ЛЕКЦИЯ 1

МАТРИЦЫ и ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

ГЛАВА 1. МАТРИЦЫ. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1.1. Понятие матрицы

Определение. ***Матрицей размера*** $m \times n$ называется таблица, образованная из элементов некоторого множества и имеющая m строк и n столбцов. Если $m \neq n$, то матрицу называют ***прямоугольной***, а если $m = n$, то ***квадратной порядка*** n.

Элементы, из которых составлена матрица, называют ***элементами*** матрицы. Их обычно обозначают маленькой латинской буквой с нижним индексом из двух цифр. Он указывает положение элемента в матрице: первая цифра индекса – номер строки, в которой стоит элемент, а вторая – номер столбца.

Пример.

a_{24} – элемент второй строки и четвертого столбца,

a_{13} – элемент первой строки и третьего столбца.

Матрицы обычно обозначают большими латинскими буквами и при записи заключают в круглые скобки:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Используется также сокращенная запись: $\mathbf{A} = (a_{ij})$.

Две матрицы $\mathbf{A} = (a_{ij})$ и $\mathbf{B} = (b_{ij})$ считаются ***равными***, если они одинакового размера, и элементы, стоящие в $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ на одинаковых местах, равны между собой, то есть

$$a_{ij} = b_{ij}.$$

Наиболее часто рассматриваются матрицы, элементами которых являются числа. Такие матрицы называются ***числовыми***.

1.2. Некоторые виды матриц

1. Матрицу размера $m \times 1$ называют ***столбцом длины*** m.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}.$$

2. Матрицу размера $1 \times n$ называют ***строкой длины*** n.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}.$$

3. ***Нулевой*** матрицей называют матрицу, все элементы которой равны нулю. Будем обозначать её буквой $\mathbf{O}$.

$$\mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Условную линию в квадратной матрице $\mathbf{A}$ порядка n, на которой расположены элементы a_{11}, a_{22}, …, a_{nn} называют ***главной диагональю*** этой матрицы.

Условную линию в квадратной матрице $\mathbf{A}$ порядка n, на которой расположены элементы a_{1n}, $a_{2,n-1}$, …, a_{n1}, называют ***побочной диагональю*** этой матрицы.

Квадратная матрица, у которой все элементы, стоящие вне главной диагонали, равны нулю, называется ***диагональной***.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Диагональная матрица, у которой все элементы, стоящие на главной диагонали, равны 1, называется ***единичной***.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Единичную матрицу принято обозначать буквой $\mathbf{E}$ (или $\mathbf{E}_n$, если требуется указать порядок матрицы).

5) Квадратные матрицы, у которых все элементы выше или ниже главной диагонали равны нулю, называются ***треугольными***.

$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & 0 & \dots & 0 \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

При этом матрица $\mathbf{A}$ называется ***верхней треугольной***, а $\mathbf{B}$ – ***нижней треугольной***.

6) Прямоугольную матрицу называют ***трапециевидной***, если она имеет вид:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3m} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{mm} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

7) Прямоугольная матрица называется ***ступенчатой***, если первый ненулевой элемент каждой строки находится правее первого ненулевого элемента предыдущей строки.

Пример.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ – ступенчатая матрица,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ – не является ступенчатой.

1.3. Линейные операции над матрицами

К линейным операциям над матрицами относятся умножение матрицы на число и сложение матриц.

Определение. ***Произведением*** матрицы $\mathbf{A}=(a_{ij})$ ***на число*** α называется такая матрица $\mathbf{B}=(b_{ij})$, элементы которой равны произведениям соответствующих элементов матрицы $\mathbf{A}$ на число α, то есть

$$b_{ij}=\alpha\cdot a_{ij}.$$

Произведение матрицы $\mathbf{A}$ на число α обозначают $\alpha\mathbf{A}$.

Пример.

Если $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 4\end{pmatrix}$, то $2\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 0 & -2 & 8\end{pmatrix}$, $(-3)\mathbf{A}=\begin{pmatrix}-3 & -6 & -9\\ 0 & 3 & -12\end{pmatrix}$.

Частным случаем произведения матрицы $\mathbf{A}$ на число является произведение $(-1)\mathbf{A}$. Такую матрицу называют ***противоположной матрице*** $\mathbf{A}$ и обозначают $-\mathbf{A}$.

Частным случаем суммы двух матриц является сумма $\mathbf{A}+(-\mathbf{B})$. Такую матрицу называют ***разностью*** матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$, и обозначают $\mathbf{A}-\mathbf{B}$.

Введенные таким образом линейные операции над матрицами обладают следующими свойствами:

1. $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$;
2. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}=\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})$;
3. $\mathbf{A}+\mathbf{O}=\mathbf{A}$;
4. $\mathbf{A}+(-\mathbf{A})=\mathbf{O}$;
5. $\alpha(\beta\mathbf{A})=(\alpha\beta)\mathbf{A}$;
6. $(\alpha+\beta)\mathbf{A}=\alpha\mathbf{A}+\beta\mathbf{A}$;
7. $\alpha(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\alpha\mathbf{A}+\alpha\mathbf{B}$;
8. $1\mathbf{A}=\mathbf{A}$.

1.4. Умножение матриц

Определение. Пусть $\mathbf{A} = (a_{1i})$ – строка и $\mathbf{B} = (b_{i1})$ –столбец одинаковой длины n. ***Произведением строки* A *на столбец* B** называется число c (т.е. матрица размера 1×1), равное сумме произведений их соответствующих элементов, то есть

$$c = a_{11}\cdot b_{11} + a_{12}\cdot b_{21} + a_{13}\cdot b_{31} + \ldots + a_{1n}\cdot b_{n1}.$$

Пример.

Если $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, то произведением **A** на **B** будет число $c = 1\cdot(-5) + 2\cdot 3 + (-3)\cdot 4 = -11$.

