

# Задачи небесной механики

## **Задачи небесной механики (4<sup>h</sup>).**

1. Закон всемирного тяготения.
2. Законы Кеплера. Орбиты планет и комет.
3. Понятие о задаче трёх тел.
4. Устойчивость планетной системы.
5. Поверхность и предел Роша.

# Закон всемирного тяготения

Идея всеобщей силы тяготения неоднократно высказывалась и до Ньютона. Ранее о ней размышляли Эпикур, Гассенди, Кеплер, Борелли, Декарт, Роберваль, Гюйгенс и другие.

В своём основном труде «Математические начала натуральной философии» (1687 г.) Исаак Ньютон вывел закон тяготения, основываясь на *эмпирических* законах Кеплера, известных к тому времени. Он показал, что:

- наблюдаемые движения планет свидетельствуют **о наличии центральной силы**;
- центральная сила притяжения приводит к **эллиптическим (или гиперболическим) орбитам**.

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad G \cong 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}$$
$$\vec{F} = -G m_1 m_2 \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad \varphi(r) = -Gm \frac{1}{r}$$

Теория Ньютона оказалась приближением более общей теории относительности, применимым при выполнении двух условий:

1. Гравитационный потенциал в исследуемой системе не слишком велик:

$$\frac{\varphi}{c^2} \ll 1.$$

2. Скорости движения в этой системе незначительны по сравнению со скоростью света:

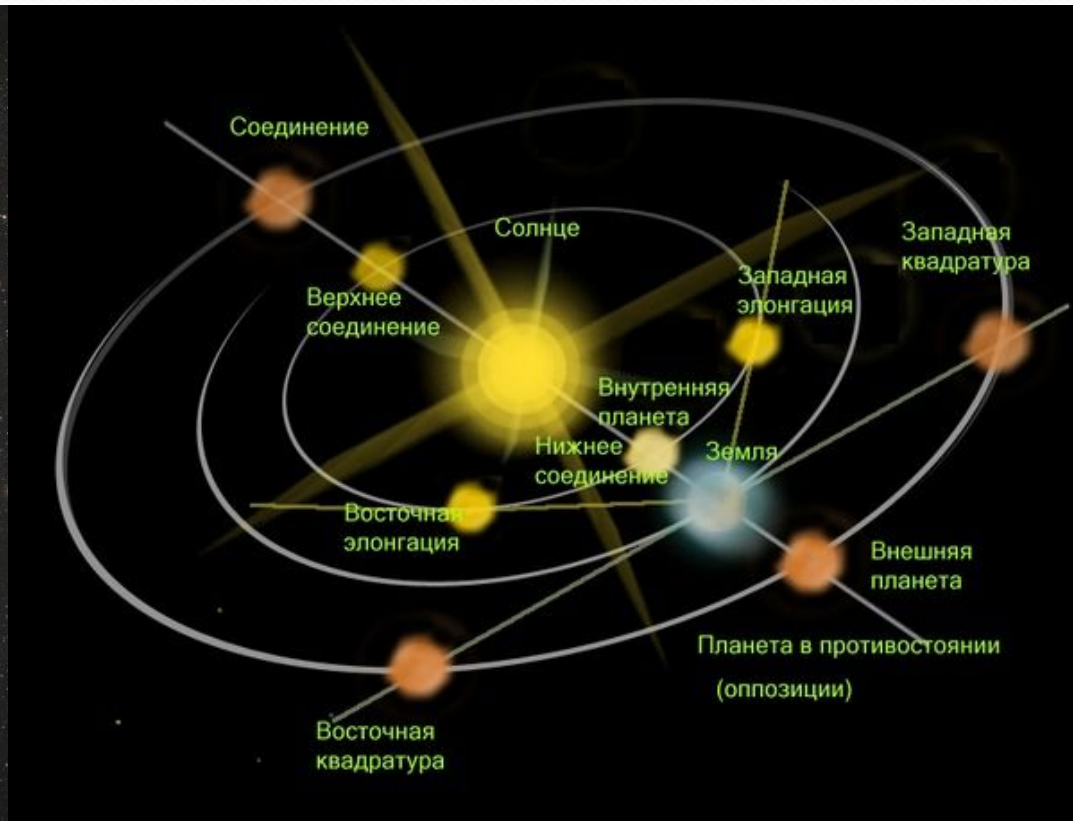
$$\frac{v}{c} \ll 1.$$

# Законы Кеплера. Орбиты планет и комет

# Видимое движение планет



Ретроградное движение Марса



Прямое движение – с запада на восток  
Обратное движение – с востока на запад

## Конфигурация нижних планет

У нижних планет и других небесных тел, чьи орбиты расположены внутри земной орбиты, различают:

1. соединения с Солнцем при которых планета и Солнце имеют одинаковую эклиптическую долготу (или одинаковое прямое восхождение)
  - верхнее соединение (Солнце находится между планетой и Землей)
  - нижнее соединение (планета находится между Солнцем и Землей)
2. наибольшие элонгации, соответствующие наибольшему видимому угловому расстоянию планеты от Солнца:
  - наибольшую восточную элонгацию
  - наибольшую западную элонгацию.

Вблизи верхнего соединения нижние планеты недоступны для наблюдения, так как находятся за Солнцем, скрываясь в его лучах. Непосредственно перед нижним соединением и после него нижние планеты видны в виде узкого серпа. Во время нижнего соединения возможно прохождение Меркурия или Венеры по диску Солнца, однако из-за относительного наклона планетарных орбит фактическое прохождение происходит достаточно редко, обычно при нижнем соединении нижняя планета находится выше или ниже Солнца по эклиптической широте. В элонгациях нижние планеты имеют вид светлого полудиска.

## Конфигурация верхних планет и Луны

У Луны, верхних планет, а также других тел Солнечной системы, чья орбита лежит полностью вне земной орбиты, различают:

1. соединения с Солнцем, при которых планета и Солнце имеют одинаковую эклиптическую долготу (или одинаковое прямое восхождение);
2. противостояния, при которых эклиптические долготы (прямое восхождение) планеты и Солнца отличаются на  $180^\circ$ ;
3. восточные и
4. западные квадратуры.

Вблизи соединений верхние планеты находятся за Солнцем и не видны.



