0}{0}$ . Домножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное к числителю (избавляемся от иррациональности в числителе):

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x+8} - 3}{x-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+8} - 3)(\sqrt{x+8} + 3)}{(x-1)(\sqrt{x+8} + 3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x+8})^2 - 3^2}{(x-1)(\sqrt{x+8} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+8) - 9}{(x-1)(\sqrt{x+8} + 3)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+8} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x+8} + 3} = \frac{1}{\sqrt{1+8} + 3} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

4) Числитель и знаменатель дроби — бесконечно большие функции, поэтому здесь имеет место неопределенность  $\frac{\infty}{\infty}$ . Раскрывая эту неопределенность, поделим числитель и знаменатель дроби на старшую степень  $x$ , т. е. на  $x^2$ :

$$\frac{1+x-x^2}{2x^2+3x} = \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - 1}{2 + \frac{3}{x}}.$$

Осталось воспользоваться свойствами пределов, а также тем, что функции  $\frac{1}{x}$  и  $\frac{1}{x^2}$  — бесконечно малые при  $x \rightarrow \infty$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x-x^2}{2x^2+3x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - 1}{2 + \frac{3}{x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - 1)}{\lim_{x \rightarrow \infty} (2 + \frac{3}{x})} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} - \lim_{x \rightarrow \infty} 1}{\lim_{x \rightarrow \infty} 2 + 3 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}} = \frac{0 + 0 - 1}{2 + 0} = -\frac{1}{2}. \bullet \end{aligned}$$

Найти пределы:

1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{x}, \alpha \in \mathbb{R};$

2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x};$

3)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x - \pi};$

4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}.$

○ 1) Сделаем замену  $y = \alpha x$ ; тогда  $y \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow 0$  и  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{\left(\frac{y}{\alpha}\right)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\alpha \sin y}{y} = \alpha \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = \alpha$ . В последнем равенстве мы воспользовались первым замечательным пределом.

Таким образом,  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha x}{x} = \alpha$ .

2) Поделим числитель и знаменатель дроби под знаком предела на  $x$ , после чего воспользуемся предыдущим пунктом:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\sin 5x}{x}\right)}{\left(\frac{\sin 3x}{x}\right)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 5x}{x}\right)}{\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{x}\right)} = \frac{5}{3}.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x - \pi};$$

3) Сводя предел к первому замечательному, сделаем замену  $y = x - \frac{\pi}{2}$ . Тогда  $y \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \frac{\pi}{2}$ , а  $x = y + \frac{\pi}{2}$ , откуда

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{2x - \pi} &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\cos(y + \frac{\pi}{2})}{2(y + \frac{\pi}{2}) - \pi} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} \frac{-\sin y}{2y} = -\frac{1}{2} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y} = -\frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Во втором равенстве в этой цепочке мы использовали формулу приведения, а в последнем — первый замечательный предел.

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x}$$

4) Сделаем замену  $t = \arcsin x$ , т. е.  $x = \sin t$ . Ясно, что  $t \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow 0$ , поэтому

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\left(\frac{\sin t}{t}\right)} = \frac{1}{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t}} = 1. \quad \bullet$$

Найти пределы:

1)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x, k \in \mathbb{R};$

2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1 + 5x};$

3)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-2}\right)^x;$

4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{7x}.$

○ 1) В данном случае мы имеем неопределенность вида  $1^\infty$ . Для ее раскрытия сделаем замену  $y = \frac{x}{k}$ . Тогда  $y \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow \infty$  и исходный предел сводится ко второму замечательному пределу:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\left(\frac{x}{k}\right)}\right)^{k \cdot \frac{x}{k}} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{ky} = \\ &= \left[ \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y \right]^k = e^k. \end{aligned}$$



2) Поскольку  $\sqrt[5]{1+5x} = (1+5x)^{\frac{1}{5}}$ , то здесь мы также имеем дело с неопределенностью  $1^\infty$ , для раскрытия которой нам снова понадобится одна из форм второго замечательного предела. Сделаем замену  $y = 5x$ . Тогда  $y \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow 0$  и

