

Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդ

Կ.ԴԵՄԻՐՃՅԱՆԻ ԱՆՎ. Հ.139 ԱՎԱԳ ԴՊՐՈՑ

ՌԻսուլցուհի: Ս. Հակոբյան

Բովանդակություն

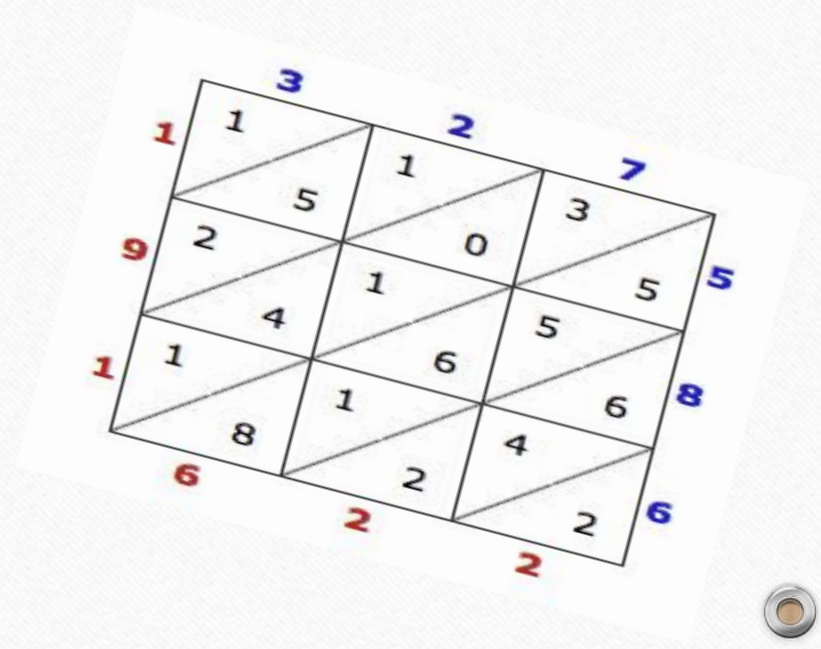
- ❖ 1. ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ
- ❖ 2. ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԻՆԴՈՒԿՑԻԱՅԻ ՄԵԹՈԴԸ.
- ❖ 3. ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԻՆԴՈՒԿՑԻԱՅԻ ՄԵԹՈԴԻ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅԱՆ ՕՐԻՆԱԿՆԵՐ



ՆԵՐԱԾՈՒԹՅՈՒՆ

Մաթեմատիկական հետազոտություններ կատարելու համար
գոյություն ունեն տարբեր մեթոդներ:

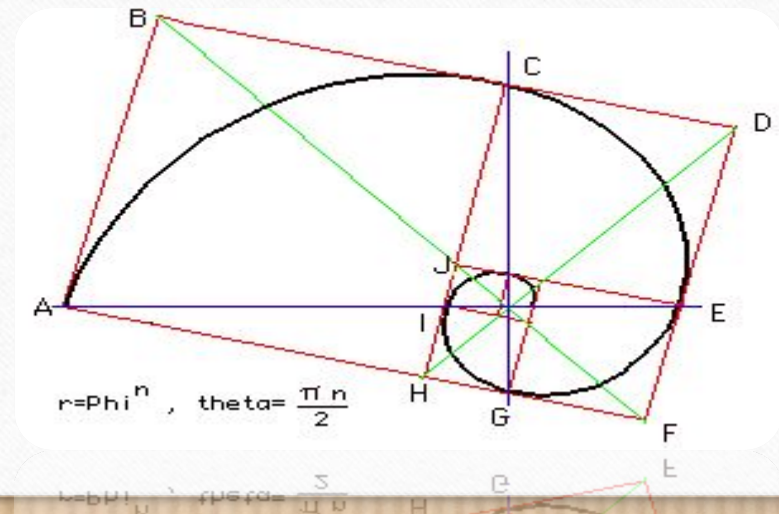
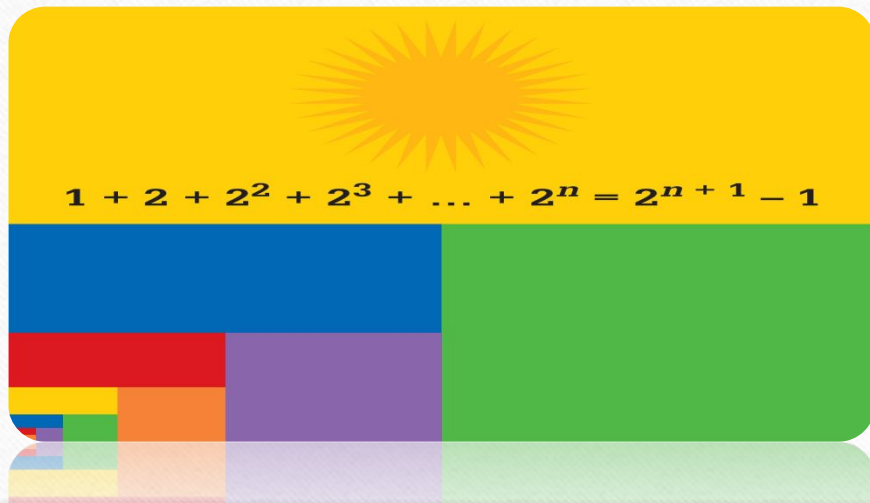
$$\begin{aligned} & (a+b)(c+d) = x^2 + 10x + 21 \\ & = ac + ad + bc + bd \\ & (x+7)(x+3) \\ & = x(x) + 3(x) + 7x + 7(3) \\ & = x^2 + 3x + 7x + 21 \end{aligned}$$



Մաթեմատիկական հետազոտությունների կատարելու մեթոդներ

Ինդուկցիա

Դեդուկցիա



Դեդուկցիան կամ դեդուկտիվ մտահանգում

Դեդուկցիան կամ դեդուկտիվ մտահանգումը՝ դատողությունների շղթա է, որի օղակները կապված են տրամաբանական կանոնով: Այդ շղթայի սկիզբը որևէ հստակաբան դրույթ է, որից տրամաբանական դատողություններով հանգում են վերջնական դրույթին, ինչն անվանում են եզրակացություն:



Ինդուկցիան

Ինդուկցիան մտածողության այնպիսի ձև է, որը մասնավոր դեպքերը հանգեցնում է ընդհանուր եզրակացության, և ընդհանուր դրույթը բխեցնում է մասնավորից:



ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԻՆՖՈՒԿՑԻԱՅԻ ՄԵԹՈԴԸ

Հատ երևույթին մաթեմատիկական պնդումների վերաբերյալ տրամաբանական կառույցում ամենամեծ դժվարությունը հիմնականում ներկայացնում է մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը:

Մաթեմատիկական ինդուկցիայի սկզբունքի խորությամբ ընկալումը և նրա նիւտ կիրառումը տրամաբանական մրհի հասունության չափանիւ է,որը խիստ անհրաժեւտ է յուրաքանչյուր մաթեմատիկոսին:

Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը լայն կիրառություն ունի մաթեմատիկայի տարբեր բաժիններում:

Օրինակներ

Պահանջվում է ապացուցել, որ ցանկացած բնական զույգ n ($4 < n < 20$) թիվ կարելի է ներկայացնել երկու պարզ թվերի գումարի տեսքով:

Դրա համար վերցնում ենք բոլոր զույգ թվերը այդ միջակայքի և գրում դրանց համապատասխան

տրոհումները:

$$4=2+2$$

$$6=3+3$$

$$8=5+3$$

$$10=7+3$$

$$20=13+7$$

$$12=7+5$$

$$14=7+7$$

$$16=11+5$$

$$18=13+5$$

Այս ինը հավասարությունները ցույց են տալիս, որ մեզ հետաքրքրող ամեն մի թիվ ներկայացվում է երկու պարզ թվերի գումարի տեսքով:

Այսպիսով լրիվ ինդուկցիան կայանում է նրանում, որ ընդհանուր պնդումն ապացուցվում է նրանում առաջացող վերջավոր հնարավոր դեպքերից յուրաքանչյուրի համար:

Երբեմն հաջողվում է ընդհանուր արդյունքը կոսահել ոչ թե բոլոր, այլ բավականաչափ մեծ թվով մասնավոր դեպքերի դիտարկման հիման վրա, այլ կերպ, եզրակացություն է արվում ոչ բոլոր դեպքերի բննարկումով: Այս մեթոդը անվանել են **ոչ լրիվ կամ թերի ինդուկցիա**:



ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԻՆԴՈՒԿՑԻԱՅԻ ՍԿԶԲՈՒՆՔ



Փոփոխական բոլոր արժեքների համար $A(n)$ պնդումը համարվում է ճիշտ, եթե տեղի ունի հետևյալ երկու պայմանները՝

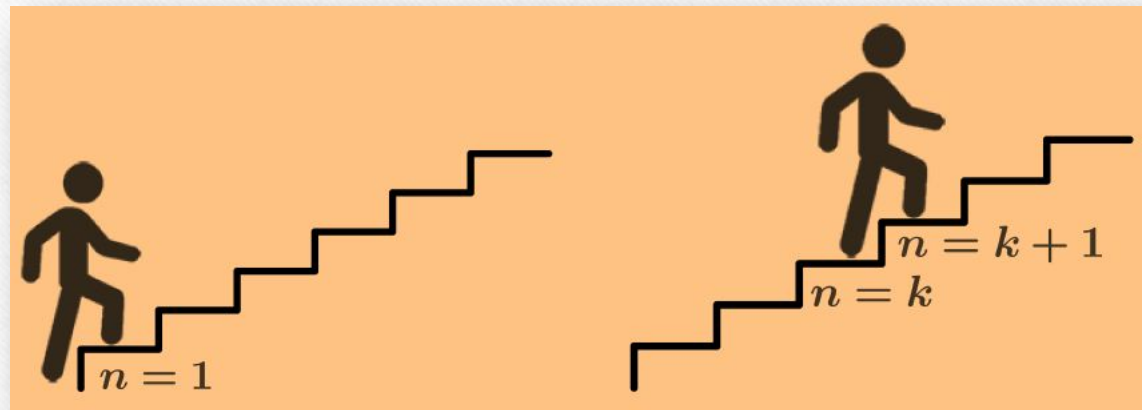
1) $n=1$ -ի դեպքում պնդումը ճշմարիտ է

2) Այն ենթադրությունից , թե $A(n)$ պնդումը ճիշտ է $n=k$ -ի դեպքում, որտեղ k –ն կամայական բնական թիվ է,

հետևում է, որ այն ճիշտ է նաև $n=k+1$ - ի դեպքում:

Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդով ապացուցումը բաղկացած է երկու մասից:
Սկզբում ապացուցվելիք պնդումը ստուգվում է դեպքում: Ապացուցման այս մասը կոչվում է **ինդուկցիայի բազիս**:

Ապացուցման հաջորդ մասն անվանում են **ինդուկտիվ քայլ**: Այդ մասում ապացուցվում է պնդման հաջորդ լինելը դեպքում՝ այն ենթադրությամբ, որ պնդումը ճիշտ է դեպքում (ինդուկցիայի ենթադրություն):



ՄԱԹԵՄԱՏԻԿԱԿԱՆ ԻՆԴՈՒԿՑԻԱՅԻ
ՄԵԹՈԴԻ ԿԻՐԱՌՈՒԹՅԱՆ ՕՐԻՆԱԿ-
ՆԵՐ:

- Օրինակ 1: Ապացուցենք, որ ցանկացած n –ի դեպքում $7^n - 1$ առանց մնացորդի բաժանվում է 6-ի կուժում:
- 1) $n=1$ -ի դեպքում կունենաք $7^1 - 1 = 6$, որը առանց մնացորդի բաժանվում է 6-ի: Հետևաբար $n=1$ -ի դեպքում պնդումը եիշտ է:

- 2) Ենթադրենք, որ $n=k$ -ի դեպքում, $7^k - 1$ առանց մնացորդի բաժանվում է 6-ի դեպքում պնդումը ճիշտ է:
- 3) Ապացուցենք, որ պնդումը ճիշտ է $n=k+1$ -ի դեպքում:

$$7^{(k+1)} - 1 = 7(7^k - 1) + 6$$

Առաջին գումարելին առանց մնացորդի բաժանվում է 6-ի, քանի որ $7^k - 1$ առանց մնացորդի բաժանվում է 6-ի ըստ ինդուկցիոն ենթադրության, իսկ երկրորդ գումարելին հանդիսանում է հենց 6-ը: Ուրեմն $7^n - 1$ առանց մնացորդի բաժանվում է 6-ի ցանկացած բնական n -ի դեպքում:

□ Օրինակ 2: Ապացուցենք որ,

$$1+x+x^2+x^3+\dots+x^n=(x^{(n+1)}-1)/(x-1)$$

Կուժում:

1) $n=1$ -ի դեպքում կուժենանք

$$1+x=(x^2-1)/(x-1)=(x-1)(x+1)/(x-1)=x+1$$

ուստի, $n=1$ -ի դեպքում բանաձևը ճիշտ է:

2) Ենթադրենք $n=k$ -ի դեպքում բանաձևը ճիշտ է՝

$$1+x+x^2+x^3+\dots+x^k=(x^{(k+1)}-1)/(x-1)$$

Ցույց տանք, որ տեղի կունենա հետևյալ
հավասարությունը՝

$$1+x+x^2+x^3+\dots+x^k+x^{k+1}=(x^{k+2}-1)/(x-1).$$

$$1+x+x^2+x^3+\dots+x^k+x^{k+1}=(1+x+x^2+x^3+\dots+x^k)+x^{k+1}=
(x^{k+1}-1)/(x-1)+x^{k+1}=(x^{k+2}-1)/(x-1).$$

$$A(k) > A(k+1)$$

Ստացվեց, որ բանաձևն ճիշտ է ցանկացած բնական n -ի
դեպքում:

Օրինակ 3: Ցույց տանք, որ $n > 2$ -ի դեպքում անհավասարությունը ճիշտ է՝
 $1 + (1/2^2) + (1/3^2) + \dots + (1/n^2) < 1,7 - (1/n)$.

Լուծում:

1) $n=3$ -ի դեպքում անհավասարությունը ճիշտ է
 $1 + (1/2^2) + (1/3^2) = 245/180 < 246/180 = 1,7 - (1/3)$.

2) Ենթադրենք $n=k$ -ի դեպքում անհավասարությունը ճիշտ է՝

$$1 + (1/2^2) + (1/3^2) + \dots + (1/k^2) < 1,7 - (1/k).$$

3) Ապացուցենք $n=k+1$ -ի դեպքում

$$1 + (1/2^2) + \dots + (1/k^2) + (1/(k+1)^2) < 1,7(1/k) + (1/(k+1)^2).$$

Ցույց տանք, որ

$$1,7(1/k) + (1/(k+1)^2) < 1,7 - (1/k+1)$$

$$(1/(k+1)^2) + (1/k+1) < 1/k$$

$$(k+2)/(k+1)^2 < 1/k$$

$$k(k+2) < (k+1)^2$$

$$k^2 + 2k < k^2 + 2k + 1.$$

Վերջինս ակնհայտ է, և հետևաբար

$$1 + (1/2^2) + (1/3^2) + \dots + (1/(k+1)^2) < 1,7 - (1/k+1).$$

Եզրահանգում

Մաթեմատիկական ինդուկցիայի մեթոդը հնարավորություն է տալիս լուծել այնպիսի խնդիրներ, որոնք ժամանակին իրենցից դժվարություն էին ներկայացնում: Դրանք հիմնականում տրամաբանական խնդիրներ էին, որոնք բարձրացնում են հետաքրքրությունը մաթեմատիկայի նկատմամբ, որպես գիտություն:

