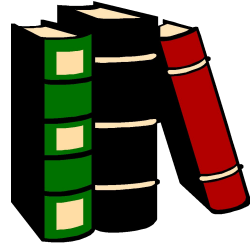




КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ РХТУ имени Д. И. Менделеева



Дифференциальные уравнения

Лекция № 3

Уравнения в полных дифференциалах.
Интегрирующие множители вида $\mu(x)$ и $\mu(y)$.
Решение дифференциальных уравнений,
допускающих интегрирующий множитель



Уравнения в полных дифференциалах

Пусть $z = z(x, y)$, тогда

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$$

– полный дифференциал функции двух переменных $z = z(x, y)$.

Определение 1. Дифференциальное уравнение 1-го порядка

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0 \quad (1)$$

называется уравнением в полных дифференциалах,

если левая часть этого уравнения является

полным дифференциалом некоторой функции $z = z(x, y)$

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = dz \quad (2)$$

Тогда (1) уравнение принимает вид: $dz = 0$

и $z = C$ – общий интеграл уравнения (1)

■ Геометрически общий интеграл $u(x, y) = C$
представляет собой семейство линий уровня
поверхности $u = u(x, y)$

Теорема. Пусть функции $u(x, y)$, $v(x, y)$, $u_x(x, y)$, $v_x(x, y)$ и их частные

производные $\frac{u_{xx}(x, y)}{u_x(x, y)}$, $\frac{u_{yy}(x, y)}{u_y(x, y)}$ определены и непрерывны

в некоторой односвязной области $D \subset \mathbb{R}^2$. Тогда для того,

чтобы дифференциальное уравнение $u_x(x, y) v_x(x, y) + u_y(x, y) v_y(x, y) = 0$

было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и

достаточно, чтобы выполнялось тождество:

$$\frac{u_{xx}(x, y) v_x(x, y)}{u_x(x, y)} = \frac{u_{yy}(x, y) v_y(x, y)}{u_y(x, y)}. \quad (3)$$

Алгоритм построения функции $u(x, y)$

■ 1 способ

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) \quad \forall (x, y) \in D,$$

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = du(x, y)$$

1. Составить систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = P(x, y) \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = Q(x, y) \end{cases} \quad (4)$$

2. Проинтегрировать по x первое уравнение системы:

$$u(x, y) = \int P(x, y) dx + \varphi(y), \quad (5)$$

3. Подставить функцию (5) во второе уравнение системы (4). Найти $\varphi(y)$.

4. Подставить функцию $\varphi(y)$ в формулу (5). В результате будет найдена функция $u(x, y)$.

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\int P(x,y) dx \right) + \varphi'(y) = Q(x,y),$$

следовательно, $\varphi'(y) = Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\int P(x,y) dx \right),$

покажем, что $\frac{\partial}{\partial x} \left(Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\int P(x,y) dx \right) \right) = 0,$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial}{\partial y} \left(\int P(x,y) dx \right) \right) &= \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\int P(x,y) dx \right) \right) = \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) &= 0, \quad \forall (x,y) \in D \end{aligned}$$

Значит, $\varphi'(y)$ зависит только от y , тогда

$$\varphi(y) = \int \left(Q(x,y) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\int P(x,y) dx \right) \right) dy + C,$$

Пример 1. Решить уравнение:

$$(\sin x + 3x^2 y^2) dx + 2(1 + x^3 y) dy = 0.$$

Решение. В данном примере

$$P(x; y) = \sin x + 3x^2 y^2$$

$$Q(x; y) = 2(1 + x^3 y),$$

откуда получим:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial y} = 6x^2 y \\ \frac{\partial Q}{\partial x} = 6x^2 y \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

$$du = (\sin x + 3x^2 y^2) dx + 2(1 + x^3 y) dy.$$

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \sin x + 3x^2 y^2 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2(1 + x^3 y). \end{cases}$$

Проинтегрируем по x первое уравнение, считая y постоянным:

$$u(x; y) = \int (\sin x + 3x^2 y^2) dx = -\cos x + x^3 y^2 + \varphi(y).$$

$$f(x, y) = -\frac{1}{2}x^2y^2 + x^3y^2 + f(x, y). \quad (*)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x^2y^2 + x' \cdot xy^2$$

$$2x^2y^2 + x' \cdot xy^2 = 2 + 2x^2y^2,$$

$$x' \cdot xy^2 = 2,$$

$$f(x, y) = \int 2x^2y^2 dx = 2xy^2 + c_1,$$

где c_1 – произвольная постоянная.