Определение. Пусть $\mathbf{A} = (a_{ij})$ – матрица размера $m\times n$, $\mathbf{B} = (b_{ij})$ – матрица размера $n\times k$ (то есть количество столбцов в матрице **A** совпадает с количеством строк матрицы **B**). ***Произведением*** матрицы **A** на матрицу **B** называется матрица **C** размера $m\times k$ такая, что каждый ее элемент c_{ij} является произведением строки матрицы **A** с номером i на столбец матрицы **B** с номером j, то есть

$$c_{ij} = a_{i1}\cdot b_{1j} + a_{i2}\cdot b_{2j} + a_{i3}\cdot b_{3j} + \ldots + a_{in}\cdot b_{nj}.$$

Произведение матрицы **A** на **B** обозначают $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ или $\mathbf{AB}$.

Примеры.

1. Пусть $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ и $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 1\\ 2 & -4 & -2\end{pmatrix}$. Тогда $\mathbf{A}$ можно умножить на $\mathbf{B}$. В результате получим матрицу

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 3 & 1\\ 2 & -4 & -2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot(-1)+2\cdot 2 & 1\cdot 3+2\cdot(-4) & 1\cdot 1+2\cdot(-2)\\ 0\cdot(-1)+(-1)\cdot 2 & 0\cdot 3+(-1)\cdot(-4) & 0\cdot 1+(-1)\cdot(-2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 5 & -3\\ -2 & 4 & 2\end{pmatrix}.$$

2. Пусть $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & -1 & 5\end{pmatrix}$ и $\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1 & 7\\ 3 & 4\\ -1 & 0\end{pmatrix}$. Тогда $\mathbf{A}$ можно умножить на $\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}$ можно умножить на $\mathbf{A}$. В результате получим матрицы

$$\mathbf{AB}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & -1 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 7\\ 3 & 4\\ -1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-6+0 & 7-8+0\\ 3-3-5 & 21-4+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & -1\\ -5 & 17\end{pmatrix}.$$

$$\mathbf{BA}=\begin{pmatrix}1 & 7\\ 3 & 4\\ -1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 3 & -1 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+21 & -2-7 & 0+35\\ 3+12 & -6-4 & 0+20\\ -1+0 & 2+0 & 0+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}22 & -9 & 35\\ 15 & -10 & 20\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}.$$

Последний пример показывает, что если произведения $\mathbf{AB}$ и $\mathbf{BA}$ существуют, то в общем случае $\mathbf{AB}\neq\mathbf{BA}$. Но для некоторых матриц равенство $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$ возможно. Если $\mathbf{AB}=\mathbf{BA}$, то матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ называют ***перестановочными*** или ***коммутативными***.

Операция умножения матриц обладает следующими свойствами (при условии, что все записанные произведения имеют смысл):

1. $\mathbf{AE}=\mathbf{EA}=\mathbf{A}$,
2. $\mathbf{AO}=\mathbf{OA}=\mathbf{O}$;
3. $(\mathbf{AB})\mathbf{C}=\mathbf{A}(\mathbf{BC})$;
4. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{C}=\mathbf{AC}+\mathbf{BC}$;
5. $\mathbf{C}(\mathbf{A}+\mathbf{B})=\mathbf{CA}+\mathbf{CB}$.

1.5. Транспонирование матриц

Определение. Пусть $\mathbf{A}$ – матрица размера $m \times n$. Матрица размера $n \times m$, полученная из $\mathbf{A}$ заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется ***транспонированной к*** $\mathbf{A}$ и обозначается $\mathbf{A}^T$. Операция нахождения матрицы $\mathbf{A}^T$ называется ***транспонированием*** матрицы $\mathbf{A}$.

Пример.

Пусть $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$. Тогда $\mathbf{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Операция транспонирования матриц обладает следующими свойствами:

1. $(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$;
2. $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T$;
3. $(\alpha \mathbf{A})^T = \alpha \mathbf{A}^T$;
4. $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T$.

1.6. Понятие определителя

Приведём некоторые определения, которые необходимы для того, чтобы ввести понятие определителя.

Пусть n – натуральное число. ***Факториалом*** числа n (обозначают: $n!$) называют произведение натуральных чисел от 1 до n включительно, то есть

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Факториал числа 0 полагают равным 1.

Расположение n чисел $1, 2, 3, \ldots, n$ в любом порядке называется ***перестановкой*** этих чисел.

Пусть дана некоторая перестановка чисел $1, 2, 3, \ldots, n$:

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_i, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_n.$$

Говорят, что два числа α_i и α_k образуют ***инверсию*** в перестановке, если большее число стоит левее меньшего, то есть если $\alpha_i > \alpha_k$. Количество пар, образующих инверсию в перестановке, называется ***числом инверсий*** в перестановке.

Пример.

В перестановке $1, 4, 5, 3, 2$ инверсию образуют следующие пары чисел: 4 и 3, 4 и 2, 5 и 3, 5 и 2, 3 и 2. Число инверсий -5.

Пусть $\mathbf{A} = (a_{ij})$ – квадратная матрица порядка n.

Определение. ***Определителем*** матрицы $\mathbf{A}$ (***определителем порядка*** n) называется сумма $n!$ членов, составленных следующим образом. Членами определителя служат всевозможные произведения n элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца матрицы. При этом произведение берется со знаком «плюс», если число инверсий в перестановке первых индексов сомножителей и число инверсий в перестановке вторых индексов сомножителей в сумме дают четное число, а со знаком «минус» – в противном случае.

Определитель матрицы $\mathbf{A}$ обозначают:

$$|\mathbf{A}|, \quad \det \mathbf{A}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Элементы, строки, столбцы матрицы называют соответственно элементами, строками, столбцами определителя матрицы.

Согласно определению получаем, что

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

По определению можно получить и формулу для нахождения определителя третьего порядка:

$$2) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - $$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Для запоминания этой формулы пользуются так называемым ***правилом треугольников***.

$$2)\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Для запоминания этой формулы пользуются так называемым ***правилом треугольников***.

Определитель третьего порядка равен алгебраической сумме шести произведений. Со знаком «плюс» берутся произведение элементов главной диагонали и произведения элементов, стоящих в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны главной диагонали. Со знаком «минус» берутся произведение элементов побочной диагонали и произведения элементов, стоящих в вершинах двух равнобедренных треугольников, основания которых параллельны побочной диагонали.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix} - \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$$

Пример.

