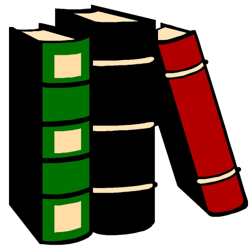
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ РХТУ имени Д. И. Менделеева



Дифференциальные уравнения

Лекция № 3

Уравнения в полных дифференциалах.
Интегрирующие множители вида $\mu(x)$ и $\mu(y)$.
Решение дифференциальных уравнений, допускающих интегрирующий множитель

Уравнения в полных дифференциалах

Пусть [illegible] = [illegible], тогда

$$[illegible] = \frac{[illegible]}{[illegible]}[illegible] + \frac{[illegible]}{[illegible]}[illegible]$$

– полный дифференциал функции двух переменных [illegible] = [illegible].

Определение 1. Дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$[illegible] + [illegible] = 0 \qquad (1)$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*,

если левая часть этого уравнения является

полным дифференциалом некоторой функции [illegible] = [illegible]

$$[illegible] + [illegible] = [illegible] \qquad (2)$$

Тогда (1) уравнение принимает вид: [illegible] = 0

и [illegible] = [illegible] – общий интеграл уравнения (1)

- Геометрически общий интеграл $u(x, y) = C$ представляет собой семейство линий уровня поверхности $u = u(x. y)$

Теорема. Пусть функции [illegible], [illegible] и их частные производные $\frac{[illegible]}{[illegible]}$, $\frac{[illegible]}{[illegible]}$ определены и непрерывны в некоторой односвязной области [illegible] [illegible] [illegible]^2. Тогда для того, чтобы дифференциальное уравнение [illegible] + [illegible] = 0 было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось тождество:

$$\frac{[illegible]}{[illegible]} \; [illegible] \; \frac{[illegible]}{[illegible]} \quad . \qquad (3)$$

Алгоритм построения функции $u(x,y)$

- **1 способ**

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x.y) \quad \forall (x,y) \epsilon D,$$

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = du(x,y)$$

1.Составить систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = P(x,y) \\ \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = Q(x,y) \end{cases} . \qquad (4)$$

2.Проинтегрировать по x первое уравнение системы:

$$u(x,y) = \int P(x,y)\,dx + \varphi(y), \qquad (5)$$

3.Подставить функцию (5) во второе уравнение системы (4). Найти $\varphi(y)$.

4.Подстаить функцию $\varphi(y)$ в формулу (5). В результате будет найдена функция $u(x,y)$.

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)dx\right) + \varphi'(y) = Q(x,y),$$

следовательно, $\varphi'(y) = Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)dx\right),$

покажем, что $\frac{\partial}{\partial x}\left(Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)dx\right)\right) = 0,$

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)dx\right)\right) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\int P(x,y)dx\right)\right) =$$
$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 0\ , \ \ \forall\ (x,y) \epsilon D$$

Значит ,$\varphi'(y)$зависит только от y,тогда

$$\varphi(y) = \int \left(Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\int P(x,y)dx\right)\right)dy + C,$$

Пример 1. Решить уравнение:

$$(\sin x + 3x^2y^2)dx + 2(1 + x^3y)dy = 0.$$

Решение. В данном примере

$$P(x;y) = \sin x + 3x^2y^2$$

$$Q(x;y) = 2(1 + x^3y),$$

откуда получим:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial y} &= 6x^2y \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= 6x^2y \end{aligned}\right] \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

$$du = (\sin x + 3x^2y^2)dx + 2(1 + x^3y)dy.$$

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \sin x + 3x^2y^2 \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = 2(1 + x^3y). \end{cases}$$

Проинтегрируем по x первое уравнение, считая y постоянным:

$$u(x;y) = \int (\sin x + 3x^2y^2)dx = -\cos x + x^3y^2 + \varphi(y).$$

$$\square(\square;\square) = -\square\square\square\square + \square^3\square^2 + \square(\square). \qquad (*)$$

$$\frac{\square\square\square}{\square\square\square} = 2\square^3\square + \square'\square\square\square$$

$$2\square^3\square + \square'\square\square\square = 2 + 2\square^3\square,$$

$$\square'\square\square\square = 2,$$

$$\square(\square) = \square\, 2\square\square\square = 2\square + \square_1,$$

где c_1 – произвольная постоянная.