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[5]{1+5x} &= \lim_{x \rightarrow 0} (1+5x)^{\frac{1}{5} \cdot 5} = \\ &= \lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{1}{5} \cdot 5} = \left[ \lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{\frac{1}{5}} \right]^5 = e^5.\end{aligned}$$

3) Поделив числитель и знаменатель дроби на  $x$ , сведем данный предел к частному пределов из пункта 1):

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x+3}{x-2} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1 + \frac{3}{x}}{1 - \frac{2}{x}} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{3}{x}\right)^x}{\left(1 - \frac{2}{x}\right)^x} = \\ &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x}\right)^x} = \frac{e^3}{e^{-2}} = e^5.\end{aligned}$$

4) Сделав замену  $y = 2x$  и применяя одно из следствий из второго замечательного предела, получим:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{7x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{\frac{7}{2}y} = \frac{2}{7} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{e^y - 1}{y} = \frac{2}{7}.$$



Заменяя бесконечно малые эквивалентными, найти пределы:

1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 3x}$ ,

2)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x - 1)}{1 - \cos x}$ .

○ 1) В силу следствия из первого замечательного предела  $\sin \alpha x \sim \alpha x$ ,  $x \rightarrow 0$ . Отсюда (при  $x \rightarrow 0$ )  $\sin 4x \sim 4x$ , а  $\sin 3x \sim 3x$ , поэтому

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{3x} = \frac{4}{3}.$$

2) При  $x \rightarrow 0$  имеем  $e^x - 1 \sim x$  и  $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ , откуда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot (e^x - 1)}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x}{\left(\frac{x^2}{2}\right)} = 2. \quad \bullet$$

# НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ

## Непрерывность функции в точке

⇒ Функция  $f(x)$  называется *непрерывной в точке*  $x_0$ , если она определена в некоторой окрестности этой точки и  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

Если обозначить  $x - x_0 = \Delta x$  (приращение аргумента),  $f(x) - f(x_0) = \Delta y$  (приращение функции, соответствующее приращению аргумента  $\Delta x$ ), то это определение можно записать в эквивалентной форме.

⇒ Функция  $f(x)$  называется *непрерывной в точке*  $x_0$ , если она определена в некоторой окрестности этой точки и

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0.$$

Таким образом, если функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , то бесконечно малому приращению аргумента в этой точке соответствует бесконечно малое приращение функции.

## Односторонняя непрерывность

⇒ Функция  $f(x)$  называется *непрерывной слева* в точке  $x_0$ , если она определена на некотором полуинтервале  $(a; x_0]$  и

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0).$$

⇒ Функция  $f(x)$  называется *непрерывной справа* в точке  $x_0$ , если она определена на некотором полуинтервале  $[x_0; b)$  и

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

Функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$  тогда и только тогда, когда она непрерывна слева и справа в этой точке, т. е. когда

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0).$$

## Непрерывность функции на промежутке

⇒ Функция  $f(x)$  называется *непрерывной* на данном промежутке (интервале, полуинтервале, отрезке), если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

При этом если функция определена в конце промежутка, то под непрерывностью в этой точке понимается непрерывность справа или слева. В частности, функция  $f(x)$  называется *непрерывной на отрезке*  $[a; b]$ , если она:

- 1) непрерывна в каждой точке интервала  $(a; b)$ ;
- 2) непрерывна справа в точке  $a$ ;
- 3) непрерывна слева в точке  $b$ .

## Точки разрыва функции

⇒ Пусть точка  $x_0$  принадлежит области определения функции  $f(x)$  или является граничной точкой этой области. Точка  $x_0$  называется *точкой разрыва функции*  $f(x)$ , если  $f(x)$  не является непрерывной в этой точке.

Точки разрыва подразделяются на точки разрыва 1-го рода и 2-го рода.

