Канторово множество

(канторов дисконтинуум, пыль Кантора,…) -

проективно универсальный объект в классе метрических компактов.

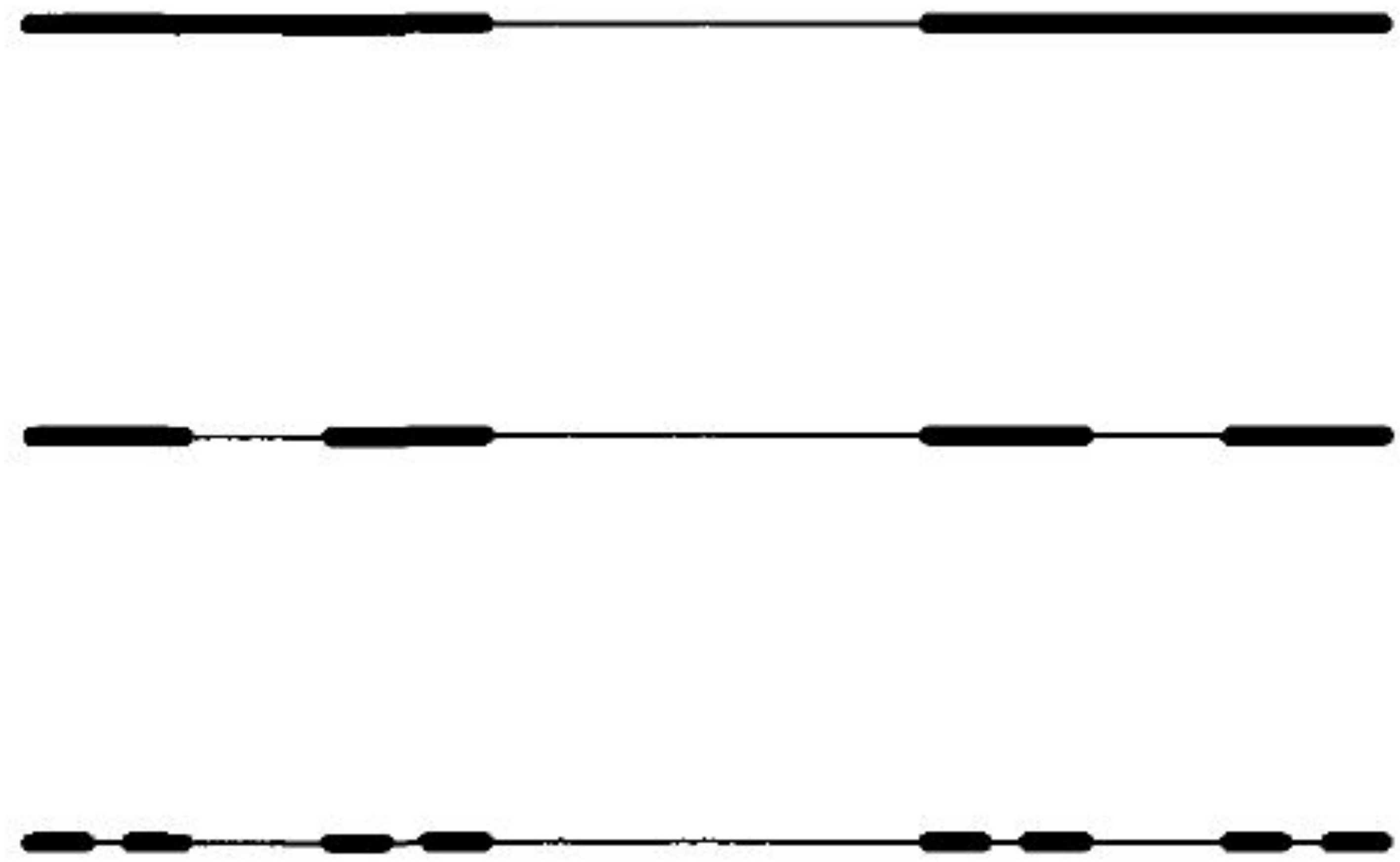
П. В. Семенов,

.