Подставим $\varphi(y)$ в равенство (*):

$$\square(\square;\square) = -\square\square\square\square\square + \square^3\square^2 + 2\square + \square_1.$$

Таким образом, общим интегралом данного уравнения будет:

$$\square(\square;\square) = c,$$

$$-\square\square\square\square\square + \square^3\square^2 + 2\square = c$$

Ответ: $-\square\square\square\square\square + \square^3\square^2 + 2\square = c.$

Пример2. Найти решение задачи Коши:

$$2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)=\sqrt{x^2-y}\cdot y',\ \ y(1)=0$$

Решение.

$$2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)dx-\ \sqrt{x^2-y}dy=0,$$

Обозначим: $P(x,y)=2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right),\ Q(x,y)=-\ \sqrt{x^2-y}.$

Вычислим:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{x}{\sqrt{x^2-y}},\qquad \frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{x}{\sqrt{x^2-y}},$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x},$$

Следовательно, уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\ \sqrt{x^2-y} \end{cases}$$

$$u(x,y) = \int 2x\left(1+\sqrt{x^2-y}\right)dx = 2\int xdx + \int \sqrt{x^2-y}\,2xdx = \begin{bmatrix} x^2-y=t \\ 2xdx=dt \end{bmatrix} =$$

$$x^2 + \int t^{\frac{1}{2}}dt = x^2 + \frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3} + \varphi(y) = x^2 + \frac{2}{3}\cdot\sqrt{(x^2-y)^3} + \varphi(y),$$

$$u(x,y) = x^2 + \frac{2}{3}\cdot\sqrt{(x^2-y)^3} + \varphi(y), \qquad (*)$$

$\dfrac{\partial u}{\partial y} = -\sqrt{x^2-y} + \varphi'(y)$, подставим во 2 уравнение системы.

$$-\sqrt{x^2-y} + \varphi'(y) = -\ \sqrt{x^2-y},$$

$\varphi'(y)=0$, $\varphi(y)=C_1$

$$u(x,y) = x^2 + \frac{2}{3}\cdot\sqrt{(x^2-y)^3} + C_1,$$

$$x^2 + \frac{2}{3} \cdot \sqrt{(x^2 - y)^3} = \mathrm{C} - \text{общий интеграл.}$$

Подберем C так, чтобы выполнялось начальное условие $y(1) = 0$:

$$1 + \frac{2}{3} \cdot \sqrt{(1 - 0)^3} = \mathrm{C},$$

$$\mathrm{C} = \frac{5}{3},$$

следовательно, искомое решение задачи Коши:

$$x^2 + \frac{2}{3} \cdot \sqrt{(x^2 - y)^3} = \frac{5}{3},$$

или

$$3x^2 + 2 \cdot \sqrt{(x^2 - y)^3} = 5.$$

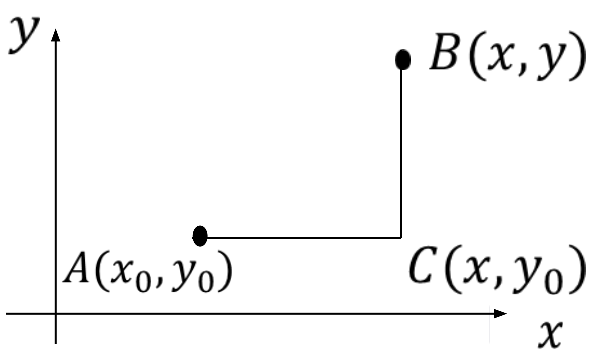
Ответ: $3x^2 + 2 \cdot \sqrt{(x^2 - y)^3} = 5.$

2способ

Функцию $u(x,y)$ находят с помощью криволинейного интеграла:

$$u(x,y) = \int_{(AB)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \ ,$$

который не зависит от пути интегрирования, соединяющего любую фиксированную точку $A(x_0;\ y_0)\epsilon D$ и точку текущую $B(x;y)\epsilon D$



$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y\ )dy$$

Пример2. Решить уравнение:

$(x + y^2x + sinx)dx + (x^2y - y^3+3\ dy=0$

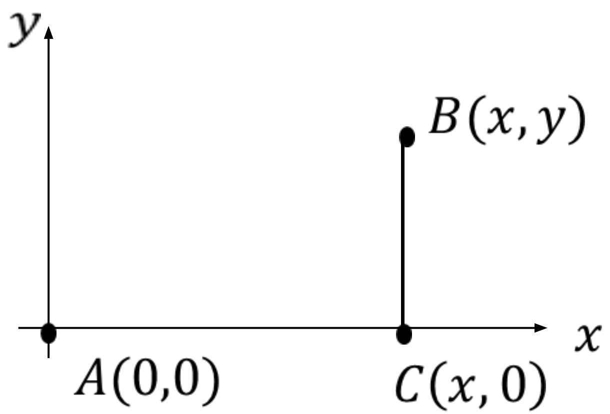
Решение.

$P(x,y) = x + y^2x + sinx,\quad Q(x,y) = x^2y - y^3+3,$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2xy = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy \qquad \forall(x,y)\epsilon R^2$$

Для поиска функции $u(x,y)$воспользуемся вторым способом

В качестве точки $A(x_0,y_0)$ начало координат.