⇒ Если в точке  $x_0$  существуют конечные односторонние пределы  $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$  и  $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$ , но они не равны между собой, или же односторонние пределы равны между собой, а значение функции в этой точке не совпадает с односторонними пределами, то  $x_0$  называется *точкой разрыва 1-го рода*.

Если в точке  $x_0$  существует конечный предел  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ , а  $f(x_0)$  не определено или  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \neq f(x_0)$ , то эта точка называется *точкой устранимого разрыва*.

Точки разрыва 1-го рода функции  $f(x)$ , не являющиеся точками устранимого разрыва, называются *точками скачка* этой функции.

Если  $x_0$  — точка скачка функции  $f(x)$ , то разность  $\Delta f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$  не равна нулю и называется *скачком функции  $f(x)$  в точке  $x_0$* .

⇒ Если в точке  $x_0$  не существует хотя бы один из односторонних пределов  $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$  или  $\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x)$ , то  $x_0$  называется *точкой разрыва 2-го рода*.

## Свойства функций, непрерывных в точке

**Теорема 6.5.** Пусть функции  $f(x)$  и  $g(x)$  непрерывны в точке  $x_0$ . Тогда функции  $f(x) \pm g(x)$ ;  $f(x) \cdot g(x)$  и  $f(x)/g(x)$  (если  $g(x_0) \neq 0$ ) также непрерывны в точке  $x_0$ .

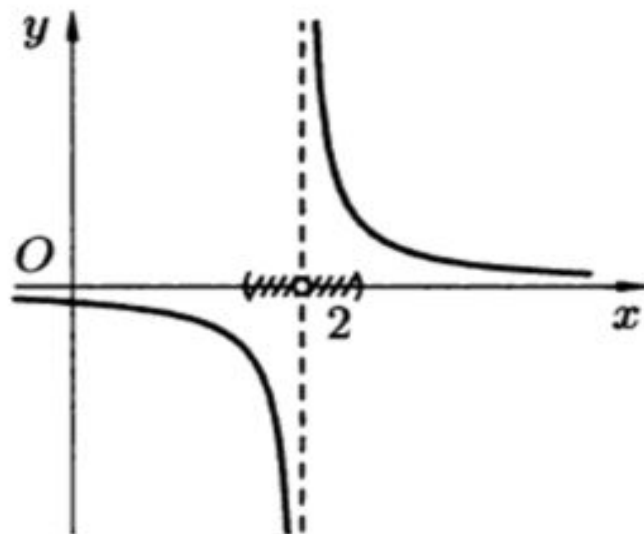
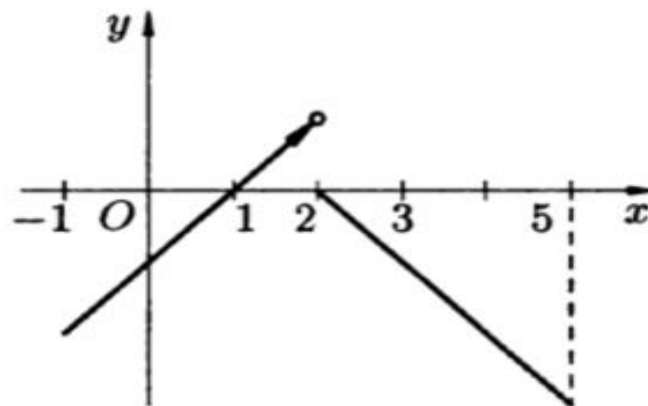
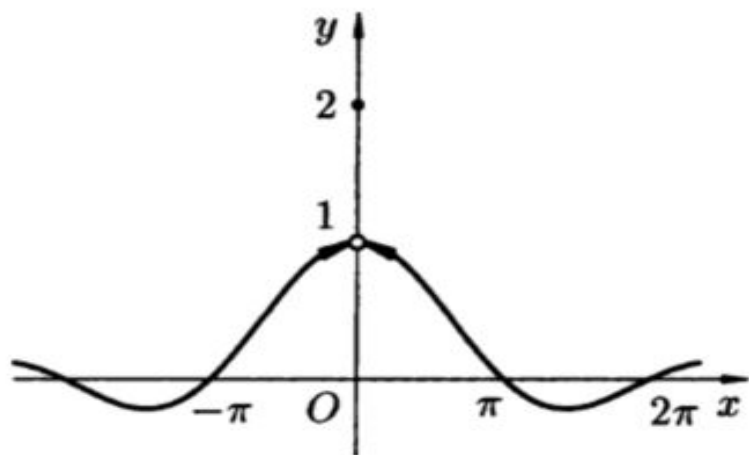
В частности, если функция  $f(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , то функция  $\alpha \cdot f(x)$ , где  $\alpha \in \mathbb{R}$ , также непрерывна в точке  $x_0$ .

**Теорема 6.6 (о непрерывности сложной функции).** Пусть функция  $u(x)$  непрерывна в точке  $x_0$ , а функция  $f(u)$  непрерывна в точке  $u_0 = u(x_0)$ . Тогда сложная функция  $f(u(x))$  непрерывна в точке  $x_0$ .

## Непрерывность элементарных функций

**Теорема 6.7.** Все простейшие элементарные функции ( $c$ ,  $x^\alpha$ ,  $a^x$ ,  $\log_a x$ ,  $\sin x$ ,  $\cos x$ ,  $\arcsin x$ ,  $\arccos x$ ) непрерывны в каждой точке своих областей определения.

Из этой теоремы, а также из двух предыдущих следует, что также непрерывны в каждой точке своих областей определения все функции, полученные из простейших с помощью конечного числа арифметических операций и операции композиции.





## Свойства функций, непрерывных на отрезке

**Теорема 6.8 (Больцано–Коши).** Пусть функция  $f(x)$  определена и непрерывна на отрезке  $[a; b]$  и принимает на его концах разные знаки. Тогда найдется хотя бы одна такая точка  $x_0 \in (a; b)$ , что  $f(x_0) = 0$ .

**Теорема 6.9 (о промежуточных значениях).** Пусть функция  $f(x)$  определена и непрерывна на отрезке  $[a; b]$ . Тогда для любого числа  $C$ , заключенного между числами  $f(a)$  и  $f(b)$ , найдется такая точка  $x_0 \in [a; b]$ , что  $f(x_0) = C$ .

**Теорема 6.10 (1-я теорема Вейерштрасса).** Пусть функция  $f(x)$  определена и непрерывна на отрезке  $[a; b]$ . Тогда эта функция ограничена на этом отрезке.

**Теорема 6.11 (2-я теорема Вейерштрасса).** Пусть функция  $f(x)$  определена и непрерывна на отрезке  $[a; b]$ . Тогда эта функция принимает на отрезке  $[a; b]$  свои наибольшие и наименьшие значения, т. е. существуют такие точки  $x_1, x_2 \in [a; b]$ , что для любой точки  $x \in [a; b]$  справедливы неравенства

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2).$$

Исследовать на непрерывность и построить график функции

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{при } x \leq -\pi, \\ \sin x & \text{при } -\pi < x < \frac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{при } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найти скачок функции в точках скачка.

○ Функции  $y = x$ ,  $y = \sin x$  и  $y = 1$  непрерывны на всей числовой прямой, поэтому данная функция может иметь разрывы только в точках, где меняется ее аналитическое выражение, т. е. в точках  $x_1 = -\pi$  и  $x_2 = \frac{\pi}{2}$ .

Исследуем функцию на непрерывность в этих точках, для чего найдем соответствующие односторонние пределы и значения функции.

