

Правила интегрирования. Таблица интегралов.

Непосредственное интегрирование

Основные правила интегрирования

1. $\int C \cdot f(x) dx = C \cdot \int f(x) dx$; $C - \text{const}$
2. $\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$
3. $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} \int f(ax+b) d(ax+b) = \frac{1}{a} \int f(ax+b) \left(\frac{da}{dx} + \frac{db}{dx} \right) dx =$
 $= \frac{1}{a} \int f(ax+b) a dx = \frac{a}{a} \int f(ax+b) dx$
4. $\int f(x) \cdot f'(x) dx = \int f'(x) dx = df(x) = \int f(x) d(f(x))$



Таблица основных неопределенных интегралов

$$1. \int dx = x + C ;$$

$$\int \underline{3} dx = 3 \int dx = 3x + C ;$$

$$\int \left(-\frac{1}{2}\right) dx = -\frac{1}{2} \int dx = -\frac{1}{2}x + C ;$$

$$\int \sqrt{7} dx = \sqrt{7} \int dx = \sqrt{7}x + C .$$



Таблица основных неопределенных интегралов

$$2. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; \quad n \neq -1$$

$$\int x^5 dx = |n=5| = \frac{x^{5+1}}{5+1} + C = \frac{x^6}{6} + C; = \frac{1}{6} x^6 + C;$$

$$\int \sqrt{x} dx = |\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}| = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^3} = \left| \frac{1}{x^3} = x^{-3} \right| = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2} x^{-2} + C =$$
$$= \left| x^{-2} = \frac{1}{x^2} \right| = -\frac{1}{2x^2} + C$$



Таблица основных неопределенных интегралов

$$3. \int \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \frac{5dx}{x} = 5 \int \frac{dx}{x} = 5 \ln|x| + C$$

$$4. \int e^x dx = e^x + C$$

$$\int 4e^x dx = 4 \int e^x dx = 4e^x + C$$

$$5. \int a^x dx = \left| \begin{array}{l} a > 0 \\ a \neq 1 \end{array} \right| = \frac{a^x}{\ln|a|} + C$$

$$\int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C$$



Таблица основных неопределенных интегралов

$$6. \int \sin x \, dx = -\cos x + C;$$

$$7. \int \cos x \, dx = \sin x + C;$$

$$8. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C;$$

$$9. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$



Таблица основных неопределенных интегралов

$$10. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - 4} = \left| \begin{array}{l} a^2 = 4 \\ 4 = 2^2 \end{array} \right| = \int \frac{dx}{x^2 - 2^2} = \frac{1}{2 \cdot 2} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - 3} = \left| \begin{array}{l} a^2 = 3 \\ 3 = (\sqrt{3})^2 \end{array} \right| = \int \frac{dx}{x^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{3}} \ln \left| \frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}} \right| + C$$

$\frac{1}{2\sqrt{3}}$



Таблица основных неопределенных интегралов

$$11. \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + 7} = \left| \begin{array}{l} a^2 = 7 \\ 7 = (\sqrt{7})^2 \end{array} \right| = \int \frac{dx}{x^2 + (\sqrt{7})^2} = \frac{1}{\sqrt{7}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{7}} + C$$

$$12. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9 - x^2}} = \left| \begin{array}{l} a^2 = 9 \\ 9 = 3^2 \end{array} \right| = \int \frac{dx}{\sqrt{3^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{3} + C$$



Таблица основных неопределенных интегралов

$$13. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 16}} = \ln |x + \sqrt{x^2 + 16}| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a}| + C$$



Таблица основных неопределенных интегралов

$$14. \int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$$

$$15. \int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} \right) \right| + C$$



Непосредственное интегрирование

$$\int \frac{x^5 + 2x^2 + 3}{x^6} dx = \left| \frac{a \pm b}{c} = \frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} \right| =$$
$$= \int \left(\frac{x^5}{x^6} + \frac{2x^2}{x^6} + \frac{3}{x^6} \right) dx = \int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^4} + \frac{3}{x^6} \right) dx = \left| \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \right| =$$
$$= \int \frac{1}{x} dx + 2 \int \frac{dx}{x^4} + 3 \int \frac{dx}{x^6} = \ln|x| + 2 \int x^{-4} dx + 3 \int x^{-6} dx =$$
$$= \ln|x| + 2 \frac{x^{-4+1}}{-4+1} + 3 \frac{x^{-6+1}}{-6+1} + C =$$
$$= \ln|x| + 2 \frac{x^{-3}}{-3} + 3 \frac{x^{-5}}{-5} + C = \ln|x| - \frac{2}{3x^3} - \frac{3}{5x^5} + C$$



Непосредственное интегрирование

$$\int \frac{x^2 + 1}{x^2 + 9} dx = \int \frac{(x^2 + 9) - 9 + 1}{(x^2 + 9)} dx = \int \left(\frac{\cancel{x^2 + 9}}{\cancel{x^2 + 9}} - \frac{8}{x^2 + 9} \right) dx =$$

$$= \int \left(1 - \frac{8}{x^2 + 3^2} \right) dx = \int dx - \int \frac{8 dx}{x^2 + 3^2} = x - 8 \int \frac{dx}{x^2 + 3^2} \quad \underline{\underline{\text{Т. 11}}}$$

$$= x - 8 \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C = x - \frac{8}{3} \operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C.$$