Подставим $\varphi(y)$ в равенство (*):

$$f(x, y) = -\frac{1}{2}x^2y^2 + x^3y^2 + 2xy^2 + c_1.$$

Таким образом, общим интегралом данного уравнения будет:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= c, \\ -\frac{1}{2}x^2y^2 + x^3y^2 + 2xy^2 &= c \end{aligned}$$

Ответ: $-\frac{1}{2}x^2y^2 + x^3y^2 + 2xy^2 = c.$

■ **Пример2.** Найти решение задачи Коши:

$$2x(1 + \sqrt{x^2 - y}) = \sqrt{x^2 - y} \cdot y', \quad y(1) = 0$$

Решение.

$$2x(1 + \sqrt{x^2 - y})dx - \sqrt{x^2 - y}dy = 0,$$

Обозначим: $P(x, y) = 2x(1 + \sqrt{x^2 - y})$, $Q(x, y) = -\sqrt{x^2 - y}$.

Вычислим:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 - y}}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 - y}},$$
$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

Следовательно, уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2x(1 + \sqrt{x^2 - y}) \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\sqrt{x^2 - y} \end{cases}$$

$$u(x, y) = \int 2x(1 + \sqrt{x^2 - y}) dx = 2 \int x dx + \int \sqrt{x^2 - y} 2x dx = \left[\begin{array}{l} x^2 - y = t \\ 2x dx = dt \end{array} \right] =$$

$$x^2 + \int t^{\frac{1}{2}} dt = x^2 + \frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3} + \varphi(y) = x^2 + \frac{2}{3} \cdot \sqrt{(x^2 - y)^3} + \varphi(y),$$

$$u(x, y) = x^2 + \frac{2}{3} \cdot \sqrt{(x^2 - y)^3} + \varphi(y), \quad (*)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\sqrt{x^2 - y} + \varphi'(y), \text{ подставим во 2 уравнение системы.}$$

$$-\sqrt{x^2 - y} + \varphi'(y) = -\sqrt{x^2 - y},$$

$$\varphi'(y) = 0, \varphi(y) = C_1$$

$$u(x, y) = x^2 + \frac{2}{3} \cdot \sqrt{(x^2 - y)^3} + C_1,$$

■ $x^2 + \frac{2}{3} \cdot \sqrt{(x^2 - y)^3} = C$ – общий интеграл.

Подберем C так, чтобы выполнялось начальное условие $y(1) = 0$:

$$1 + \frac{2}{3} \cdot \sqrt{(1 - 0)^3} = C,$$
$$C = \frac{5}{3},$$

следовательно, искомое решение задачи Коши:

$$x^2 + \frac{2}{3} \cdot \sqrt{(x^2 - y)^3} = \frac{5}{3},$$

или

$$3x^2 + 2 \cdot \sqrt{(x^2 - y)^3} = 5.$$

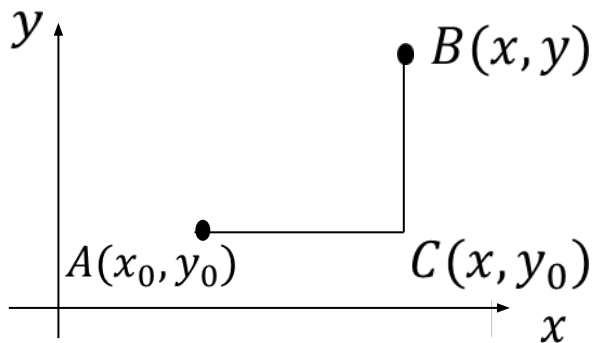
Ответ: $3x^2 + 2 \cdot \sqrt{(x^2 - y)^3} = 5.$

■ 2 способ

Функцию $u(x, y)$ находят с помощью криволинейного интеграла:

$$u(x, y) = \int_{(AB)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy ,$$

который не зависит от пути интегрирования, соединяющего любую фиксированную точку $A(x_0; y_0) \in D$ и точку текущую $B(x; y) \in D$



$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y)dy$$

Пример2. Решить уравнение:

$$(x + y^2x + \sin x)dx + (x^2y - y^3 + 3)dy = 0$$

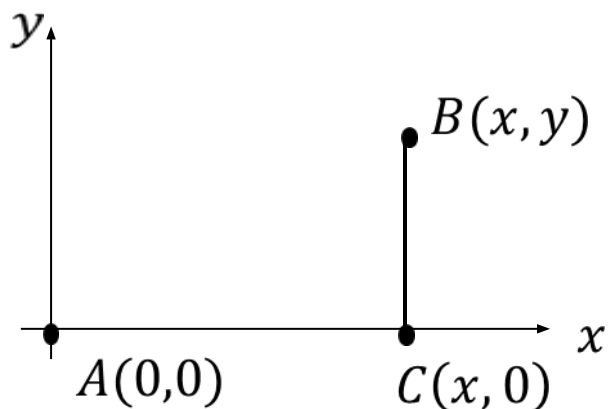
Решение.

$$P(x, y) = x + y^2x + \sin x, \quad Q(x, y) = x^2y - y^3 + 3,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2xy = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2xy \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Для поиска функции $u(x, y)$ воспользуемся вторым способом

В качестве точки $A(x_0, y_0)$ начало координат.



Тогда по формуле: $u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy$

$$u(x, y) = \int_0^x (x + \sin x)dx + \int_0^y (x^2 y - y^3 + 3)dy = \left(\frac{x^2}{2} - \cos x \right) \Big|_0^x + \left(\frac{x^2 y^2}{2} - \frac{y^4}{4} + 3y \right) \Big|_0^y = \frac{x^2}{2} - \cos x + 1 + \frac{x^2 y^2}{2} - \frac{y^4}{4} + 3y.$$

Следовательно, общее решение уравнения имеет вид:

$$\frac{x^2}{2} - \cos x + \frac{x^2 y^2}{2} - \frac{y^4}{4} + 3y = C, C \in \mathbb{R}$$

Ответ: $\frac{x^2}{2} - \cos x + \frac{x^2 y^2}{2} - \frac{y^4}{4} + 3y = C$

Интегрирующий множитель

Пусть дифференциальное уравнение

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0 \quad (6)$$

не является уравнением в полных дифференциалах, т.е.

$$\frac{\partial N}{\partial x} \neq \frac{\partial M}{\partial y} \quad \text{или} \quad \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \right) \neq 0.$$

Определение 3. Функция $\mu = \mu(x, y)$ называется

интегрирующим множителем для дифференциального

уравнения (6), если после умножения на неё

дифференциального уравнения (6)

получается уравнение

$$\mu M(x, y) dx + \mu N(x, y) dy = 0 \quad (7)$$

являющееся уравнением в полных дифференциалах.

Если u, v – непрерывно дифференцируемая функция в области D , то она удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных:

$$\frac{u_x v - u v_x}{u^2 + v^2} = \frac{u_x v - u v_x}{u^2 + v^2},$$

$$\frac{u_x v + u v_x}{u^2 + v^2} = \frac{u_x v + u v_x}{u^2 + v^2},$$

$$u \frac{v_x}{u^2 + v^2} - v \frac{u_x}{u^2 + v^2} = \frac{u v_x}{u^2 + v^2} - \frac{v u_x}{u^2 + v^2},$$

$$u \frac{v_{xx} - v_{yy}}{u^2 + v^2} - v \frac{u_{xx} - u_{yy}}{u^2 + v^2} = \frac{u v_{xx} - v u_{xx}}{u^2 + v^2} - \frac{u v_{yy} - v u_{yy}}{u^2 + v^2}$$

Интегрирующий множитель вида $\mu = \mu(x)$

$$Q \frac{d \ln |\mu|}{dx} = \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x},$$

$$\mu \left(\ln |\mu| \right)' = \frac{\frac{\mu}{\mu} - \frac{\mu}{\mu}}{\mu} \mu \quad (8)$$

$$\frac{\frac{\mu}{\mu} - \frac{\mu}{\mu}}{\mu} = \mu'(\mu),$$

$$\ln |\mu| = \int \mu'(\mu) dx,$$

$$\mu \mu' = \pm \mu^{\pm 1} \mu'(\mu),$$

$$\mu \mu' = \mu^{\pm 1} \mu'(\mu).$$

Интегрирующий множитель вида $\mu = \mu(y)$

$$P \frac{dy}{dx} - Q \frac{dx}{dy} = P \frac{dy}{dx} - \frac{dx}{dy} Q,$$

$$- \frac{dx}{dy} Q = P \frac{dy}{dx} - \frac{dx}{dy} Q,$$

$$- \frac{dx}{dy} Q = \frac{dy}{dx} P - \frac{dx}{dy} Q,$$

$$\frac{d}{dy} (\ln |a|) = \frac{\frac{dy}{dx} P - \frac{dx}{dy} Q}{P},$$

$$\frac{\frac{dy}{dx} P - \frac{dx}{dy} Q}{P} = \mu(y),$$

$$\ln |a| = \int \mu(y) dy,$$

$$|a| = e^{\int \mu(y) dy}.$$

Теорема. Пусть дифференциальное уравнение

$$P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0 \quad (6)$$

не является уравнением в полных дифференциалах, причём

$P(x, y)$, $Q(x, y)$, $\frac{P(x, y) - Q'(x, y)}{Q(x, y)}$, $\frac{Q(x, y) - P'(x, y)}{P(x, y)}$ непрерывны в некоторой области D

Тогда справедливы следующие утверждения.

I. Если $\frac{P(x, y) - Q'(x, y)}{Q(x, y)} = f(x)$ – функция, зависящая только от x

и $Q(x, y) \neq 0$ в области D , то

$f(x) = \frac{d}{dx} \ln \mu(x)$ – интегрирующий множитель уравнения (6)



от одной переменной x

II. Если $\frac{Q(x, y) - P'(x, y)}{P(x, y)} = g(y)$ – функция, зависящая только от y и

$P(x, y) \neq 0$ в области D , то

$g(y) = \frac{d}{dy} \ln \mu(y)$ – интегрирующий множитель уравнения (6)

от одной переменной y



Замечание. Умножение на функцию $\mu(x, y)$ и интегрирования вместо уравнения (6) уравнения (7) может привести к потере решений, обращающих $\mu(x, y)$ в ноль.

Пример 3.

Решить дифференциальное уравнение:

$$x^2 y' - y^2 + xy = 1 - 2xy$$

Решение:

$$x^2 y' - y^2 + xy - 1 - 2xy = 0,$$

или:

$$x^2 y' - y^2 + xy + 2x - 1 = 0.$$

$$x^2 y' = y^2 - xy - 2x + 1, \quad x^2 y' = 2x - 1.$$

$$\frac{x^2 y'}{x^2} = \frac{y^2 - xy - 2x + 1}{x^2} = 1 - 2\frac{y}{x} - \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{x^2 y'}{x^2} = \frac{2x - 1}{x^2} = 2\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \quad \frac{y^2 - xy - 2x + 1}{x^2} \neq \frac{2x - 1}{x^2}$$

следовательно, уравнение не является уравнением в полных дифференциалах.

Найдём

$$\frac{x^2 y'}{x^2} - \frac{y^2 - xy - 2x + 1}{x^2} = \frac{1 - 2\frac{y}{x} - 2\frac{1}{x} - 1}{x^2} = \frac{-2\frac{2}{x} - 1}{x^2} = -\frac{2}{x} = \frac{d}{dx} \left(-\frac{2}{x} \right).$$

$$\frac{d}{dx} \left(-\frac{2}{x} \right) = -\frac{2}{x^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{x} \right), \quad x \neq 0$$

Тогда дифференциальное уравнение:

$$\frac{x^2 - y^2 + x}{x^2} dx + \frac{2x - 1}{x} dy = 0$$

– уравнение в полных дифференциалах

Решим дифференциальное уравнение.

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x^2 - y^2 + x}{x^2}$$

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2x - 1}{x}$$

$$x^2 dx, dy = \frac{2x - 1}{x} dx + x^2 dx,$$

$$x^2 dx, dy = \frac{x^2 - x}{x} + x^2 dx \quad (*)$$

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{x^2 - x}{x^2} + x^2 dx,$$

Подставим в первое уравнение системы.

$$-\frac{x^2 - y}{x^2} + x'xy = 1 - \frac{x^2 - y}{x^2}$$

$$x'xy = 1$$

$$xyx' = x + y$$

$$xyx', xy = \frac{x^2 - y}{x} + x + y$$

$$\frac{x^2 + x^2 - y}{x} = x, xyx' -$$

общий интеграл дифференциального уравнения при $x \neq 0$

Кроме того, непосредственной проверкой убеждаемся, что функция $y = 0$ является решением исходного дифференциального уравнения.

