

**Геометрический и  
физический смысл  
производной. Производные  
высших порядков**



## **Геометрический смысл производной**

заключается в том, что её значение в рассматриваемой точке равняется угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику дифференцируемой функции в этой точке.

- Пусть даны функция  $y = f(x)$  и точка  $M(x_0; f(x_0))$  на графике этой функции. Пусть известно, что при  $x = x_0$  существует производная этой функции  $f'(x_0)$ .

Тогда

**уравнение касательной в точке с абсциссой  $x_0$  имеет вид:**

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

# ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

$y = f(x)$  - заданная функция

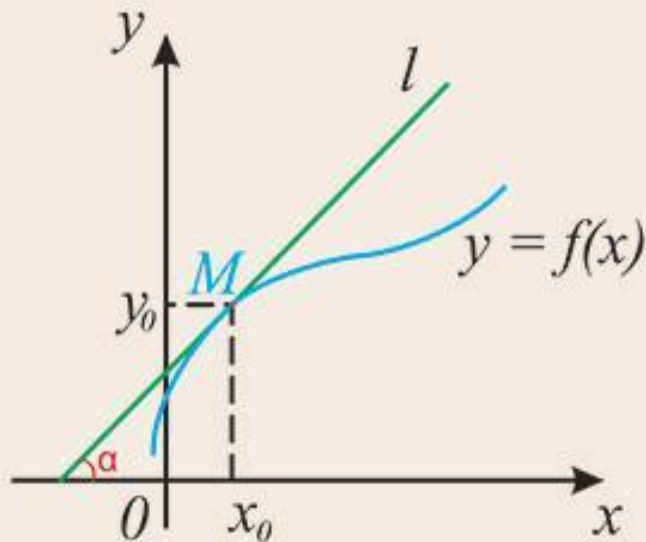
$l$  - касательная,  $n$  - нормаль,  $l \perp n$

$M(x_0; y_0)$  - точка касания

$\alpha$  - угол наклона касательной

$$k = \operatorname{tg} \alpha \Leftrightarrow \alpha = \operatorname{arctg} k$$

$k = f'(x_0)$  - угловой коэффициент касательной



$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  -  
уравнение касательной

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) -$$

уравнение нормали

## **Физический смысл производной**

заключается в том, что производная выражает скорость протекания процесса, описываемого зависимостью  $y = f(x)$ .

# Физический смысл производной

Понятие производной широко используется в современной физике. Приведем несколько примеров.

- ❖ **Скорость** :  $V(t) = S'(t)$  – первая производная от перемещения по времени;
- ❖ **Ускорение** :  $a(t) = V'(t)$  – первая производная от скорости по времени (вторая - от перемещения по времени);
- ❖ **Сила тока** :  $I(t) = q'(t)$  – первая производная от заряда по времени;
- ❖ **Мощность** :  $N(t) = A'(t)$  – первая производная от работы по времени;

Производная  $y' = f'(x)$  функции  $y = f(x)$  есть также функция от  $x$  и называется *производной первого порядка*.

Если функция  $f'(x)$  дифференцируема, то ее производная называется *производной второго порядка* и обозначается  $y''$ .

$$\text{Итак, } y'' = (y')'.$$

Производная от производной второго порядка, если она существует, называется *производной третьего порядка* и обозначается  $y'''$ .

$$\text{Итак, } y''' = (y'')'.$$

Производной  $n$ -го порядка (или  $n$ -й производной) называется производная от производной  $(n - 1)$  порядка:

$$y^{(n)} = (y^{(n-1)})'.$$

№1. Составьте уравнение касательной и нормали к графику функции

$$y = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1$$

в точке с абсциссой  $x_0=3$ .

№2. Материальная точка движется прямолинейно по закону  $x(t) = t^2 - 13t + 23$ ,

где  $x$  - расстояние от точки отсчета в метрах,

$t$  - время в секундах, измеренное с начала движения.

В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 3 м/с?



№3. Найдите производную указанного  
порядка

$$f(x) = e^x \cdot \cos x \quad f'''(x)$$

Задание 1. Вычислить производные первого и второго порядка для данных функций:

$$f(x) = 3x^2 - x^4 + 3\cos x - 2\sin x + 2x + 5$$

$$f'(x) =$$

$$f''(x) =$$

№4. Найдите ВСЕ отличные от нуля производные данной функции в указанной точке.

$$f(x) = 5x^3 - 4x^2 - 3x + 2 \quad x_0 = -2$$

$$f'(x) = (5x^3 - 4x^2 - 3x + 2)' = 5 \cdot 3x^2 - 4 \cdot 2x - 3 \cdot 1 + 0 = 15x^2 - 8x - 3$$

$$f'(x_0 = -2) = 15 \cdot (-2)^2 - 8 \cdot (-2) - 3 = 60 + 16 - 3 = 73$$

$$f''(x) = 30x - 8 \quad f''(x_0 = -2) = 30 \cdot (-2) - 8 = -68$$

$$f'''(x) = (30x - 8)' = 30 \cdot 1 - 0 = 30 \quad f'''(x_0 = -2) = 30$$

$$f^{(IV)}(x) = (30)' = 0$$

**Спасибо за урок!**