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-2)\cdot(-1)\cdot(-3)+3\cdot 3\cdot 4+5\cdot 1\cdot 1-$$
$$-5\cdot(-1)\cdot 4-(-2)\cdot 3\cdot 1-1\cdot 3\cdot(-3)=$$
$$=-6+36+5-(-20)-(-6)-(-9)=70.$$

Определители более высоких порядков вычислять по определению довольно затруднительно, так как они являются суммами достаточно большого числа слагаемых ($4!=24$, $5!=120$ и т.д.). Способы вычисления таких определителей будет рассмотрены далее.

1.7. Свойства определителей

1. *При транспонировании матрицы ее определитель не меняется.*

Из этого свойства следует, что строки и столбцы в определителе равноправны, то есть любое утверждение, верное для строк определителя, будет верно и для его столбцов.

2. *При перестановке любых двух строк (столбцов) определитель меняет знак.*

Пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

3. *Общий множитель элементов любой строки (столбца) можно выносить за знак определителя.*

Пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2\cdot 1 & 2\cdot 3 & 2\cdot 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

4. *Определитель, у которого каждый элемент некоторой строки (столбца) является суммой двух слагаемых, равен сумме двух определителей, у первого из которых в указанной строке (столбце) стоят первые слагаемые, а у второго – вторые слагаемые; остальные строки (столбцы) у всех определителей одинаковые.*

Пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2+1 & 2-3 & 1+4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Определение. Если в матрице некоторая строка (столбец) может быть представлена в виде суммы других k строк, умноженных соответственно на числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, то говорят, что данная строка (столбец) является ***линейной комбинацией*** указанных строк (столбцов).

5. *Определитель равен нулю если:*

а) он имеет строку (столбец), состоящую из нулей;

б) он имеет хотя бы две одинаковые строки (два одинаковых столбца);

в) он имеет хотя бы две пропорциональные (то есть отличающиеся множителем) строки (столбца);

г) хотя бы одна строка (столбец) является линейной комбинацией нескольких других строк (столбцов).

Пример.

$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 0$, так как третий столбец определителя является линейной комбинацией второго и первого с коэффициентами 2 и -1:

$$2\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ 10-4 \\ 16-7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

6. *Определитель не изменится, если к каждому элементу одной строки (столбца) прибавить соответствующий элемент другой строки (столбца), умноженный на некоторое число.*

Пример.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} \begin{matrix} \times(-2) \\ + \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

7. *Если* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{B}$ *– квадратные матрицы порядка* n*, то*

$$|\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}| = |\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}| = |\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}|.$$

1.8. Миноры, дополнительные миноры, алгебраические дополнения

Пусть $\mathbf{A} = (a_{ij})$ – матрица размера $m \times n$ и пусть k – некоторое число, такое, что $1 \le k$, $k \le m$, $k \le n$.

Определение. Выберем в матрице $\mathbf{A}$ произвольно k строк и k столбцов. Из элементов, стоящих на пересечении выбранных строк и столбцов, составим определитель M_k. Этот определитель называют ***минором*** k ***-го порядка*** матрицы $\mathbf{A}$ (её определителя).

Пример.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 8 & 2 \\ 3 & 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Выбирая первую строку и четвертый столбец, получаем минор первого порядка матрицы $\mathbf{A}$

$$M_1 = |7|.$$

Выбирая вторую, третью строки и первый, второй столбцы, получаем минор второго порядка матрицы $\mathbf{A}$

$$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}.$$

Выбирая первую, вторую, третью строки и первый, третий, четвертый столбцы, получаем минор третьего порядка матрицы $\mathbf{A}$

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 8 & 2 \\ 3 & 5 & 1 \end{vmatrix}.$$

Кроме полученных миноров, у матрицы $\mathbf{A}$ есть и другие миноры первого, второго и третьего порядка. Их можно найти, если выбирать строки и столбцы с новыми номерами.

Для квадратной матрицы, кроме понятия минора, вводится понятие дополнительного минора и алгебраического дополнения.

Определение. Пусть $\mathbf{A}=(a_{ij})$ – квадратная матрица порядка n. Выберем в $\mathbf{A}$ минор k-го порядка M_k. ***Дополнительным минором*** к минору M_k называется определитель матрицы, оставшейся после вычёркивания тех строк и столбцов матрицы $\mathbf{A}$, которые входят в минор $\mathbf{M}_k$. ***Алгебраическим дополнением*** A_k минора M_k называется дополнительный к нему минор, умноженный на $(-1)^S$, где S – сумма номеров строк и столбцов данной матрицы, которые входят в минор M_k.

Пример.

$$|\mathbf{A}|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 5 & 6 & 7 & 8\\ 9 & 10 & 11 & 12\\ 13 & 14 & 15 & 16\end{vmatrix}.$$

Выберем минор второго порядка $M_2=\begin{vmatrix}2 & 4\\ 6 & 8\end{vmatrix}$.

Тогда алгебраическим дополнением к нему будет

$$A_2=(-1)^{1+2+2+4}\begin{vmatrix}9 & 11\\ 13 & 15\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}9 & 11\\ 13 & 15\end{vmatrix}.$$

Замечание. Дополнительный минор элемента a_{ij} (будем обозначать его M_{ij}) – это определитель порядка $n-1$, полученный из определителя $|\mathbf{A}|$ вычеркиванием строки с номером i и столбца с номером j.

Пример.

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{vmatrix}.$$

Выберем минор второго порядка $M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$.

Тогда алгебраическим дополнением к нему будет

$$A_2 = (-1)^{1+2+2+4} \begin{vmatrix} 9 & 11 \\ 13 & 15 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 9 & 11 \\ 13 & 15 \end{vmatrix}.$$

Замечание. Дополнительный минор элемента a_{ij} (будем обозначать его M_{ij}) – это определитель порядка $n-1$, полученный из определителя $|\mathbf{A}|$ вычеркиванием строки с номером i и столбца с номером j. А алгебраическое дополнение элемента a_{ij} (будем обозначать его A_{ij}) – это произведение $(-1)^{i+j} M_{ij}$.