Дубна, 20 июля 2015

- 0) Отрезок *I* = [0; 1].
- 1) Делим *I* на три равных отрезка: $I_0,\ I_1,\ I_2$
- Средний интервал удаляем. Остаются $I_0,\ I_2$
- 2) С каждым из двух оставшихся отрезков делаем то же.
- А именно, получаем 6 отрезков длиной 1/9 $I_{00},\ I_{01},\ I_{02}$ и
- $I_{20},\ I_{21},\ I_{22}$ из которых удаляем средние интервалы. Остаются $I_{00},\ I_{02},\ I_{20},\ I_{22}$.
- 3) С каждым из четырех оставшихся отрезков делаем то же.
- И Т. Д.

Канторово множество -2



Канторово множество -3

- Сумма длин удаленных интервалов:

$$\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{9}+\frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{27}+\frac{1}{27}+\frac{1}{27}+\frac{1}{27}\right) + \dots = \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\dots\right) = 1$$

- Получается, что из отрезка длиной 1 удалили интервалы, сумма длин которых также равна 1. А что-нибудь осталось?
- **Да**, и осталось «столько же» точек, сколько было на [0;1].
    - *Кодировка точек канторовского множества.*
- Пусть $a = (a_1, a_2, a_3, \dots.)$ любая послед-ть символов 0 и 2. Тогда

$$I_{a_1} \supset I_{a_1a_2} \supset I_{a_1a_2a_3} \supset \dots \supset I_{a_1a_2a_3\dots a_n} \supset \dots.$$

- послед-ть стягивающихся отрезков, у которых есть ровно одна общая точка k_a.

$$\mathrm{K} = \{k_a = I_{a_1} \cap I_{a_1a_2} \cap I_{a_1a_2a_3} \cap \dots \cap I_{a_1a_2a_3\dots a_n} \cap \dots : \quad \forall i \in \mathbb{N} \quad a_i = 0 \text{ или } a_i = 2\}$$

Примеры.

Точка: 0 Код: (000…..)

Точка: 1 Код: (222…..)

Точка: 1/3 Код: (0222…..)

Точка: 7/9 Код: (20222…..)

Код: (2202000….) Точка: $\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{0}{27}+\frac{2}{81}=\frac{38}{81}$

Код: (20202020(20)) Точка:

$$\left(\frac{2}{3}+\frac{0}{9}\right)+\frac{1}{9}\left(\frac{2}{3}+\frac{0}{9}\right)+\frac{1}{81}\left(\frac{2}{3}+\frac{0}{9}\right)+\ldots=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{3}{4}$$

Код: $a=(a_1,a_2,a_3,....)$. Точка: $k_a=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{a_i}{3^i}$

Точки 1-го рода - в коде есть «хвост» из 0 или «хвост» из 2, т.е. концы удаляемых интервалов. Точки 2-го рода – остальные.

- Ф 1.***К*** *континуально*(=существует биекция между **К** и [0;1]).
- До-во.
- **К** биективно множеству всех последовательностей из двух символов 0 и 2,
- которое биективно множеству всех подмножеств множества натуральных чисел,
- которое континуально ($2^{\aleph_0} = c$).

Фотография барельефа Георга Кантора.
Часть бронзового обелиска (скульптор Г. Гейер), Нойштадт.

- Ф 2. *Существует сюръекция s из **К** на* [0;1]
- Док-во.
- Возьмем точку из **К**. Выпишем ее код из 0 и 2. Все 2 заменим на 1. Получим последовательность из 0 и 1.
- Рассмотрим ее как разложение действительного числа из [0;1] в бесконечную двоичную дробь. Всё.

- <u>Ф 3 = Ф 1</u>. ***К** континуально*
- Док-во.
- $[0;1] \supset \mathrm{K} \xrightarrow{\text{"на"}} [0;1]$
- Значит, **К** и [0;1] биективны подмножествам друг друга.
- Остается сослаться на теорему Кантора-Бернштейна-Шрёдера.
- <u>Ф 4</u>. *Сюръекция* $s:\mathrm{K} \xrightarrow{\text{"на"}} [0;1]$ *- не иньекция.*
- Док-во.

$$s\left(\frac{1}{3}\right) = 0,011111..... = \frac{1}{2} = 0,100... = s\left(\frac{2}{3}\right)$$

- Всегда $s(c_i) = s(d_i)$ для любого удаляемого интервала $(c_i;d_i)$

- Ф 5. *Сюръекция* $s : \mathrm{K} \xrightarrow{\text{"на"}} [0;1]$ *непрерывна*.

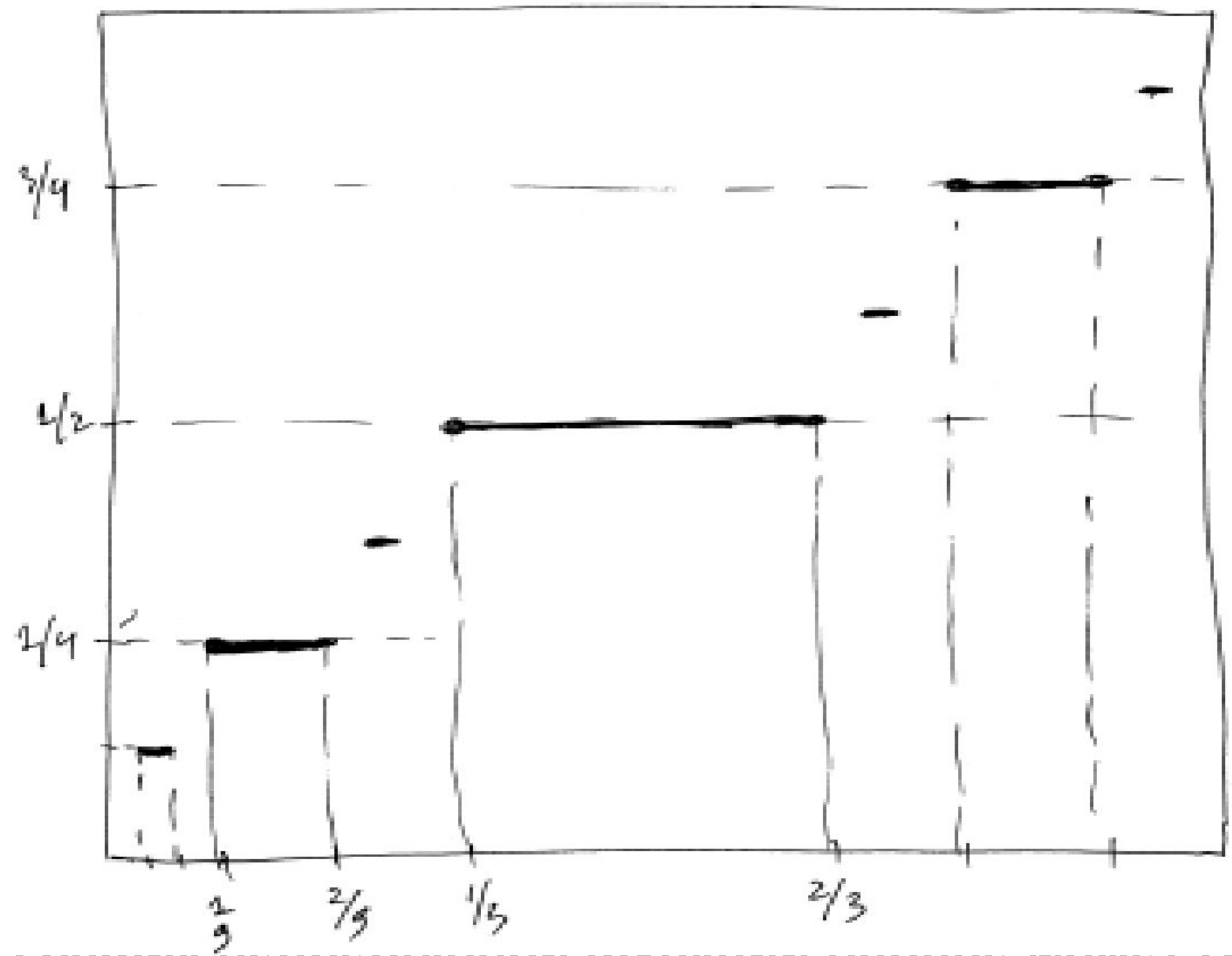
- Док-во. Формальный ответ: $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \dfrac{1}{3^{\left[\log_2 \frac{1}{\varepsilon}\right]+1}} \ldots\ldots$
- Неформально. Если коды двух точек
- *x* и *y* совпали на первых *n* местах, то $|x - y| \le \dfrac{1}{3^n}$ и тогда
- двоичные дроби *s(x),s(y)* совпали на первых *n* местах, т.е.