Ответ: $\frac{x^2 + x^2 - y}{x} = x, xyx' -$
 $y = 0.$

■ **Пример 4.** Решить уравнение:

$$2x \cdot \operatorname{tg} y dx + (x^2 - 2\sin y) dy = 0$$

Решение.

$$P(x, y) = 2x \cdot \operatorname{tg} y, \quad Q(x, y) = x^2 - 2\sin y,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2x}{\cos^2 y}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x,$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\frac{\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}}{P} = \frac{2x \cdot \left(1 - \frac{1}{\cos^2 y}\right)}{2x \cdot \operatorname{tg} y} = \frac{-2x \cdot \operatorname{tg}^2 y}{2x \cdot \operatorname{tg} y} = -\operatorname{tg} y \quad \text{зависит только от } y.$$

$$\mu(y) = e^{\int (-\operatorname{tg} y) dy} = e^{\ln |\cos y|} = \cos y$$

$$2x \cdot \sin y dx + (x^2 \cos y - 2\cos y \cdot \sin y) dy = 0 \quad -$$

уравнение в полных дифференциалах

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2x \cdot \sin y \\ \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 \cos y - 2 \cos y \cdot \sin y \end{cases},$$

$$u(x, y) = \int 2x \sin y dx + \varphi(y),$$

$$u(x, y) = x^2 \cdot \sin y + \varphi(y), \quad (*)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 \cos y + \varphi'(y),$$

$$x^2 \cos y + \varphi'(y) = x^2 \cos y - 2 \cos y \cdot \sin y,$$

$$\varphi'(y) = -2 \cos y \cdot \sin y,$$

$$\varphi(y) = - \int \sin 2y dy + C_1,$$

$$\varphi(y) = \frac{1}{2} \cos 2y + C_1,$$

Возвращаемся в равенство (*)

$$u(x, y) = x^2 \cdot \sin y + \frac{1}{2} \cos 2y + C_1$$

■ $x^2 \cdot \sin y + \frac{1}{2} \cos 2y = C$ – общий интеграл.

Ответ: $x^2 \cdot \sin y + \frac{1}{2} \cos 2y = C$

Интегрирующий множитель вида $\mu = \mu(x + y)$

$$\frac{\partial \mu(x+y)}{\partial x} - \frac{\partial \mu(x+y)}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{\partial \mu}{\partial y}, \quad (9)$$

Обозначим $u = x + y$, $v = x - y$, тогда по правилу вычисления частных производных сложной функции получаем:

$$\frac{\partial \mu(x+y)}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial u} + \frac{\partial \mu}{\partial v},$$

$$\frac{\partial \mu(x+y)}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial \mu}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial u} - \frac{\partial \mu}{\partial v},$$

Следовательно

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial u} + \frac{\partial \mu}{\partial v} - \left(\frac{\partial \mu}{\partial u} - \frac{\partial \mu}{\partial v} \right) = 2 \frac{\partial \mu}{\partial v},$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial v} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{\partial \mu}{\partial y} \right),$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial v} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{\partial \mu}{\partial y} \right),$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial v} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{\partial \mu}{\partial y} \right), \quad \text{где } u = x + y$$

Теорема. Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ в некоторой области D удовлетворяют условиям:

1. $P(x, y), Q(x, y), \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ — непрерывны;
2. $P(x, y) - Q(x, y) \neq 0$;
3. выражение $\frac{\frac{\partial P}{\partial y}(x, y) - \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y)}{Q(x, y) - P(x, y)} = n(t)$ является функцией только переменной $t = x + y$.

Тогда дифференциальное уравнение(6) имеет интегрирующий множитель $\mu = \mu(x + y)$, вычисляемый по формуле:

$$\mu(x + y) = e^{\int n(t) dt}, \quad t = x + y$$

Аналогично могут быть найдены достаточные условия существования у уравнения (6) интегрирующих множителей вида:

$$\mu(x - y), \mu(x \cdot y), \mu(x^2 \mp y^2), \mu(x^m \mp y^m).$$

Пример. Найти интегрирующий множитель уравнения:

$$\frac{2xy}{x+y} dx + xy - x^2 dy = 0$$

Решение.

$$x^2 dx, xy = \frac{2xy}{x+y}, \quad \frac{xy}{xy} = \frac{2xy dx + xy - 2xy dy}{(x+y)^2} = \frac{2x^2}{(x+y)^2}$$

$$x^2 dy, xy = x - y, \quad \frac{xy}{xy} = 1$$

$$\frac{\frac{xy}{xy} - \frac{xy}{xy}}{x - y} = \frac{\frac{2x^2}{(x+y)^2} - 1}{x - y - \frac{2xy}{x+y}} = \frac{2x^2 - x^2 - 2xy - y^2}{(x^2 - x^2 - 2xy)(x+y)} = \frac{1}{x+y}$$

$$n_{xy} = \frac{1}{x}, \text{ где } x = x + y$$

$$x^2 dx = x^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x^{\frac{1}{x}}} = x$$

$$x = x + y$$

■ $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$ – уравнение в полных дифференциалах.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

УСПЕХОВ!