1.9. Теорема Лапласа и ее следствие

Теорема 1.1 (Лапласа). *Пусть в определителе порядка n выбрано k строк (столбцов), где $1 \le k \le n-1$. Тогда определитель равен сумме произведений всех миноров k-го порядка, содержащихся в выбранных строках (столбцах), на их алгебраические дополнения.*

Следствие 1.2 (теоремы Лапласа). *Определитель равен сумме произведений всех элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения:*

$$|\mathbf{A}| = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in},$$
$$|\mathbf{A}| = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \ldots + a_{nj} \cdot A_{nj}.$$

Полученные выражения называют ***разложением определителя по строке*** или ***столбцу*** соответственно. Они позволяют свести вычисление определителя порядка n к вычислению n определителей порядка $n-1$.

Пример.
Вычислим

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Разложив по первому столбцу, получаем

$$|\mathbf{A}| = 1\cdot A_{11} + (-1)\cdot A_{21} + (-1)\cdot A_{31} + 2\cdot A_{41} =$$

$$= 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)\cdot(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+(-1)\cdot(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\cdot(-1)^{4+1}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\cdot1\cdot17 + (-1)\cdot(-1)\cdot(-57) + (-1)\cdot1\cdot(-22) + 2\cdot1\cdot(-42) = -102.$$

Замечание. Используя свойства определителей, можно преобразовать определитель порядка n так, чтобы все элементы некоторой строки или столбца, кроме одного, равнялись нулю. Тогда раскладывая определитель по этой строке или столбцу, получаем всего лишь один определитель порядка $n-1$, то есть значительно уменьшаем количество вычислений.

1.10. Понятие обратной матрицы

Определение. ***Обратной*** матрице $\mathbf{A}$ называется матрица, обозначаемая $\mathbf{A}^{-1}$, такая, что $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$.

Используя определение обратной матрицы, можно показать, что справедливы следующие утверждения.

Лемма 1.3. *Если матрица* $\mathbf{A}$ *имеет обратную матрицу, то* $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{A}^{-1}$ *– квадратные матрицы одинакового порядка.*

Доказательство.

Чтобы существовали произведения $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}$ и $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}$ необходимо, чтобы матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^{-1}$ имели соответственно размеры $n \times m$ и $m \times n$.

Тогда матрица $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}$ будет иметь размер $n \times n$, а матрица $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}$ – размер $m \times m$. Но для равенства $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}$ необходимо, чтобы размеры матриц $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1}$ и $\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}$ совпадали, то есть $n = m$.

Лемма доказана.

Лемма 1.4. *Если обратная матрица существует, то она единственная.*

Доказательство.

Пусть существует две матрицы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$, такие, что

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E} \quad \text{и} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{C} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}.$$

Тогда существует и произведение $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$, причем согласно свойствам операции умножения матриц,

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{C},$$

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{E} = \mathbf{B}.$$

Получаем, что $\mathbf{B} = \mathbf{C}$.

Лемма доказана.

Лемма 1.5. *Если матрица* $\mathbf{A}$ *имеет обратную матрицу, то её определитель отличен от нуля.*

Доказательство.

В лемме 1.3 утверждается, что $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}^{-1}$ – квадратные матрицы одинакового порядка. Тогда согласно свойству 7 определителей

$$\left| \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} \right| = \left| \mathbf{A} \right| \cdot \left| \mathbf{A}^{-1} \right|.$$

Но $\left| \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} \right| = |\mathbf{E}|$, а $\left| \mathbf{E} \right| = 1$, следовательно, $\left| \mathbf{A} \right| \cdot \left| \mathbf{A}^{-1} \right| = 1$, откуда получаем, что $\left| \mathbf{A} \right| \neq 0$ и $\left| \mathbf{A}^{-1} \right| \neq 0$.

Лемма доказана.

1.11. Нахождение обратной матрицы

Оказывается, что утверждение леммы 1.5 верно и в обратную сторону. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.6 (об обратной матрице). *Пусть* $\mathbf{A}$ *– квадратная матрица порядка* n. *Матрица* $\mathbf{A}$ *имеет обратную тогда и только тогда, когда ее определитель* $|\mathbf{A}|$ *отличен от нуля. Причем*

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \mathbf{S}^{T},$$

где $\mathbf{S}$ *– матрица, составленная из алгебраических дополнений элемен-*

Теорема 1.6 (об обратной матрице). *Пусть* $\mathbf{A}$ *– квадратная матрица порядка* n. *Матрица* $\mathbf{A}$ *имеет обратную тогда и только тогда, когда ее определитель* $|\mathbf{A}|$ *отличен от нуля. Причем*

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \mathbf{S}^{T},$$

где $\mathbf{S}$ *– матрица, составленная из алгебраических дополнений элемен-*
тов матрицы $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица, определитель которой отличен от нуля, называется ***невырожденной***.

Матрицу $\mathbf{S}^T$ называют ***союзной*** к матрице $\mathbf{A}$.

Доказательство.

1) Пусть матрица $\mathbf{A}$ имеет обратную матрицу. Тогда согласно лемме 1.5, $|\mathbf{A}| \neq 0$.

2) Пусть $|\mathbf{A}| \neq 0$. Надо доказать, что матрица $\mathbf{A}$ имеет обратную матрицу. Для этого покажем, что матрица $\frac{1}{|\mathbf{A}|} \cdot \mathbf{S}^T$ является обратной $\mathbf{A}$, то есть что $\mathbf{A} \cdot (\frac{\mathbf{1}}{|\mathbf{A}|} \cdot \mathbf{S}^T) = (\frac{\mathbf{1}}{|\mathbf{A}|} \cdot \mathbf{S}^T) \cdot \mathbf{A} = \mathbf{E}$.

а) Докажем равенство $\mathbf{A} \cdot (\frac{\mathbf{1}}{|\mathbf{A}|} \cdot \mathbf{S}^T) = \mathbf{E}$, то есть $\mathbf{A} \cdot \mathbf{S}^{\mathrm{T}} = |\mathbf{A}| \cdot \mathbf{E}$.