$$|s(x) - s(y)| \le \frac{1}{2^n}$$

- Остается формализовать переход

$$|x - y| \le \frac{1}{3^n} = \delta \quad \Rightarrow \quad |s(x) - s(y)| \le \frac{1}{2^n} < \varepsilon$$

- Ф 6 (Канторова лестница, «чортова» лестница). *Существует непрерывная неубывающая сюръекция отрезка на себя, которая почти всюду постоянна.*
- Док-во.
- Продолжим сюръекцию $s : \mathrm{K} \xrightarrow{\text{"на"}} [0;1]$ на интервалы, удаляемые в процессе построения множества **К** самым простым образом.
- А именно, так как всегда $s(c_i) = s(d_i)$ для любого удаляемого интервала $(c_i;d_i)$, то на этом интервале наша функция будет соответствующей константой.



- **График непрерывной функции вполне может НЕ получаться «одним росчерком пера».**

...Это доказательство имеет то преимущество, что позволяет нам обнаружить замечательный большой класс непрерывных функций действительного переменного x, свойства которых приводят к интересным исследованиям независимо от того, рассматриваются ли эти функции в соответствии с их определением, связанным с нашим изложением, или же их представляют в форме тригонометрических рядов, которые определенно существуют для них, поскольку эти непрерывные функции не имеют бесконечного числа максимумов и минимумов.

В самом деле, на интервале $(0\ldots 1)$ мы можем задать функцию $\psi(x)$, удовлетворяющую следующим условиям:

когда x заключен в каком-либо из интервалов $(a_\nu \ldots b_\nu)$, т. е. $a_\nu \leqslant x \leqslant b_\nu$, то $\psi(x) = \psi_\nu$; когда x имеет значение g, получаемое как предел последовательности интервалов $(a_{\lambda_1} \ldots b_{\lambda_1}), \ldots, (a_{\lambda_\nu} \ldots b_{\lambda_\nu}), \ldots$, то полагаем