# Клавдий Птолемей. II в. н. э.

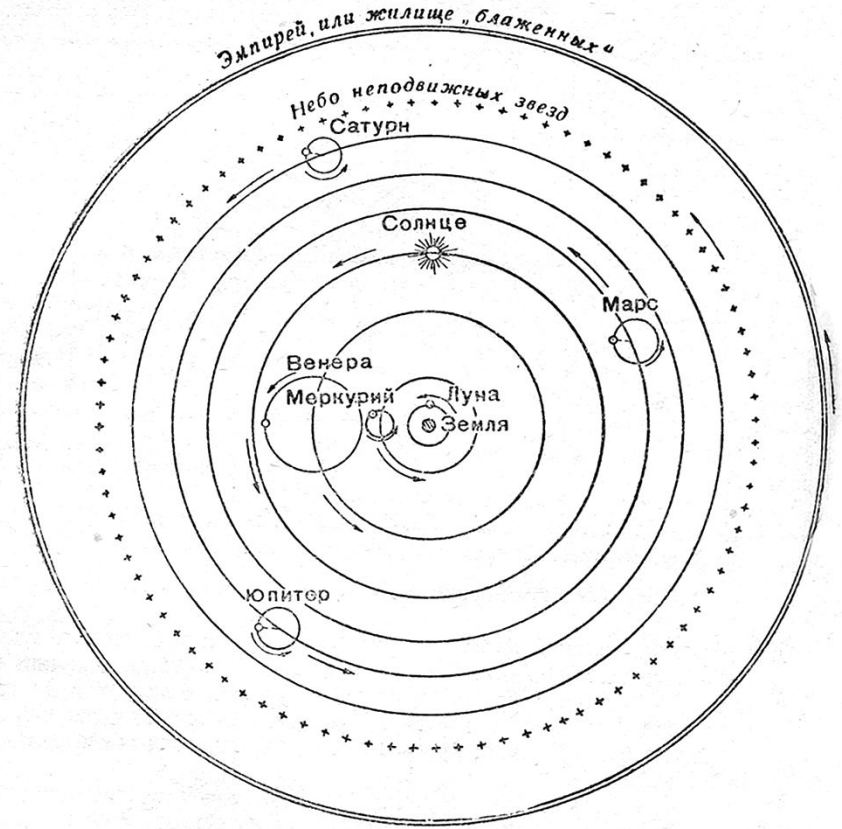
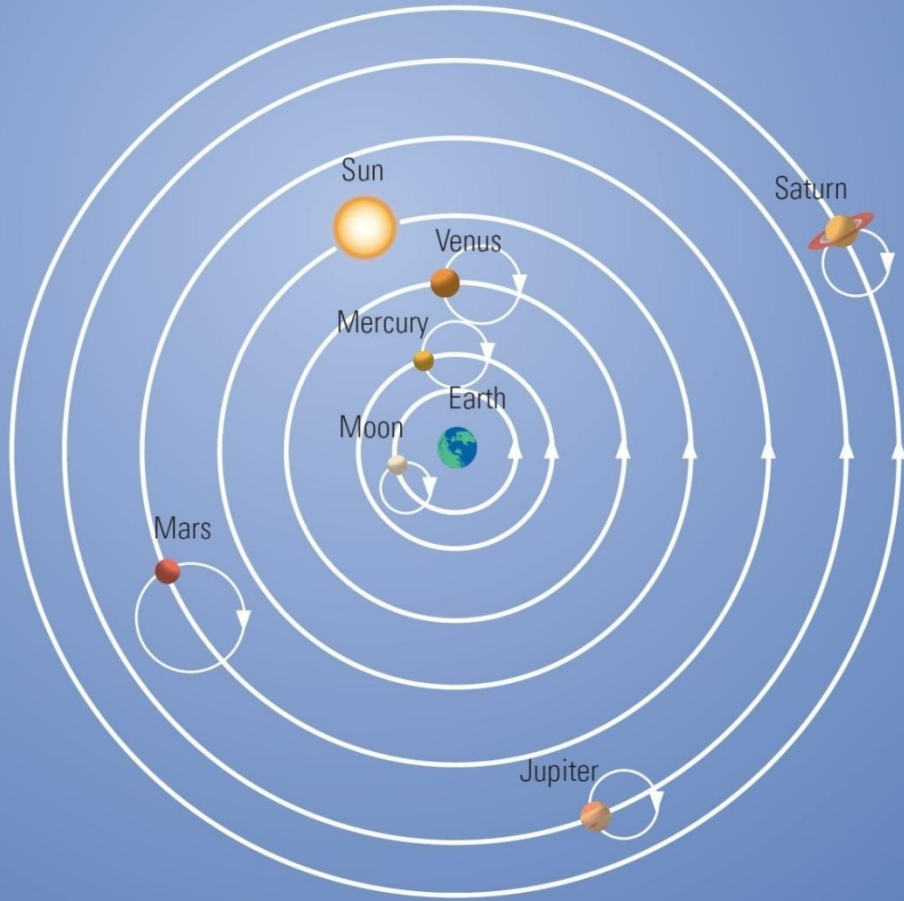
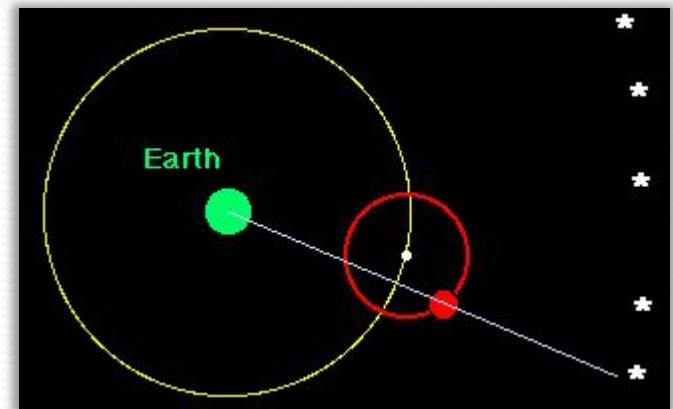
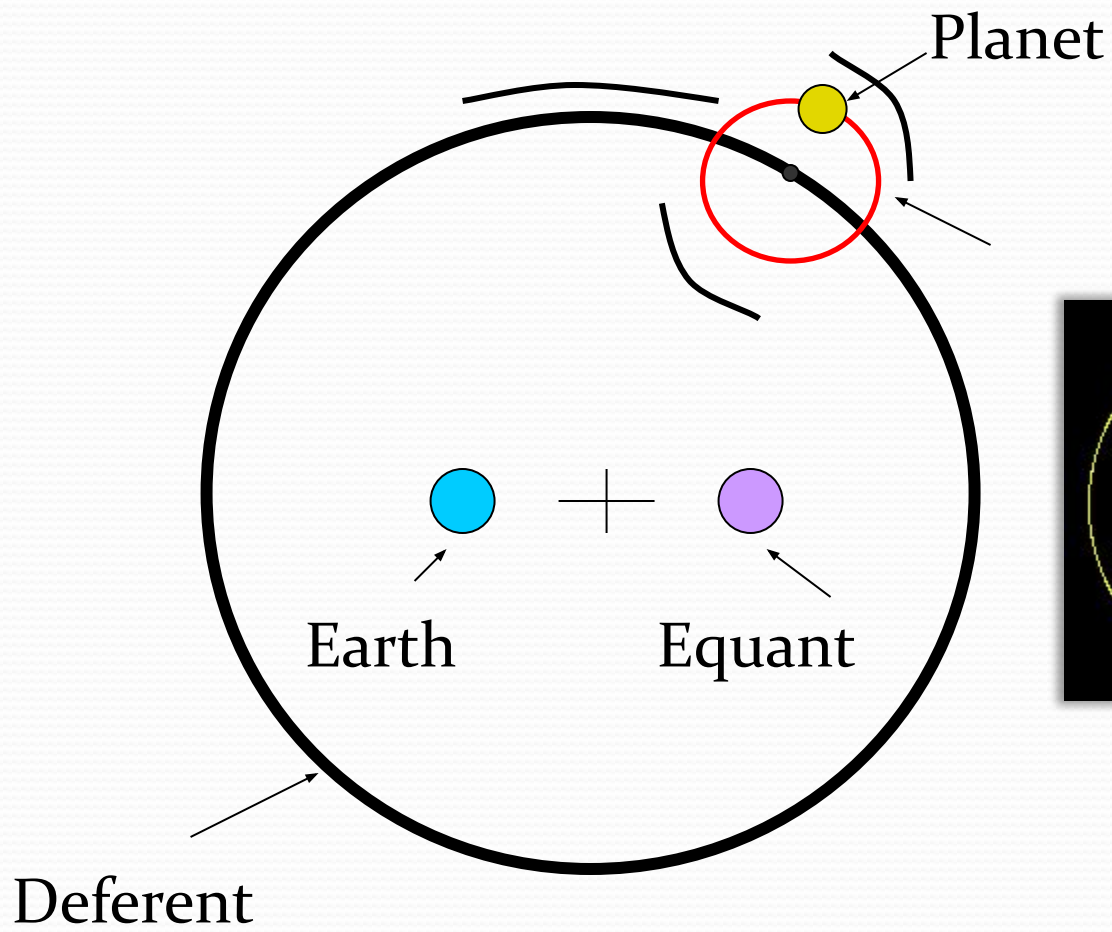