Тогда по формуле: $u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x, y\ )dy$

$$u(x,y) = \int_0^x (x + sinx)dx + \int_0^y (x^2y - y^3 + 3)\mathrm{d}y = \left(\frac{x^2}{2} - cosx\right)\Bigg|_0^x +$$

$$+\left(\frac{x^2y^2}{2} - \frac{y^4}{4} + 3y\right)\Bigg|_0^y = \frac{x^2}{2} - cosx + 1 + \frac{x^2y^2}{2} - \frac{y^4}{4} + 3y.$$

Следовательно, общее решение уравнения имеет вид:

$$\frac{x^2}{2} - cosx + \frac{x^2y^2}{2} - \frac{y^4}{4} + 3y = C,\ C\epsilon R$$

Ответ: $\frac{x^2}{2} - cosx + \frac{x^2y^2}{2} - \frac{y^4}{4} + 3y = C$

Интегрирующий множитель

Пусть дифференциальное уравнение

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \qquad (6)$$

не является уравнением в полных дифференциалах, т.е.

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} \neq \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \quad \forall (x, y) \in D .$$

Определение 3. Функция $\mu = \mu(x, y)$ называется

интегрирующим множителем для дифференциального

уравнения (6), если после умножения на неё

дифференциального уравнения (6)

получается уравнение

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0 \qquad (7)$$

являющееся уравнением в полных дифференциалах.

Если [illegible] – непрерывно дифференцируемая функция в области [illegible]^2, то она удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных:

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Интегрирующий множитель вида $\mu = \mu(x)$

- $$Q\frac{d\ln|\mu|}{dx} = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x},$$

[illegible] (8)

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Интегрирующий множитель вида $\mu = \mu(y)$

Теорема. Пусть дифференциальное уравнение

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \qquad (6)$$

не является уравнением в полных дифференциалах, причём

$M(x,y)$, $N(x,y)$, $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}$, $\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ непрерывны в некоторой области D.

Тогда справедливы следующие утверждения.

I. Если $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \psi(x)$ – функция, зависящая только от x

и $N(x,y) \neq 0$ в области D, то

$\mu(x) = e^{\int \psi(x)\,dx}$ – интегрирующий множитель уравнения (6)

от одной переменной x.

II. Если $\dfrac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \varphi(y)$ – функция, зависящая только от y и

$M(x,y) \neq 0$ в области D ,то

$\mu(y) = e^{\int \varphi(y)\,dy}$ – интегрирующий множитель уравнения (6)

от одной переменной y.

Замечание. Умножение на функцию $\mu(x,y)$ и интегрирования вместо уравнения (6) уравнения (7) может привести к потере решений, обращающих $\mu(x,y)$ в ноль.

Пример3.

Решить дифференциальное уравнение:

$$(x^2 - y^2 + y)dx = x(1 - 2y)dy.$$

Решение:

$$(x^2 - y^2 + y)dx - x(1 - 2y)dy = 0,$$

или:

$$(x^2 - y^2 + y)dx + (2y - 1)x\,dy = 0.$$

$$P(x,y) = x^2 - y^2 + y, \qquad Q(x,y) = x(2y - 1).$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial P}{\partial y} = (x^2 - y^2 + y)'_y = 1 - 2y \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} = (x(2y - 1))'_x = 2y - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x},$$

следовательно, уравнение не является уравнением в полных дифференциалах.

Найдём

$$\frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{(1 - 2y) - (2y - 1)}{x(2y - 1)} = \frac{-2(2y - 1)}{x(2y - 1)} = -\frac{2}{x} = \varphi(x).$$

$$\mu(x) = e^{\int -\frac{2}{x}dx} = e^{-2\ln|x|} = \left(e^{\ln|x|}\right)^{-2} = |x|^{-2} = \frac{1}{x^2}, \; x \neq 0$$

Тогда дифференциальное уравнение:

$$\frac{x^2 - y^2 + y}{x^2}\,dx + \frac{2y - 1}{x}\,dy = 0$$

– уравнение в полных дифференциалах

Решим дифференциальное уравнение.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{x^2 - y^2 + y}{x^2} \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{2y - 1}{x} \end{cases}$$

$$u(x, y) = \int \frac{2y - 1}{x}\,dy + \varphi(x),$$

$$u(x, y) = \frac{y^2 - y}{x} + \varphi(x) \qquad (*)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y^2 - y}{x^2} + \varphi'(x),$$

Подставим в первое уравнение системы.

$$-\frac{\square^2 - \square}{\square^2} + \square'\,\square = 1 - \frac{\square^2 - \square}{\square^2}$$

$$\square'\,\square = 1$$

$$\square = \square + \square_1$$

$$\square, \square = \frac{\square^2 - \square}{\square} + \square + \square_1$$

$$\frac{\square^2 + \square^2 - \square}{\square} = \square, \square\ \square\ \square -$$

общий интеграл дифференциального уравнения при $\square \neq 0$

Кроме того, непосредственной проверкой убеждаемся, что функция $\square = 0$ является решением исходного дифференциального уравнения.