Обозначим через $\mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{S}^T$,

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{S}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Найдем элементы матрицы $\mathbf{D}$, стоящие на главной диагонали:

$$d_{11} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n},$$
$$d_{22} = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + \ldots + a_{2n}A_{2n},$$
$$\ldots$$
$$d_{nn} = a_{n1}A_{n1} + a_{n2}A_{n2} + \ldots + a_{nn}A_{nn}.$$

Но согласно следствию 1.2 теоремы Лапласа, полученные выражения являются разложениями $|\mathbf{A}|$ по строкам, то есть

$$a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n} = |\mathbf{A}|,$$
$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + \ldots + a_{2n}A_{2n} = |\mathbf{A}|,$$
$$\ldots$$
$$a_{n1}A_{n1} + a_{n2}A_{n2} + \ldots + a_{nn}A_{nn} = |\mathbf{A}|,$$

откуда $d_{11} = d_{22} = \ldots = d_{nn} = |\mathbf{A}|$.

Найдем остальные элементы матрицы $\mathbf{D}$. Пусть $i \neq j$, тогда

$$d_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn}.$$

Заменим в матрице $\mathbf{A}$ элементы строки с номером j на соответствующие элементы строки с номером i. Построенную таким образом новую матрицу обозначим $\mathbf{A}'$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{A}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Так как в матрице $\mathbf{A}'$ две одинаковые строки, $|\mathbf{A}'| = 0$. Запишем теперь разложение $|\mathbf{A}'|$ по строке с номером j (согласно следствию 1.2 теоремы Лапласа):

$$|\mathbf{A}'| = a_{i1}A'_{j1} + a_{i2}A'_{j2} + \ldots + a_{in}A'_{jn}.$$

Но в матрицах $\mathbf{A}$ и $\mathbf{A}'$ все строки, кроме строк с номером j, одинаковые, следовательно,

$$A_{j1} = A'_{j1}, \quad A_{j2} = A'_{j2}, \quad \ldots, \quad A_{jn} = A'_{jn},$$

то есть

$$|\mathbf{A}'| = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn}.$$

Получаем, что при $i \neq j$

$$d_{ij} = a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \ldots + a_{in}A_{jn} = |\mathbf{A}'| = 0.$$

Таким образом,

$$\mathbf{D} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{S}^T = \begin{pmatrix} |\mathbf{A}| & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |\mathbf{A}| & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & |\mathbf{A}| \end{pmatrix} = |\mathbf{A}|\cdot\mathbf{E}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{A}\cdot\mathbf{S}^T = |\mathbf{A}|\cdot\mathbf{E} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}\cdot\left(\frac{\mathbf{1}}{|\mathbf{A}|}\cdot\mathbf{S}^T\right) = \mathbf{E}.$$

б) Аналогичным образом доказывается, что $\left(\frac{\mathbf{1}}{|\mathbf{A}|}\cdot\mathbf{S}^T\right)\cdot\mathbf{A} = \mathbf{E}$.

Итак, согласно доказанным пунктам а) и б), матрица $\frac{1}{|\mathbf{A}|}\cdot\mathbf{S}^T$ является обратной $\mathbf{A}$.

Теорема доказана.

1.12. Понятие ранга матрицы

Пусть $\mathbf{A} = (a_{ij})$ – матрица размера $m \times n$.

Определение. ***Рангом матрицы*** называют максимальный порядок ее миноров, отличных от нуля. ***Базисным минором*** матрицы называют её отличный от нуля минор, порядок которого равен рангу матрицы. Строки и столбцы, на пересечении которых стоят элементы базисного минора, называются ***базисными***.

Ранг матрицы $\mathbf{A}$ обычно обозначают $r(\mathbf{A})$.

Ранг матрицы легко найти, если она – треугольная, трапециевидная или ступенчатая. Рассмотрим следующие примеры.

Примеры.

1. Треугольные матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \text{ ранг} - 3, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} \text{ – базисный минор.}$$

2. Трапециевидные матрицы.

Строки и столбцы, на пересечении которых стоят элементы базисного минора, называются ***базисными***.

Ранг матрицы $\mathbf{A}$ обычно обозначают $r(\mathbf{A})$.

Ранг матрицы легко найти, если она – треугольная, трапециевидная или ступенчатая. Рассмотрим следующие примеры.

Примеры.

1. Треугольные матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},\ \text{ранг} - 3,\ \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} - \text{базисный минор.}$$

2. Трапециевидные матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix},\ \text{ранг} - 2,\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} - \text{базисные миноры.}$$

3. Ступенчатые матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix},\ \text{ранг} - 3,\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 \end{vmatrix} - \text{базисные миноры.}$$

Итак, *ранг треугольных, трапециевидных и ступенчатых матриц равен количеству ненулевых строк в них.*

Нахождение ранга матрицы произвольного вида по определению обычно бывает весьма затруднительно, так как требует вычисления большого количества определителей различного порядка. Существенно облегчает решение этой задачи метод элементарных преобразований.

1.13. Метод элементарных преобразований

Определение. *Элементарными преобразованиями матрицы* называются преобразования следующего вида:

1) умножение некоторой строки (столбца) на число, отличное от нуля;

2) прибавление к одной строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженной на некоторое число;

3) перестановка двух строк (столбцов).

Определение. Две матрица $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ называются ***эквивалентными***, если одна из них может быть получена из другой с помощью элементарных преобразований.

Если матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ эквивалентны, то пишут: $\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.7 (об инвариантности ранга матрицы относительно элементарных преобразований). *Ранг матрицы инвариантен относительно элементарных преобразований* (*эквивалентные матрицы имеют равные ранги*).

Для доказательства этого утверждения достаточно заметить, что элементарные преобразования матрицы сохраняют ее ненулевые миноры (они могут лишь изменить их знаки).

Учитывая теорему 1.7 и то, что ранг матрицы ступенчатого вида легко найти, ранг произвольной матрицы можно найти следующим образом:

1) с помощью элементарных преобразований строк получить для матрицы $\mathbf{A}$ эквивалентную матрицу $\mathbf{B}$, имеющую ступенчатый вид;

2) определить ранг матрицы $\mathbf{B}$ и, следовательно, матрицы $\mathbf{A}$.