Рис. 75. Птолемева система, преподававшаяся до XVII столетия.



# Николай Коперник (1473 – 1543)

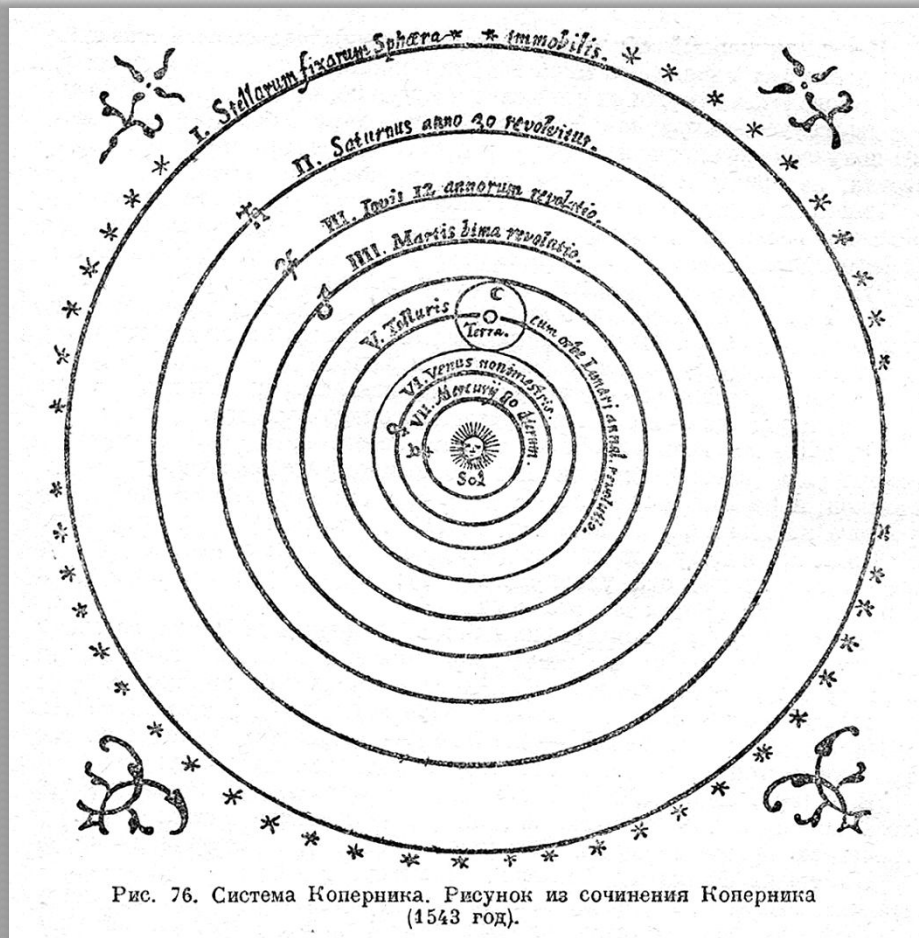
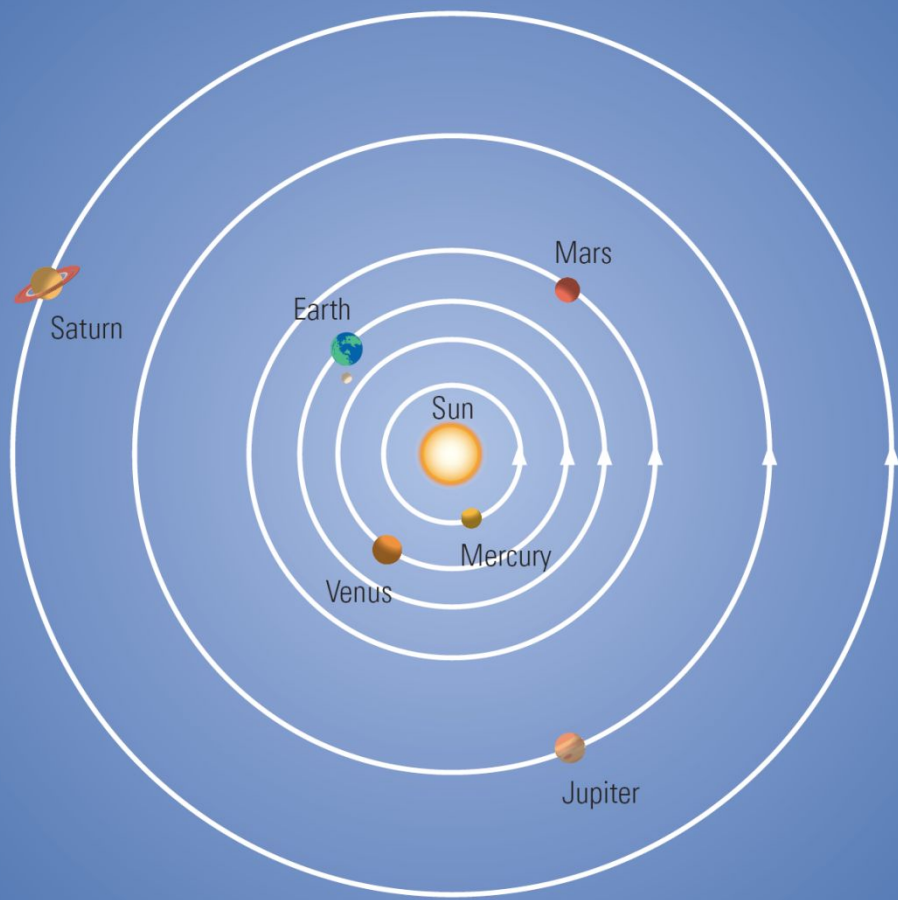
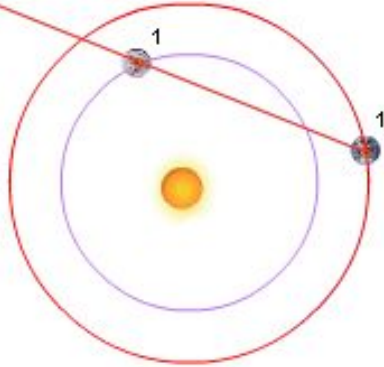
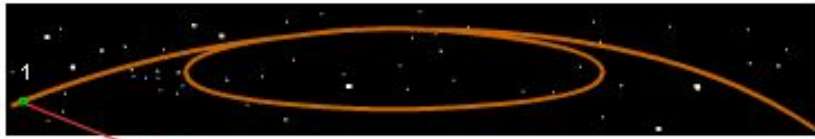
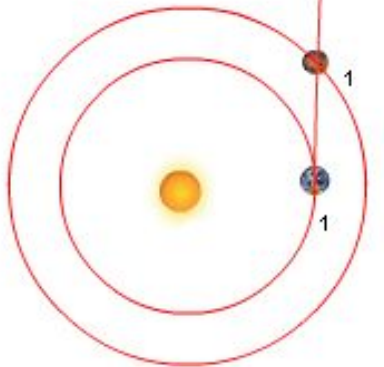
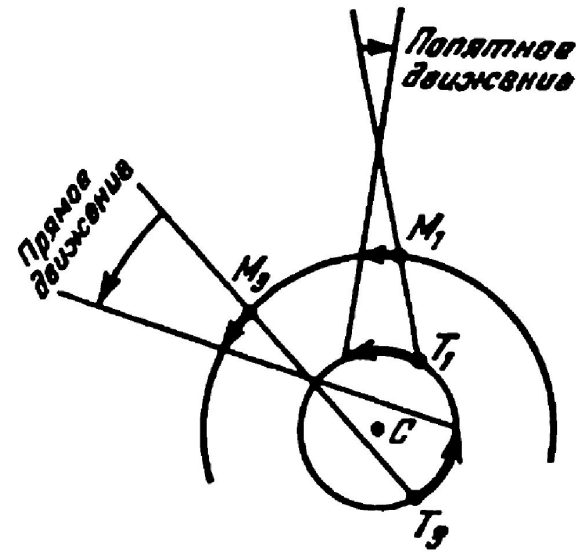