$$\psi(g) = h = \lim_{\nu=\infty} \psi_{\lambda_\nu}. \tag{5}$$

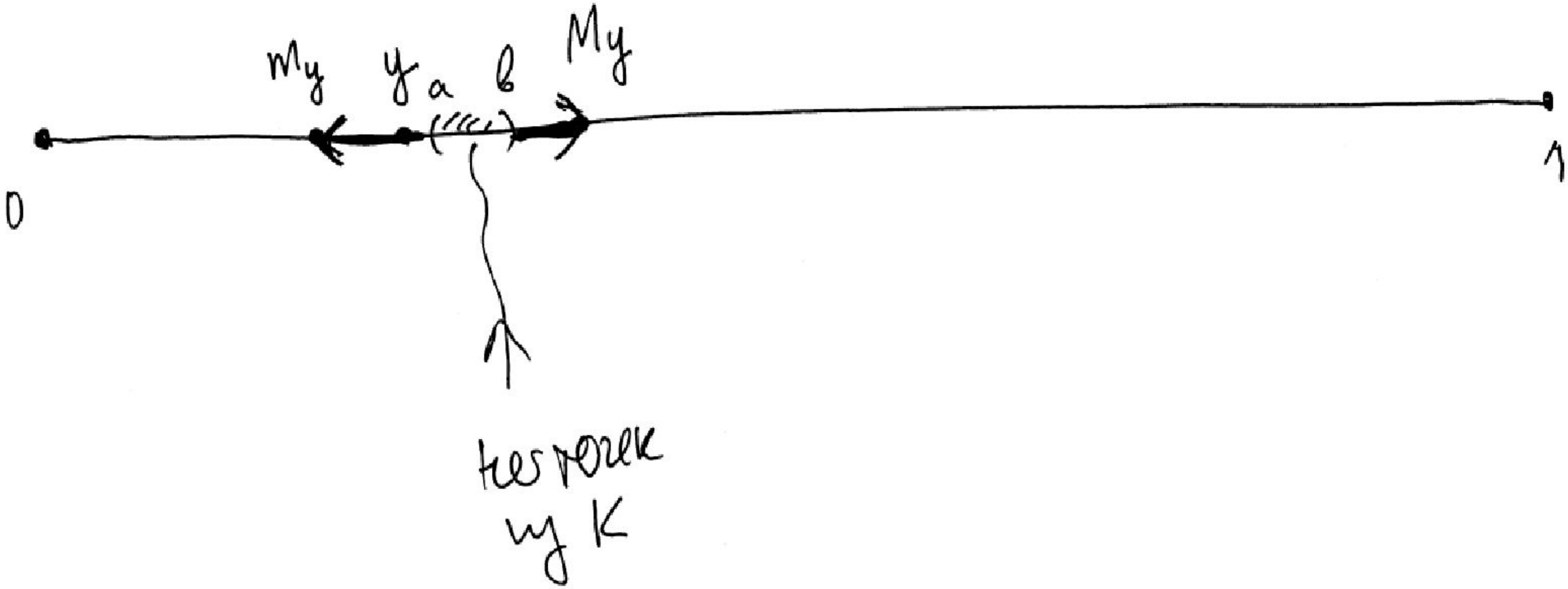
В соответствии со сказанным $\psi(x)$ *является, конечно, непрерывной монотонной*[2] *функцией непрерывного переменного x; когда x возрастает от 0 до 1,* $\psi(x)$ непрерывно изменяется, не убывая, от 0 до 1; ее геометрический образ представляет собой лестничнообразное множество прямолинейных сегментов, каждый из которых параллелен оси x, дополненное некоторыми точками, делающими эту кривую непрерывной. Частный случай этих функций уже содержится в примере, упомянутом мной в «Acta mathematica», т. 2, с. 407 [см. примеч. авт. 11) к I.5.5] [6]. Полагая

$$z = \frac{c_1}{3} + \frac{c_2}{3^2} + \ldots + \frac{c_\rho}{3^\rho} + \ldots, \tag{6}$$

где коэффициенты c_μ могут произвольно принимать значения 0 и 2, а ряд может состоять из конечного и бесконечного числа членов, имеем, что $\{z\}$ является *совершенным* множеством S, расположенным в интер-

- Ф 7. ***К*** *- компакт без изолированных точек.*
- Ф 8. ***К*** *нигде не плотно (= в любом интервале есть подинтервал, в котором нет точек из* ***К****).*
- Док-во.
- Для интервала *(a;b)* выберем *n* так, чтобы $\frac{1}{3^n} < \frac{b-a}{2}$.
- Разделим [0;1] на 3^n одинаковых отрезков. Один из них, скажем J , целиком лежит в *(a;b)* .
- Если на *n*-ом шаге построения **К** внутренность J удаляют, то J- нужный подинтервал.
- Если нет, то на следующем шаге удаляют среднюю треть J
- и эта треть - нужный подинтервал.

- Ф 9. *Если* ***F*** *- замкнутое подмножество* ***К*** *, то существует непрерывная сюръекция* $\mathrm{r}: K \xrightarrow{\text{"на"}} F$ *такая, что* $r(x)=x, \quad x \in F$. ***(F – ретракт К).***
- Док-во.
- Возьмем $y \in K \setminus F, \quad m_y = \max\{\mathrm{x} \in \mathrm{F}:\ \mathrm{x} < \mathrm{y}\},\ M_y = \min\{\mathrm{x} \in \mathrm{F}: \mathrm{x} > \mathrm{y}\}$
- По Ф8 найдем $(a;b) \subset (\mathrm{m}_y;\mathrm{M}_y), \quad (a;b) \cap K = \varnothing$
- Вырежем $(a;b)$ из прямой и разрез максимально раздвинем:
- $\mathrm{K} \cap (m_y;\mathrm{a}]$ отобразим в m_y , а $\mathrm{K} \cap [b;M_y)$ отобразим в M_y
-



- Все точки из ***F***, как и требуется, оставим на месте..
- Теорема Мазуркевича. *Замкнутое подмножество нульмерного метрического пространства есть его ретракт.*