Такой способ нахождения ранга матрицы называется ***методом элементарных преобразований***.

Замечание. При нахождении ранга матриц элементарные преобразования мы будем производить только над строками матрицы. Это условие будет необходимо в дальнейшем при решении систем линейных уравнений.

Пример.

Методом элементарных преобразований найдем ранг матрицы

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & -3 & 7 & -4 & 8 \\ 2 & -1 & 1 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Умножим первую строку матрицы на -3 и прибавим ко второй; затем умножим первую строку на -1 и прибавим к третьей. После этого прибавим к третьей строке вторую. Получаем

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -2 & 3 \\ 6 & -3 & 7 & -4 & 8 \\ 2 & -1 & 1 & -4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{B}.$$

Матрица $\mathbf{B}$ имеет ступенчатый вид, $r(\mathbf{B}) = 2$ (базисным минором является, например, $M_2 = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$). Следовательно, ранг матрицы $\mathbf{A}$ также равен двум, $r(\mathbf{A}) = 2$.

1.14. Линейная зависимость и независимость строк (столбцов) матрицы

В пункте 1.7 было введено понятие линейной комбинации строк (столбцов) матрицы. Пусть $S_1, S_2, \ldots, S_k$ – строки (столбцы) матрицы $\mathbf{A}$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ – некоторые числа. Тогда

$$\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \ldots + \alpha_k S_k$$

называется линейной комбинацией строк $S_1, S_2, \ldots, S_k$.

Будем обозначать нулевую строку (столбец) o.

Определение. Строки (столбцы) $S_1, S_2, \ldots, S_k$ называют ***линейно зависимыми***, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, не все равные нулю одновременно, такие, что $\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \ldots + \alpha_k S_k = o$, то есть нулевой строке (столбцу).

Если же равенство $\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \ldots + \alpha_k S_k = o$ возможно только при условии $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$, то строки (столбцы) называют ***линейно независимыми.***

Пример.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 5 \\ 1 & 4 & 1 & 8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} - \text{ строка } S_1 \\ - \text{ строка } S_2 \\ - \text{ строка } S_3 \\ - \text{ строка } S_4 \end{array}$$

$2S_1 + S_2 - S_4 = (0, 0, 0, 0) = o$. Следовательно, строки S_1, S_2, S_4 – линейно зависимые.

Лемма 1.8 (о линейной зависимости). *Строки (столбцы) $S_1, S_2, \ldots, S_k$ линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы одна из них является линейной комбинацией остальных.*

Доказательство.

1) Пусть $S_1, S_2, \ldots, S_k$ – линейно зависимы. Тогда по определению существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, не все равные нулю одновременно и такие, что $\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \ldots + \alpha_k S_k = o$. Пусть, например, $\alpha_1 \neq 0$. Тогда

$$\alpha_1 S_1 = -\alpha_2 S_2 - \ldots - \alpha_k S_k$$

$$\Rightarrow \quad S_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} S_2 - \ldots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1} S_k,$$

то есть S_1 является линейной комбинацией $S_2, \ldots, S_k$.

2) Пусть, например, S_1 является линейной комбинацией $S_2, \ldots, S_k$. Тогда $S_1 = \alpha_2 S_2 + \ldots + \alpha_k S_k$ или $-S_1 + \alpha_2 S_2 + \ldots + \alpha_k S_k = o$. Коэффициент при S_1 равен -1, то есть отличен от нуля. Следовательно, $S_1, S_2, \ldots, S_k$ – линейно зависимы.

Лемма доказана.

1.15. Теорема о базисном миноре

Теорема 1.9 (о базисном миноре). *1) Базисные строки (столбцы) матрицы линейно независимы.*

2) Любая строка (столбец) матрицы является линейной комбинацией базисных строк (столбцов).

Доказательство.

Докажем утверждения теоремы для столбцов матрицы. Для строк доказательство проводится аналогично.

1) Допустим, базисные столбцы матрицы – линейно зависимы. Тогда согласно лемме 1.8 о линейной зависимости, некоторый базисный столбец матрицы является линейной комбинацией остальных её базисных столбцов. Следовательно, и соответствующий столбец базисного минора является линейной комбинацией остальных его столбцов. Получаем, что согласно свойствам определителя, базисный минор равен нулю, а это противоречит определению базисного минора. Таким образом, базисные столбцы – линейно независимы.

2) Пусть r – ранг матрицы $\mathbf{A}$, M – её базисный минор. Для простоты обозначений будем считать, что

$$M = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix}.$$

Обозначим через $C_1, C_2, \ldots, C_n$ столбцы матрицы $\mathbf{A}$. Покажем, что любой столбец C_k, где $1 \le k \le n$, является линейной комбинацией базисных столбцов $C_1, C_2, \ldots, C_r$.

а) Пусть $k \le r$. Так как

$$C_1 = 1 \cdot C_1 + 0 \cdot C_2 + \ldots + 0 \cdot C_r,$$
$$C_2 = 0 \cdot C_1 + 1 \cdot C_2 + \ldots + 0 \cdot C_r,$$
$$\ldots,$$
$$C_r = 0 \cdot C_1 + 0 \cdot C_2 + \ldots + 1 \cdot C_r,$$

столбец C_k является линейной комбинацией базисных столбцов $C_1, C_2, \ldots, C_r$.

б) Пусть $k > r$, рассмотрим определители

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} & a_{1k} \\ a_{21} & \ldots & a_{2r} & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}, \text{ где } 1 \le i \le n.$$

Если $i \leq r$, то в определителе Δ_i две одинаковые строки, поэтому согласно свойствам определителя, $\Delta_i = 0$.

Если $i > r$, то Δ_i является минором матрицы $\mathbf{A}$, порядок которого больше r – ранга матрицы $\mathbf{A}$. Следовательно, $\Delta_i = 0$.

Таким образом, $\Delta_i = 0$ для всех i, где $1 \leq i \leq n$.