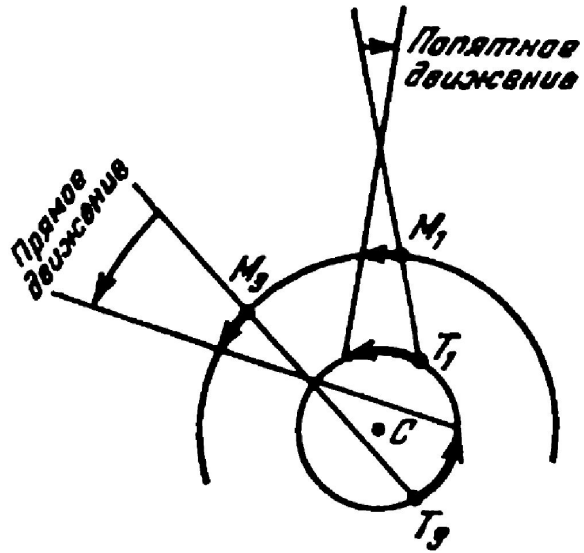
Рис. 76. Система Коперника. Рисунок из сочинения Коперника (1543 год).



© ООО ФИЗИКОН, 2003



© ООО ФИЗИКОН, 2003



# Синодический и сидерический периоды обращения планет

**Синодическим периодом обращения** ( $S$ ) планеты называется промежуток времени между ее двумя последовательными одноименными конфигурациями.

**Сидерическим, или звездным периодом обращения** ( $T$ ) планеты называется промежуток времени, в течение которого планета совершает один полный оборот вокруг Солнца по своей орбите.

Сидерический период обращения Земли называется **звездным годом** ( $T_{\oplus}$ ).

Между этими тремя периодами можно установить простую математическую зависимость из следующих рассуждений. Угловое перемещение по орбите за сутки у планеты равно  $360^{\circ}/T$ , а у Земли  $360^{\circ}/T_{\oplus}$ . Разность суточных угловых перемещений планеты и Земли (или Земли и планеты) есть видимое смещение планеты за сутки, т. е.  $360^{\circ}/S$ . Отсюда для нижних планет

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T} - \frac{1}{T_{\oplus}}$$

Для верхних планет

$$\frac{1}{S} = \frac{1}{T_{\oplus}} - \frac{1}{T}$$

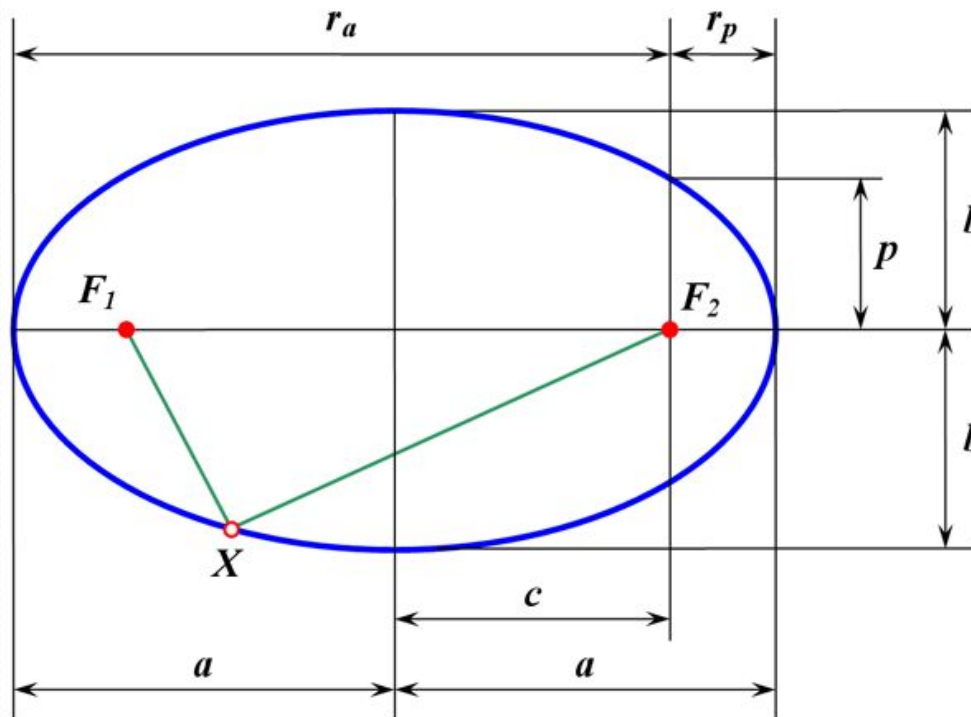
Непосредственно из наблюдений могут быть определены только синодические периоды обращения планет  $S$  и сидерический период обращения Земли.

# Законы Кеплера

1. Все планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых (общем для всех планет) находится Солнце.
2. Радиус-вектор планеты в равные промежутки времени описывает равновеликие площади.
3. Квадраты сидерических периодов обращений планет вокруг Солнца пропорциональны кубам больших полуосей их эллиптических орбит.

