Геометрический и физический смысл производной. Производные высших порядков

Геометрический смысл производной *заключается в том, что её значение в рассматриваемой точке равняется угловому коэффициенту касательной, проведенной к графику дифференцируемой функции в этой точке.*

- *Пусть даны функция $y = f(x)$ и точка $M(\ x_0;\ f(x_0)\ )$ на графике этой функции. Пусть известно, что при $x = x_0$ существует производная этой функции $f\,'(x_0)$. Тогда*
  уравнение касательной в точке с абсциссой x_0 *имеет вид:*

$$y = f\,'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$$

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПРОИЗВОДНОЙ

$y = f(x)$ - *заданная функция*

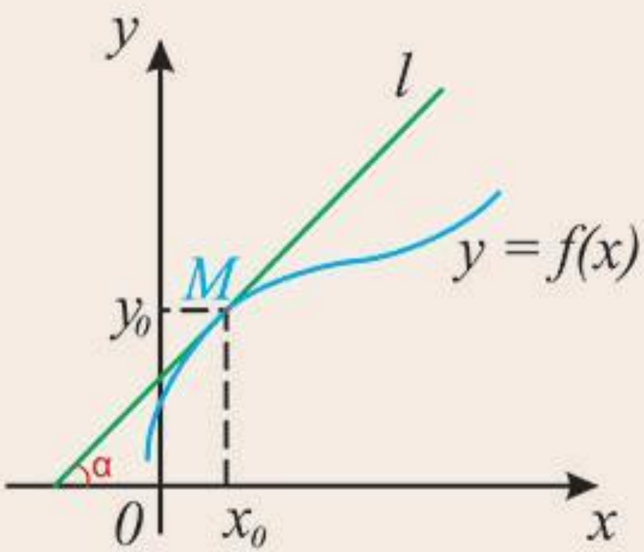
l - *касательная*, n - *нормаль*, $l \perp n$

$M\,(x_0;y_0)$ - *точка касания*

α - *угол наклона касательной*

$k = tg\,\alpha \Rightarrow \alpha = arctg\,k$

$k = f'(x_0)$ - *угловой коэффициент касательной*



$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$ -

уравнение касательной

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$ -

уравнение нормали

Физический смысл производной *заключается в том, что производная выражает скорость протекания процесса, описываемого зависимостью* $y = f(x)$.

Физический смысл производной

Понятие производной широко используется в современной физике. Приведем несколько примеров.

- **Скорость** : $V(t) = S^{/}(t)$ – первая производная от перемещения по времени;

- **Ускорение** : $a(t) = V^{/}(t)$ – первая производная от скорости по времени (вторая - от перемещения по времени);

- **Сила тока** : $I(t) = q^{/}(t)$ – первая производная от заряда по времени;

- **Мощность** : $N(t) = A^{/}(t)$ – первая производная от работы по времени;

Производная $y' = f'(x)$ функции $y = f(x)$ есть также функция от x и называется *производной первого порядка.*

Если функция $f'(x)$ дифференцируема, то ее производная называется *производной второго порядка* и обозначается y''.

Итак, $y'' = (y')'$.

Производная от производной второго порядка, если она существует, называется *производной третьего порядка* и обозначается y'''

Итак, $y''' = (y'')'$.

Производной n-го порядка (или n-й производной) называется производная от производной $(n-1)$ порядка:

$$\boxed{y^{(n)} = (y^{(n-1)})'.}$$

№1. Составьте уравнение касательной и нормали к графику функции

$$y = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1$$

в точке с абсциссой x_0=3.

№2. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = t^2 - 13t + 23$,

где x - расстояние от точки отсчета в метрах,

t - время в секундах, измеренное с начала движения.

В какой момент времени (в секундах) ее скорость была равна 3 м/с?

№3. Найдите производную указанного порядка

$$f(x) = e^x \cdot \cos x \qquad f'''(x)$$

Задание 1. Вычислить производные первого и второго порядка для данных функций:

$$f(x) = 3x^2 - x^4 + 3\cos x - 2\sin x + 2x + 5$$

$f'(x) =$

$f''(x) =$

№4. Найдите ВСЕ отличные от нуля производные данной функции в указанной точке.

$$f(x)=5x^3-4x^2-3x+2 \qquad x_0=-2$$

$$f'(x)=(5x^3-4x^2-3x+2)'=5\cdot 3x^2-4\cdot 2x-3\cdot 1+0=15x^2-8x-3$$

$$f'(x_0=-2)=15\cdot(-2)^2-8\cdot(-2)-3=60+16-3=73$$

$$f''(x)=30x-8 \qquad f''(x_0=-2)=30\cdot(-2)-8=-68$$

$$f'''(x)=(30x-8)'=30\cdot 1-0=30 \qquad f'''(x_0=-2)=30$$

$$f^{(IV)}(x)=(30)'=0$$

Спасибо за урок!