Определители Δ_i имеют одинаковые строки, кроме последней строки. Следовательно, алгебраические дополнения к соответствующим элементам их последних строк также одинаковые. Тогда разложив определители Δ_i по последней строке, получаем

$$a_{i1} \cdot \alpha_1 + a_{i2} \cdot \alpha_2 + ... + a_{ir} \cdot \alpha_r + a_{ik} \cdot M = 0,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ – алгебраические дополнения элементов $a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{ir}$ соответственно. Итак, для всех i, где $1 \leq i \leq n$, выполняется

$$a_{ik} = -\frac{\alpha_1}{M} a_{i1} - \frac{\alpha_2}{M} a_{i2} - \ldots - \frac{\alpha_r}{M} a_{ir}$$

$$\Rightarrow \quad C_k = -\frac{\alpha_1}{M} C_1 - \frac{\alpha_2}{M} a_2 - \ldots - \frac{\alpha_r}{M} C_r .$$

то есть столбец C_k является линейной комбинацией базисных столбцов $C_1, C_2, ..., C_r$.

Теорема доказана.

Теорема 1.10 (критерий равенства нулю определителя). *Определитель матрицы* $\mathbf{A}$ *равен нулю тогда и только тогда, когда его строки (столбцы) линейно зависимы.*

Доказательство.

1) Пусть $|\mathbf{A}| = 0$. Покажем, что его строки (столбцы) линейно зависимы.

Обозначим через r ранг матрицы $\mathbf{A}$. Так как $|\mathbf{A}| = 0$, $r < n$.

Пусть $S_1, S_2, \ldots, S_n$ – строки (столбцы) матрицы $\mathbf{A}$. Будем считать, что базисными строками (столбцами) являются $S_1, S_2, \ldots, S_r$. Тогда согласно теореме 1.9 о базисном миноре,

$$S_{r+1} = \alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \ldots + \alpha_r S_r \quad \Rightarrow$$

$$\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2 + \ldots + \alpha_r S_r - S_{r+1} + 0 \cdot S_{r+2} + \ldots + 0 \cdot S_n = o.$$

Коэффициент при S_{r+1} равен -1, то есть отличен от нуля. Следовательно, строки (столбцы) $S_1, S_2, \ldots, S_n$ – линейно зависимы.

2) Пусть строки (столбцы) матрицы $\mathbf{A}$ – линейно зависимы. Тогда согласно лемме 1.8 о линейной зависимости, некоторая строка (столбец) является линейной комбинацией остальных строк (столбцов), следовательно, $|\mathbf{A}| = 0$.

Теорема доказана.

Пр.1

Найти линейную комбинацию матриц $2A+3B$, где

$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-2 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

$$2A+3B=2\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}-2 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 0 & 2 & -2\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix}-6 & 9 & 0\\ 6 & 3 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-6 & 4+9 & 6+0\\ 0+6 & 2+3 & -2+3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & 13 & 6\\ 6 & 5 & 1\end{pmatrix}.$$

Пр.2

Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix}$. Найти произведения AB и BA (если это возможно).

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{c} \text{1-я строка матрицы } A \text{ прикладывается} \\ \text{к первому столбцу матрицы } B, \\ \text{соответствующие элементы перемножаются,} \\ \text{а произведения складываются} \end{array}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} \boxed{1\cdot3+2\cdot6+3\cdot7} & 1\cdot4+2\cdot0+3\cdot1 & 1\cdot5+2\cdot(-2)+3\cdot8 \\ 1\cdot3+0\cdot6+(-1)\cdot7 & 1\cdot4+0\cdot0+(-1)\cdot1 & 1\cdot5+0\cdot(-2)+(-1)\cdot8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 36 & 7 & 25 \\ -4 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Произведение BA не существует, так как число столбцов матрицы B не совпадает с числом строк матрицы A ($3 \neq 2$).

Пр.3

Найти значение матричного многочлена $f(A)$, если $f(x) = -2x^2 + 5x + 9$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot1+2\cdot3 & 1\cdot2+2\cdot0 \\ 3\cdot1+0\cdot3 & 3\cdot2+0\cdot0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix},$$

$$f(A) = -2A^2 + 5A + 9E = -2 \cdot \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} + 5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} + 9 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -14 & -4 \\ -6 & -12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 15 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}.$$

Пр.4

Транспонировать матрицу $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.

❍ Записывая первую и вторую строки матрицы A как первый и, соответственно, второй столбец матрицы A^T, получим матрицу $A^T = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. ●

Транспонировать матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

❍ Так как у матрицы A две строки и три столбца, то у матрицы A^T будет три строки и два столбца: $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$. ●

Пр.5

Привести к ступенчатому виду матрицу A с помощью элементарных преобразований над строками:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \\ -5 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

◐ Первый этап. Сделаем нулевыми все элементы матрицы под крайним элементом первой строки. Для этого вычтем из второй строки первую, умноженную на 3, и запишем результат во вторую строку. После этого к третьей строке прибавим первую, умноженную на 5, и запишем результат в третью строку. Получим матрицу A_1.

Второй этап. Теперь сделаем равными нулю все элементы матрицы под крайним элементом второй строки. Для этого умножим вторую строку на 3, третью строку — на 2, получившиеся строки сложим и результат запишем в третью строку. Получим ступенчатую матрицу A_2.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 0 \\ -5 & 3 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mathrm{II} - 3 \cdot \mathrm{I} \\ \mathrm{III} + 5 \cdot \mathrm{I} \end{matrix} \sim$$

$$\sim A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 2 \cdot \mathrm{III} + 3 \cdot \mathrm{II} \end{matrix} \sim$$

$$\sim A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ — ступенчатая матрица.} \quad ●$$

Пр.6 Привести к ступенчатому виду матрицу A с помощью элементарных преобразований над строками:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 5 & 0 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