**Законы получены как обобщение данных наблюдений**

# I закон Кеплера



- $a$  – большая полуось;
- $b$  – малая полуось;
- $c$  – фокальный радиус (полурастояние между фокусами);
- $p$  – фокальный параметр;
- $r_p$  – перифокусное расстояние (минимальное расстояние от фокуса до точки на эллипсе);
- $r_a$  – апофокусное расстояние (максимальное расстояние от фокуса до точки на эллипсе);

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad (0 \leq e < 1)$$

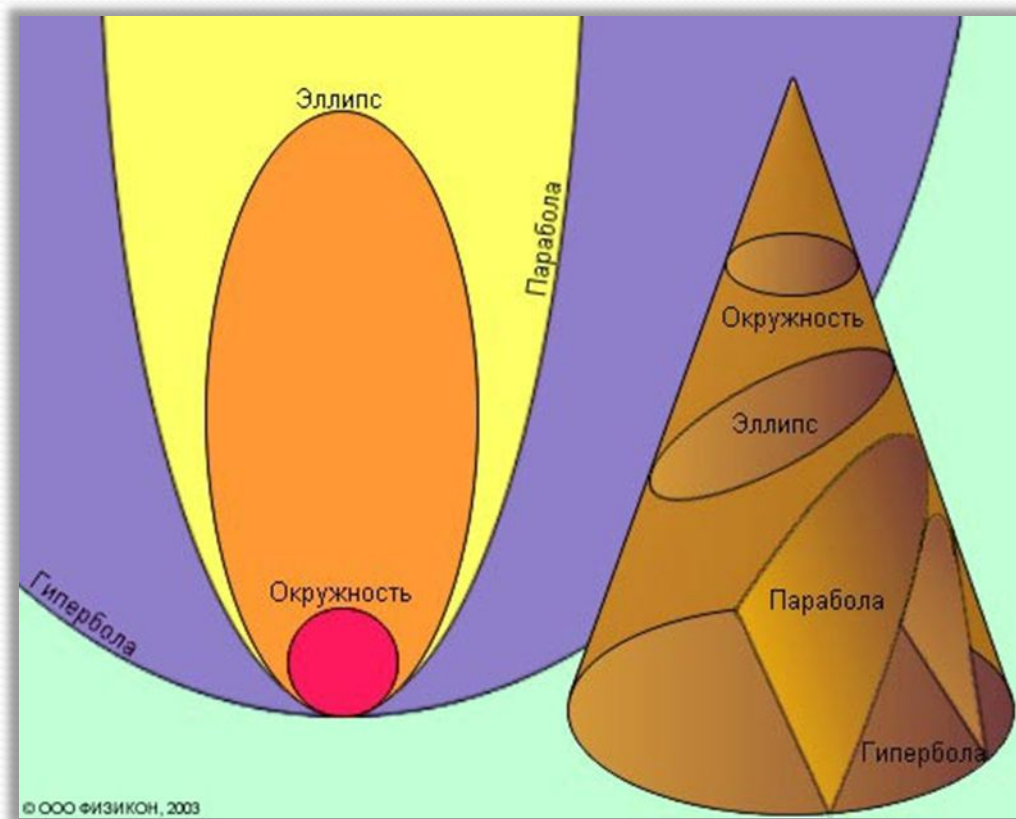
$$p = \frac{b^2}{a}$$

$$r_p = a(1 - e)$$

$$r_a = a(1 + e)$$

**Первый закон Кеплера.** Каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.

**Современная формулировка первого закона:** в невозмущенном движении орбита движущегося тела есть кривая второго порядка – эллипс, парабола или гипербола.



Траектории в ограниченной задаче двух тел



# II закон Кеплера

**Второй закон Кеплера** (закон равных площадей). Радиус-вектор планеты за равные промежутки времени описывает равновеликие площади. **Другая формулировка этого закона:** секториальная скорость планеты постоянна.



$$v_q = v_c \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \text{ — в перигелии (максимальная)}$$

$$v_Q = v_c \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \text{ — в афелии (минимальная)}$$

$v_c = \sqrt{v_Q v_q}$  — средняя или круговая скорость планеты при  $r = a$  (аналог первой космической скорости).

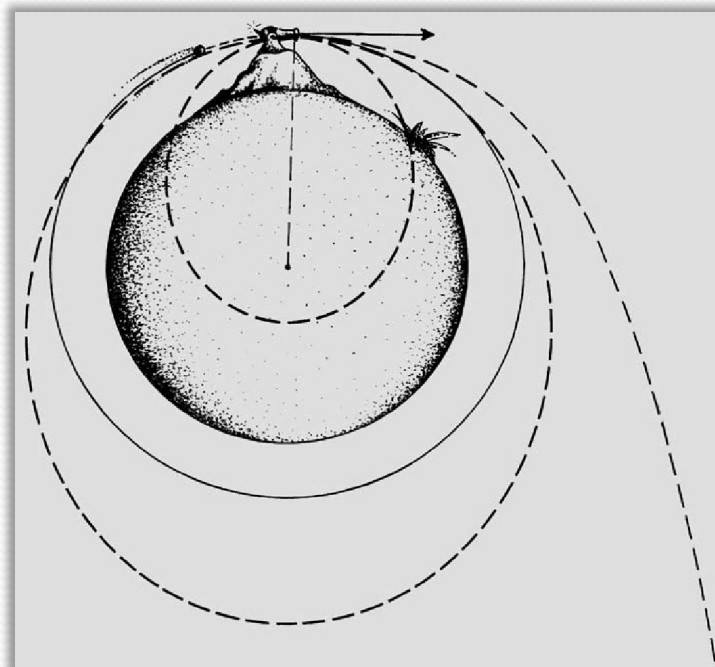
Круговая скорость Земли равна 29.78 км/с.

Первая космическая скорость может быть просто вычислена для случая кругового движения. Центробежное ускорение равно силе притяжения.

$$m \frac{v_1^2}{r} = G \frac{Mm}{r^2},$$

$$v_1 = \sqrt{G \frac{M}{r}},$$

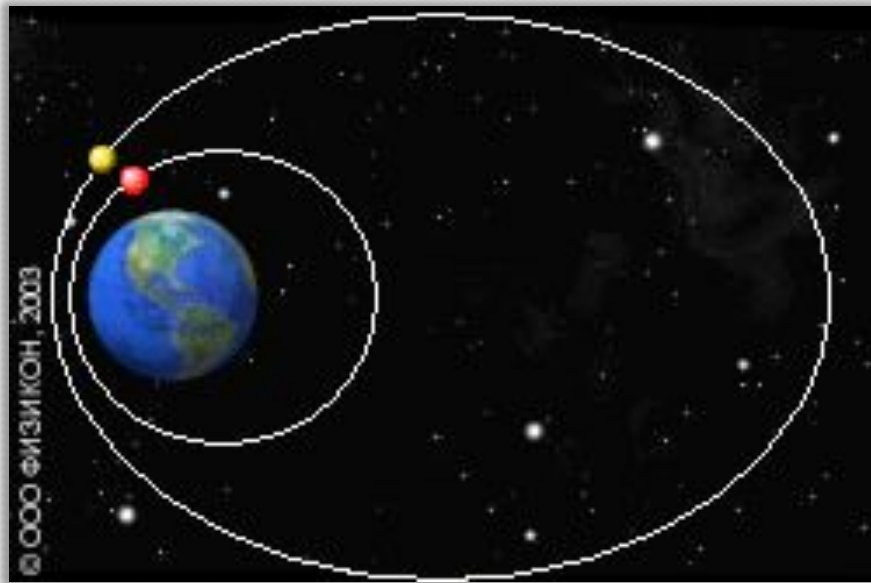
где  $m$  – масса планеты;  $M$  – масса центрального тела;  $G$  – гравитационная постоянная;  $r$  – расстояние от гравитирующего центра.