- Ф 10. *Для любого метрического компакта* ***X*** *существует непрерывная сюрьекция* $f : K \xrightarrow{\text{"на"}} X$.
- Док-во 1 (обходное).
- 1) Сначала Ф10 устанавливается для специального ***X***, для гильбертова куба Q : $\exists f_Q : K \xrightarrow{\text{"на"}} Q$.
- 2) Затем используется (иньективная) универсальность Q:

$$\exists X' \subset Q, \quad \exists h : X \xrightarrow{\text{"гомеоморфизм"}} X'$$

- 3) Пусть $F = (f_Q)^{-1}(X') \subset K$. Применяем Ф9 о ретракции:

$$\exists \mathrm{r} : K \xrightarrow{\text{"на"}} F$$

- 4) Тогда $f = h^{-1} \circ f_Q \circ \mathrm{r}$ -
- то, что нужно:

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "{f_Q, \text{"на"}}"] \arrow[d, "r"'] & Q \\ F \arrow[r, "{f_Q, \text{"на"}}"] & X' \arrow[r, shift left, "h^{-1}"] & X \arrow[l, shift left, "h"] \end{tikzcd}$$

Канторово множество - 12

- Док-во 2 (почти прямое).
- 1) Для любого $\varepsilon > 0$ в метрическом компакте *X* есть конечная $\varepsilon -$ сеть, т.е. конечное множество $\{x_1, x_2, ..., x_{n(\varepsilon)}\}$ такое, что $\forall x \in X \ \ \exists \ x_i \underset{\varepsilon}{\approx} x$
- 2) Строим конечные $\varepsilon -$сети для $\varepsilon = 1,\ \varepsilon = 1/2,\ \varepsilon = 1/3, ...$
- 3) Выписываем поочередно все сети друг за другом. Получаем последовательность $\{s_1, s_2, ...\}$ плотную в *X.*
- 4) К каждой точке s_i «привязан» открытый шарик $U(s_i; r_i)$ $r_i \to 0,\ i \to \infty$
- 5) Пусть $a = (a_1, a_2, ...)$ код точки $k = k_a \in K$.Определим $X_i = X_i(k) \subset X$
- по правилу $X_i = [U_i],\ a_i = 0;\ \ X_i = X \setminus U_i,\ a_i = 2$
- 6) Пересечение $X(k) = X_1 \cap X_2 \cap X_3 \cap ...$ или пусто, или одноточечно.
- 7) Пусть ***F*** - множество тех точек из ***K***, для которых $X(k)$ непусто.
- Оказывается, что ***F*** **–** замкнуто, а отображение $g : k \mapsto X(k),\ k \in F$
- есть непрерывная сюръекция $g : F \xrightarrow{\text{"на"}} X$.
- 8) Остается использовать Ф9 о ретракции: $\exists r : K \xrightarrow{\text{"на"}} F$
- и определить $f = g \circ r : K \xrightarrow{\text{"на"}} X$

Mix

- Ф11. ***К* –** *нульмерен*
- *(=в любой окрестности любой точки есть открыто-замкнутое подмножество)*
- Ф12. (уникальность ***К***)
- *Всякий нульмерный метрический компакт без изолированных точек гомеоморфен **К.***
- Ф13. *Существует непрерывная сюрьекция отрезка на любой выпуклый компакт **X**.*
- : сюръекцию $f : K \xrightarrow{\text{"на"}} X$ продолжить на смежные интервалы по линейности.

Mix

- Ф14. ***К –*** *однороден (=любую точку можно перевести в любую автогомеоморфизмом) и*
- *строго однороден (=все clopen гомеоморфны).*
- Ф15. (частичное решение CH)
- *Несчетное замкнутое числовое множество содержит копию* ***К*** *и поэтому континуально.*
- Ф15' *Если* $f : X \longrightarrow Y$ *непрерывно отображает полное метрическое пространство* ***X*** *на несчетное пространство* ***Y*** *, то* ***X*** *содержит копию* ***К*** *и поэтому неравенство* $\aleph_0 < |X| < c$ *невозможно.*
- Ф16. *Существует измеримое, не борелевское множество.*

$$\left|2^K\right| = 2^c > c = |\mathrm{B}|$$

Спасибо за внимание.