В точке  $x_1 = -\pi$  имеем:

$$\lim_{x \rightarrow -\pi-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\pi} x = -\pi, \quad \lim_{x \rightarrow -\pi+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\pi} \sin x = 0,$$
$$f(-\pi) = -\pi.$$

Таким образом, в этой точке

$$\lim_{x \rightarrow -\pi-0} f(x) = f(-\pi) \neq \lim_{x \rightarrow -\pi+0} f(x),$$

т. е. функция имеет разрыв 1-го рода и непрерывна слева. Скачок функции  $f(x)$  в точке  $x_1 = -\pi$  равен

$$\Delta f(-\pi) = \lim_{x \rightarrow -\pi+0} f(x) - \lim_{x \rightarrow -\pi-0} f(x) = \pi.$$

Аналогично, для точки  $x_2 = \frac{\pi}{2}$  получим:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \sin x = \sin \frac{\pi}{2} = 1,$$
$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}+0} 1 = 1,$$

а значение  $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$  не определено. Отсюда следует, что  $x_2 = \frac{\pi}{2}$  — точка устранимого разрыва для функции  $f(x)$ .

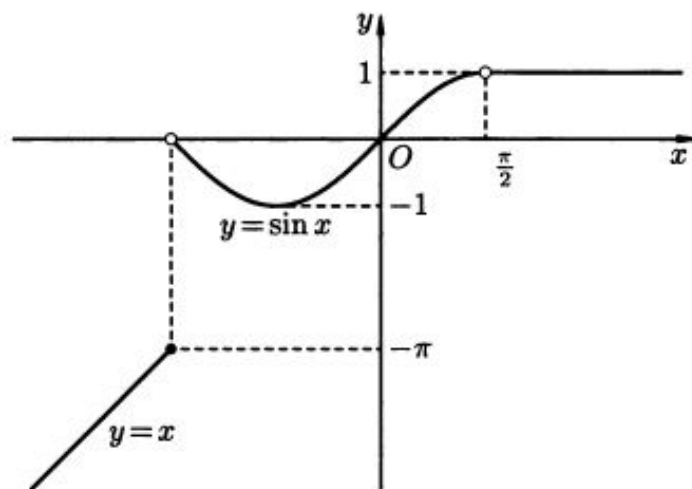


Рис. 78

Установить характер разрыва функции  $f(x) = \frac{2x+1}{x-2}$  в точке  $x_0 = 2$ .

○ Находим:

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{2x+1}{x-2} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{2x+1}{x-2} = -\infty,$$

то есть функция в точке  $x_0 = 2$  не имеет ни одного из односторонних пределов. Отсюда следует, что  $x_0 = 2$  — точка разрыва 2-го рода. ●

Исследовать функцию  $y = \frac{1}{(x+2)(x-3)}$  на непрерывность на отрезке  $[a; b]$ , если

а)  $[a; b] = [-1; 2]$ ;

б)  $[a; b] = [-5; 0]$ ;

в)  $[a; b] = [-3; 4]$ .

○ Данная функция элементарная, поэтому она непрерывна на области определения, т. е. при всех  $x$ , не равных  $-2$  и  $3$ . В точке  $x_1 = -2$  функция терпит разрыв 2-го рода, так как

$$\lim_{x \rightarrow -2-0} \frac{1}{(x+2)(x-3)} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -2+0} \frac{1}{(x+2)(x-3)} = -\infty.$$

В точке  $x_2 = 3$  также разрыв 2-го рода, потому что

$$\lim_{x \rightarrow 3-0} \frac{1}{(x+2)(x-3)} = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 3+0} \frac{1}{(x+2)(x-3)} = +\infty.$$

Отсюда следует, что данная функция непрерывна на отрезке  $[-1; 2]$  (так как  $x_1, x_2 \notin [-1; 2]$ ); на отрезке  $[-5; 0]$  функция непрерывна всюду, кроме точки  $-2$ , в которой терпит разрыв 2-го рода ( $x_1 \in [-5; 0]$ ,  $x_2 \notin [-5; 0]$ ); на отрезке  $[-3; 4]$  функция имеет две точки разрыва 2-го рода  $x_1 = -2$ ,  $x_2 = 3$ , а в остальных точках непрерывна ( $x_1; x_2 \in [-3; 4]$ ). ●

---



---



---