# III закон Кеплера

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}, \text{ применим только к эллиптическим орбитам}$$

где  $T_1$  и  $T_2$  — *сидерические* периоды обращений планет,  $a_1$  и  $a_2$  – большие полуоси их орбит.

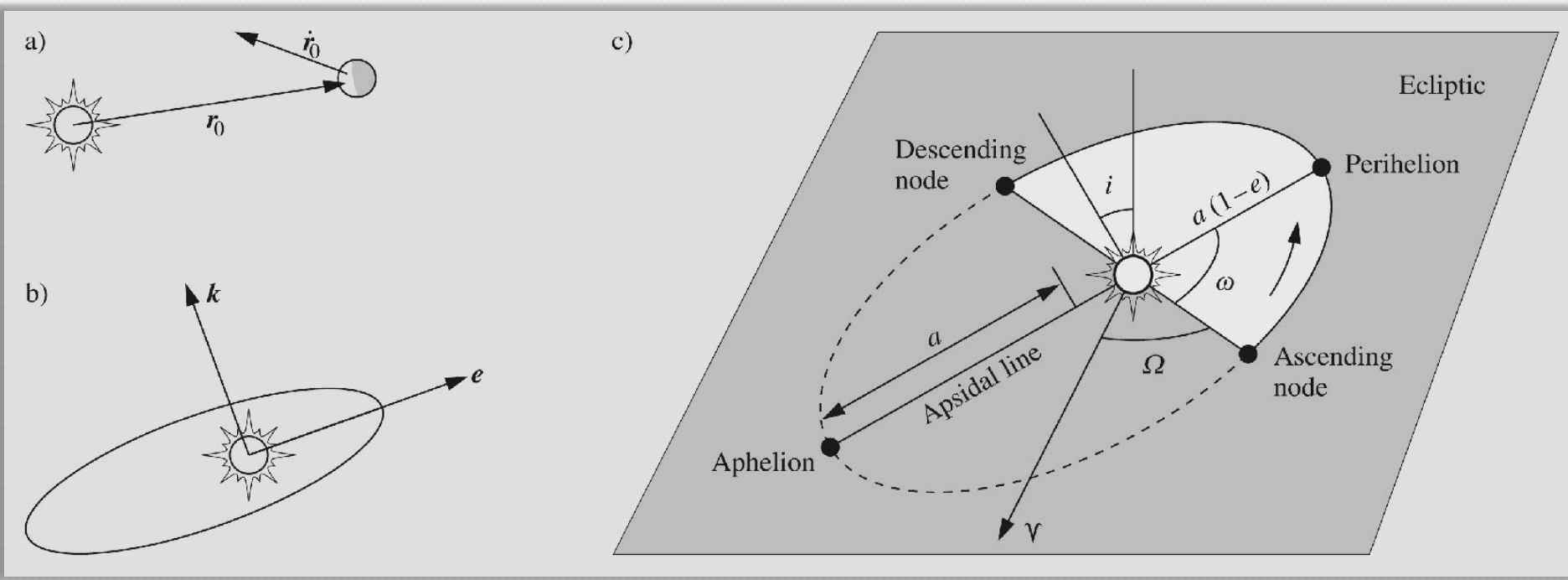


Третий закон Кеплера можно также выразить как зависимость между периодом  $T$  обращения по орбите тела с массой  $m$  и большой полуосью орбиты  $a$  ( $G$  – гравитационная постоянная):

$$\frac{a^3}{T^2(m + M_{\odot})} = \left(\frac{G}{4\pi}\right)^2$$

Здесь необходимо сделать следующее замечание. Для простоты часто говорится, что одно тело обращается вокруг другого, но это справедливо только для случая, когда масса первого тела пренебрежимо мала по сравнению с массой второго (притягивающего центра). Если же массы сравнимы, то следует учитывать и влияние менее массивного тела на более массивное. В системе координат с началом в центре масс орбиты обоих тел будут коническими сечениями, лежащими в одной плоскости и с фокусами в центре масс, с одинаковым эксцентриситетом. Различие будет только в линейных размерах орбит (если тела разной массы). В любой момент времени центр масс будет лежать на прямой, соединяющей центры тел, а расстояния до центра масс  $r_1$  и  $r_2$  тел массой  $M_1$  и  $M_2$  соответственно связаны следующим соотношением:  $r_1/r_2 = M_2/M_1$ . Перицентры и апоцентры своих орбит (если движение финитно) тела также будут проходить одновременно.

# Элементы орбит планет



Форма орбиты и ее положение в пространстве, положение тела на орбите описываются с помощью шести параметров (элементов орбиты):

$a$  – большая полуось;

$e$  – эксцентриситет;

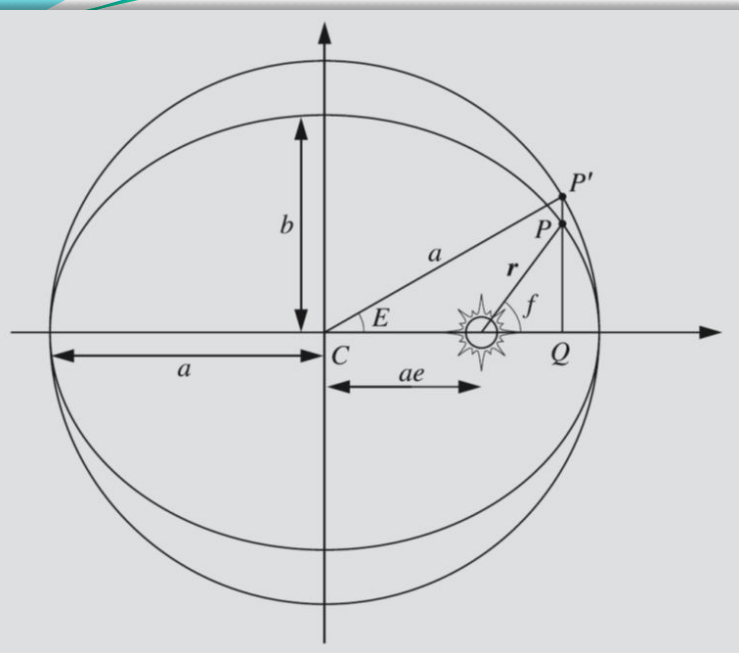
$i$  – наклон орбиты;

$\Omega$  – долгота восходящего узла орбиты;

$\omega$  – аргумент перигелия;