Ответ: $\frac{\square^2 + \square^2 - \square}{\square} = \square, \square\ \square\ \square;$

$\square = 0.$

Пример4. Решить уравнение:

$$2x \cdot tgydx + (x^2 - 2siny)dy = 0$$

Решение.

$$P(x,y) = 2x \cdot tgy \ , Q(x,y) = x^2 - 2siny \ ,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2x}{cos^2 y} \quad , \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x \ ,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} = \frac{2x \cdot \left(1 - \frac{1}{cos^2 y}\right)}{2x \cdot tgy} = \frac{-2x \cdot tg^2 y}{2x \cdot tgy} - tgy \ \text{ зависит только от } y.$$

$$\mu(y) = e^{\int(-tgy)dy} = e^{ln|cosy|} = cosy$$

$$2x \cdot sinydx + (x^2 cosy - 2cosy \cdot siny)dy = 0 \ -$$

уравнение в полных дифференциалах

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = 2x \cdot siny \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = x^2 cosy - 2cosy \cdot siny \end{cases},$$

$$u(x, y) = \int 2xsinydx + \varphi(y) \quad ,$$

$$u(x, y) = x^2 \cdot siny + \varphi(y) \ , \qquad (*)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 cosy + \varphi'(y) \quad ,$$

$$x^2 cosy + \varphi'(y) = x^2 cosy - 2cosy \cdot siny,$$

$$\varphi'(y) \ = -2cosy \cdot siny \ ,$$

$$\varphi(y) = -\int sin2ydy + C_1 \quad ,$$

$$\varphi(y) = \frac{1}{2} cos2y + C_1 \ ,$$

Возвращаемся в равенство (*)

$$u(x, y) = x^2 \cdot siny + \frac{1}{2} cos2y + C_1$$

- $x^2 \cdot siny + \frac{1}{2}cos2y = \mathrm{C}$ – общий интеграл.

Ответ: $x^2 \cdot siny + \frac{1}{2}cos2y = \mathrm{C}$

Интегрирующий множитель вида $\mu = \mu(x + y)$

[illegible] $-$ [illegible] $=$ [illegible] $-$ [illegible], (9)

Обозначим [illegible] $=$ [illegible] $+$ [illegible], [illegible] $=$ [illegible]([illegible]), тогда по правилу вычисления частных производных сложной функции получаем:

[illegible] $=$ [illegible] $=$ [illegible],

[illegible] $=$ [illegible] $=$ [illegible],

Следовательно

[illegible] $=$ [illegible],

[illegible] $=$ [illegible],

[illegible] $=$ [illegible],

[illegible] $=$ [illegible], где [illegible] $=$ [illegible] $+$ [illegible]

Теорема. Пусть функции $P(x,y)$и $Q(x,y)$ в некоторой области D удовлетворяют условиям:

1. $P(x,y), Q(x,y), \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ – непрерывны;
2. $P(x,y) - Q(x,y) \neq 0$;
3. выражение $\frac{\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)}{Q(x,y) - P(x,y)} = n(t)$ является функцией только переменной $t = x + y$.

Тогда дифференциальное уравнение(6) имеет интегрирующий множитель $\mu = \mu(x+y)$, вычисляемый по формуле:

$$\mu(x+y) = e^{\int n(t)dt} \quad , \quad t = x + y$$

Аналогично могут быть найдены достаточные условия существования у уравнения (6) интегрирующих множителей вида:

$$\mu(x-y), \mu(x \cdot y), \mu(x^2 \mp y^2), \mu(x^m \mp y^m).$$

Пример. Найти интегрирующий множитель уравнения:

$$\frac{2\square}{\square+\square}\square+\square-\square=0$$

Решение.

$$\square,\ \square=\frac{2\square}{\square+\square},\quad \frac{\square}{\square}=\frac{2\square+\square-2\square}{(\square+\square)^2}=\frac{2\square^2}{(\square+\square)^2}$$

$$\square,\ \square=\square-\square,\qquad \frac{\square}{\square}=1$$

$$\frac{\frac{\square}{\square}-\frac{\square}{\square}}{\square-\square}=\frac{\frac{2\square^2}{(\square+\square)^2}-1}{\square-\square-\frac{2\square}{\square+\square}}=\frac{2\square^2-\square^2-2\square-\square^2}{(\square^2-\square^2-2\square)(\square+\square)}=\frac{1}{\square+\square},$$

$$n\square=\frac{1}{\square}\text{, где }\square=\square+\square$$

$$\square=\square^{\int\frac{1}{\square}\square}=\square$$

$$\boxed{\square=\square+\square}$$

- $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$ – уравнение в полных дифференциалах.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

УСПЕХОВ!