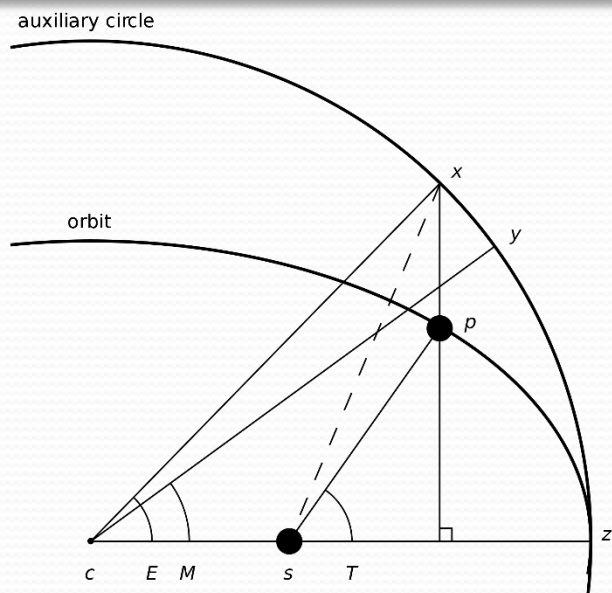
$\tau$  – момент прохождения перигелия.

# Положение тела на орбите



Положение тела на орбите в заданный момент времени  $t$  определяется углом  $f$  – **истинной аномалией** объекта. Истинная аномалия неравномерно изменяется со временем. Уравнения небесной механики обычно записывают через **эксцентрическую аномалию**  $E$ , что упрощает вид уравнений.  $E$  также изменяется со временем неравномерно.

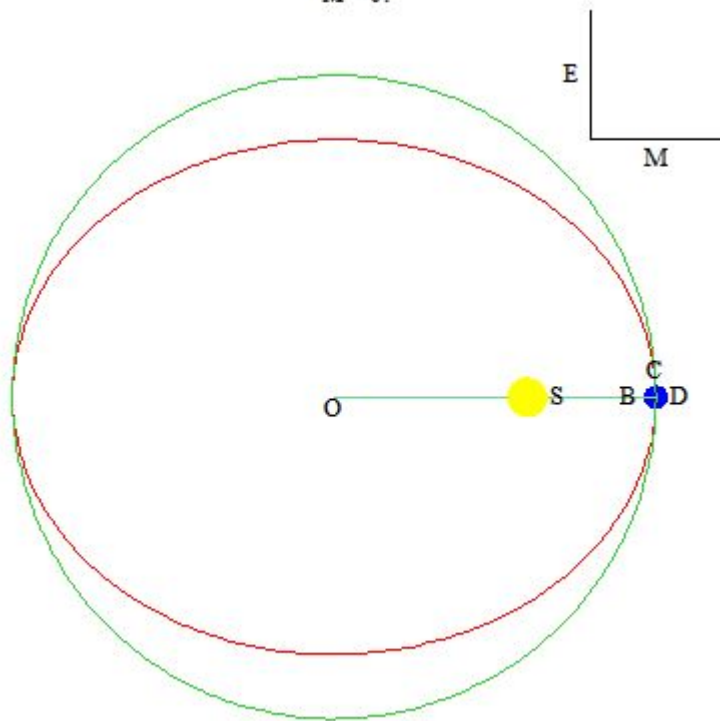
$$r = a(1 - e \cos E)$$



**Средняя аномалия**  $M$  для тела, движущегося по невозмущённой орбите – произведение его среднего движения и интервала времени после прохождения перигея. Средняя аномалия есть угловое расстояние от перигея гипотетического тела, движущегося с постоянной угловой скоростью, равной **среднему движению**  $n = 2\pi/T$ .

$$M = \frac{2\pi}{T} (t - \tau)$$

$M=0.$



Средняя аномалия и эксцентриская аномалия связаны между собой через **уравнение Кеплера**

$$E - e \sin E = M.$$

Определив эксцентрискую аномалию можно вычислить истинную аномалию и, тем самым, полностью описать движение тела по реальной орбите.

$$\cos f = \frac{a(\cos E - e)}{r} = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E},$$

$$\sin f = \frac{b \sin E}{r} = \sqrt{1 - e^2} \frac{\sin E}{1 - e \cos E}.$$

# Понятие о задаче трех тел

Точное аналитическое определение траекторий движения в поле тяготения возможно только в задаче двух тел. Для задачи трех тел известны лишь пять точных решений для особых конфигураций системы.

В общем случае, уравнения движения для системы  $n$  тел записываются в виде

$$\ddot{\vec{r}}_k = \sum_{i=1, i \neq k}^n Gm_i \frac{\vec{r}_i - \vec{r}_k}{|\vec{r}_i - \vec{r}_k|^3}, \quad k = 1 \dots n.$$

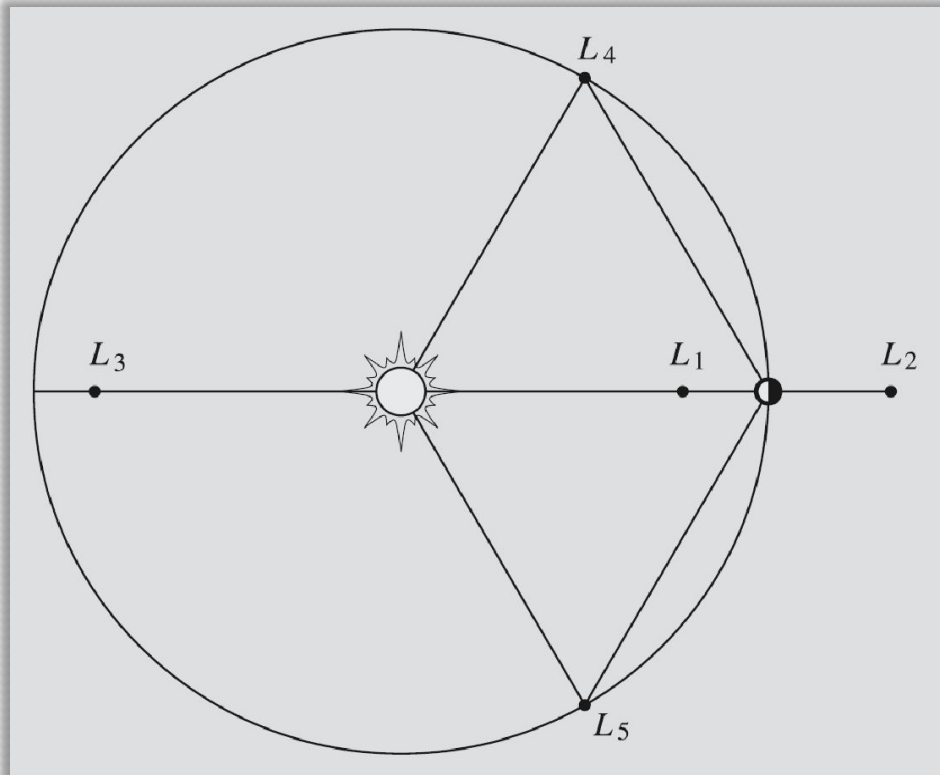
Способы решения:

1. При задании  $\dot{\vec{r}}_i(t_0), \vec{r}_i(t_0)$ , положения и скорости объектов в другой момент могут быть получены путем численного интегрирования системы уравнений.
2. Если одно из тел системы доминирует по массе (Солнце и планеты), то орбиты планет могут быть определены в задаче двух тел, а влияние других планет учитывается через малые возмущения к влиянию центрального тела.
3. Решение в рамках **ограниченной задачи трех тел**. Два массивных тела, обращающихся друг вокруг друга, и маломассивное тело, обращающееся в той же плоскости, что и массивные тела системы. Орбиты массивных тел определяются в рамках задачи двух тел. Общего решения задачи не найдено.



# Частные решения ограниченной задачи трех тел

Существует пять частных решений, в которых положение третьего тела остается неизменным по отношению к положениям двух массивных тел системы. Точки в плоскости системы, в которых реализуются такие решения называются **точками Лагранжа** системы трех тел  $\{L_1, L_2, \dots, L_5\}$ .



Лагранж показал, что если третье тело находится в одной из этих пяти точек и обладает определенным значением начальной скорости, то конфигурация, которую образуют все три тела, всегда остается подобной самой себе, а движение всех тел происходит по коническим сечениям одинакового вида.

1. Три тела расположены на одной прямой и обращаются, оставаясь на ней, вокруг общего центра масс. Конфигурация неустойчива по отношению к малым возмущениям.
2. Три тела расположены в вершинах равностороннего треугольника и обращаются вокруг общего центра масс так, что треугольник остается все время равносторонним.

# Устойчивость планетной системы.

## Возмущенное движение

**Невозмущенное движение** = задача двух тел.

В задаче  $n$  тел орбиты перестают быть истинно кеплеровыми = **возмущенное движение**. **Зависимость элементов орбиты тела от времени** вследствие притяжения его другими телами, помимо центрального, называется **возмущениями** или **неравенствами элементов**.

Возмущения описываются суммой линейной и множества периодических функций с различными значениями периодов. Линейные члены называются **вековыми возмущениями**, а остальные слагаемые – **периодическими возмущениями**.

Коэффициенты в функциях, представляющих возмущения, как правило, весьма малы, однако **за достаточно большой промежуток времени** вековые возмущения могут стать **сколь угодно большими**.

Наибольший интерес представляют **вековые возмущения больших полуосей, эксцентриситетов и углов наклона** орбит планет, поскольку именно они определяют **характер устойчивости Солнечной системы**.

Как следует из теории движения планет, вековые возмущения элементов орбит  $a$ ,  $e$  и  $i$  чрезвычайно малы, и **есть основания полагать, что Солнечная система устойчива по крайней мере в течение весьма длительных промежутков времени**, возможно достигающих даже нескольких миллиардов лет.

Из остальных элементов орбиты – долгота восходящего узла  $\Omega$ , и аргумент перигелия  $\omega$  – подвержены значительным вековым возмущениям, которые в силу малости эксцентриситетов и наклонов орбит планет практически не изменяют общую конфигурацию Солнечной системы.

Дальнейшее уточнение теории движения планет приводит к появлению квадратичных и кубических по времени возмущений элементов орбит. Согласно теории, вполне возможно, что сумма таких возмущений может представлять собой начальные члены разложения в степенной ряд некоторой периодической функции. В этом случае изменение всех элементов будет ограниченным.

**Вопрос об устойчивости Солнечной системы на неограниченном интервале времени пока остается открытым.**

Пусть имеются три небесных тела: Солнце  $S$  с массой  $M$ , планета  $P_1$  с массой  $m_1$  на расстоянии  $r_1$  от центра Солнца и планета  $P_2$  с массой  $m_2$  на расстоянии  $r_2$  от центра Солнца и на расстоянии  $r$  от планеты  $P_1$ . Все три тела действуют друг на друга по закону всемирного тяготения Ньютона. Солнце получает ускорения

$$\omega_1 = G \frac{m_1}{r_1^2}, \quad \omega_2 = G \frac{m_2}{r_2^2}$$

по направлению  $SP_i$  от планеты  $P_i$ . Рассмотрим движение планеты  $P_1$  относительно Солнца. В этом случае на планету  $P_1$  будут действовать силы, вызывающие следующие ускорения:

$$\omega = G \frac{M + m_1}{r_1^2}, \quad \omega' = G \frac{m_2}{r^2}, \quad \omega'' = -\omega_2 = G \frac{m_2}{r_2^2}.$$

Ускорения  $w'$  и  $w''$  составляют ускорение возмущающей силы и обуславливают отклонения в движении планеты  $P_1$  от законов Кеплера. Возмущающая сила, следовательно, состоит из двух сил: из силы действия планеты  $P_2$  на планету  $P_1$  и из силы действия планеты  $P_2$  на Солнце. Так как ускорение  $w''$  откладывается в сторону, противоположную  $w_2$ , то **ускорение от возмущения есть разность векторов ускорений, вызываемых возмущающим телом на планете и на Солнце.**

Возмущающая сила (возмущающее ускорение) в общем случае не направлена к возмущающему телу, т. е. к планете  $P_2$ . Возмущающая сила будет направлена точно к возмущающему телу  $P_2$  только в том случае, если тела  $P_1$  и  $P_2$  находятся на одной прямой с Солнцем, и притом оба по одну сторону от него (в порядке  $SP_1P_2$  или  $SP_2P_1$ ). Если же тела  $P_1$  и  $P_2$  находятся на одной прямой с Солнцем, но по разные стороны от него ( $P_1SP_2$ ), то возмущающая сила направлена от возмущающего тела. Величина и направление возмущающей силы вследствие движения тел непрерывно меняются.

# Поверхность и предел Роша

Предел Роша – *радиус круговой орбиты спутника, обращающегося вокруг небесного тела, на котором приливные силы, вызванные гравитацией центрального тела, равны силам самогравитации спутника.*

Обычно следствием существования предела Роша называют тот факт, что спутники с нулевой собственной прочностью, обращающиеся на орбитах ниже предела Роша, неустойчивы и разрушаются приливными силами.


Однако, гораздо более существенным для астрофизики и планетологии является «обратный» вывод: внутри сферы с радиусом, меньшим предела Роша, невозможна гравитационная конденсация вещества с образованием единого тела (спутника): кольца Сатурна расположены внутри предела Роша и состоят, судя по всему, из материи, сохранившейся с ранних стадий формирования Солнечной системы.

В приближении «жесткого» сферического спутника, то есть при условиях пренебрежения его приливной деформации и вращения, предел Роша  $a_R$  зависит от радиуса центрального тела  $R$  и отношения плотностей центрального тела  $\rho_M$  и спутника  $\rho_m$ :

$$a_R = R \left( 2 \frac{\rho_M}{\rho_m} \right)^{\frac{1}{3}}$$

В приближении «жидкого» несферического спутника, форма которого определяется приливными силами, предел Роша увеличивается почти в 2 раза:

$$a_R \approx 2.44R \left( \frac{\rho_M}{\rho_m} \right)^{\frac{1}{3}}$$



Спасибо  
за  
внимание!