○ $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 & 7 \\ 5 & 0 & 10 & 5 \end{pmatrix} \mathrm{I} \leftrightarrow \mathrm{II} \sim$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 5 & 0 & 10 & 5 \end{pmatrix} \mathrm{III} - 5 \cdot \mathrm{I} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -10 & -10 & -30 \end{pmatrix} \mathrm{III} - 10 \cdot \mathrm{II} \sim$$

$$\sim B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ — ступенчатая матрица. ●

Пр.7

Привести к ступенчатому виду матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 2 & 3 & 3 & -2 \\ 4 & 11 & -13 & 16 \\ 7 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 2 & 3 & 3 & -2 \\ 4 & 11 & -13 & 16 \\ 7 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 3 \cdot \mathrm{II} - 2 \cdot \mathrm{I} \\ 3 \cdot \mathrm{III} - 4 \cdot \mathrm{I} \\ 3 \cdot \mathrm{IV} - 7 \cdot \mathrm{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 19 & -20 \\ 0 & 17 & -19 & 20 \\ 0 & -34 & 38 & -40 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \mathrm{III} - 17 \cdot \mathrm{II} \\ \mathrm{IV} + 2 \cdot \mathrm{III} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 4 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 19 & -20 \\ 0 & 0 & -342 & 360 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ — ступенчатая матрица.}$$

Пр.8

Вычислить определитель второго порядка $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2.$$

Пр.9

Вычислить определитель 3-го порядка: $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.

Вычисляя определитель разложением по первой строке, получим:

$$3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (5 \cdot 2 - 3 \cdot 4) - 2 \cdot (2 \cdot 2 - 3 \cdot 3) + 1 \cdot (2 \cdot 4 - 5 \cdot 3) =$$

$$= 3 \cdot (-2) - 2 \cdot (-5) + 1 \cdot (-7) = -3.$$

Пр.10

Вычислить определитель с помощью «правила треугольников»

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

❍ Из шести слагаемых не равным нулю будет только одно: $+1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. ●

Пр.11

Вычислить определитель разложением по какой-нибудь строке или столбцу:

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 7 & -4 & 5 \end{vmatrix}.$$

❍ Удобнее всего вычислять определитель разложением по строке или столбцу, содержащим наибольшее количество нулей. Разложим определитель по 2-й строке:

$$(-1)^{2+1} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (25 - 21) = 8. \quad ●$$

Пр.1
2

Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix}$.

○ При разложении определителя 3-го порядка по строке или столбцу, знаки («+» или «−») перед слагаемым $a_{ij} \cdot M_{ij}$ проще всего запомнить в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель по 2-му столбцу:

$$-0 + 3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} - 0 = 3 \cdot (9 - 12) = -9.$$

●

Пр.1
3

Вычислить определитель 4-го порядка разложением по строке или столбцу:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Удобнее пользоваться разложением по строке или столбцу, содержащим наибольшее количество нулей. Разложим определитель по первой строке:

$$\Delta = (-2)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} - (-3)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} -$$

$$-2\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -2\cdot 9 + 3\cdot 31 + 0 - 2\cdot 6 = 63.$$

Пр.1
4

Вычислить определитель 4-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & b & 2 \\ 1 & c & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}.$$

- Разложим определитель по 4-ой строке:

$$\Delta = (+d) \cdot \begin{vmatrix} a & 0 & 3 \\ 0 & 0 & b \\ 1 & c & 2 \end{vmatrix} = \left[\begin{matrix}\text{разложим определитель} \\ \text{по 2-ой строке}\end{matrix}\right] =$$

$$= d \cdot (-b) \cdot \begin{vmatrix} a & 0 \\ 1 & c \end{vmatrix} = -d \cdot b \cdot a \cdot c. \quad \bullet$$

Пр.15

Вычислить определитель приведением к треугольному виду:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & n-1 \end{vmatrix}.$$

❍ Прибавляя к каждой строке определителя первую строку, получим:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \dots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{разложим по} \\ \text{первому столбцу} \end{bmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 0 & 0 & 4 & \dots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix}}_{n-1} = \begin{bmatrix} \text{повторяем разложение по} \\ \text{первому столбцу } n-2 \text{ раза} \end{bmatrix} =$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = n! \quad ●$$

Пр.16

Найти ранг матрицы методом элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Приведем матрицу к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -5 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ 2\cdot\mathrm{II}-\mathrm{I} \\ 2\cdot\mathrm{III}-\mathrm{I} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -9 & -3 & -12 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \mathrm{III}+3\cdot\mathrm{II} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 & 6 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полученная ступенчатая матрица содержит две ненулевые строки, значит ее ранг равен 2. Следовательно, ранг исходной матрицы также равен 2.

Пр.17

Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров и указать один из базисных миноров:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Так как у матрицы A есть ненулевые элементы, то $r(A) \geqslant 1$. Найдем какой-либо ненулевой минор 2-го порядка (если он существует). Таким минором является, например, $M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$. Значит, $r(A) \geqslant 2$.

Вычислим миноры 3-го порядка, окаймляющие M_2:

$$M_3^{(1)} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{разложение} \\ \text{по 2-й строке} \end{bmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 0;$$

$$M_3^{(2)} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{разложение} \\ \text{по 1-му столбцу} \end{bmatrix} =$$

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 6 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2-2) + 6 \cdot (6-4) = -12 + 12 = 0;$$

Все миноры 3-го порядка, окаймляющие M_2, равны нулю, следовательно, $r(A) < 3$. Итак, $r(A) = 2$.

Одним из базисных миноров является $M_2 = \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Пр.18

Найти (методом присоединенной матрицы) матрицу, обратную к данной:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Найдем $\det A$:

$$\det A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= -48 - 2 \cdot (-42) + 3 \cdot (32 - 35) = -48 + 84 - 9 = 27 \neq 0.$$

Так как $\det A \neq 0$, то матрица A^{-1} существует.

2) Найдем алгебраические дополнения ко всем элементам матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 5 \cdot 0 - 6 \cdot 8 = -48;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -(4 \cdot 0 - 6 \cdot 7) = 42;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 4 \cdot 8 - 5 \cdot 7 = -3;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = 24; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -21;$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 6; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3.$$

3) Запишем матрицу $\widetilde{A} = (A_{ij})^T = \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$.

4) Найдем матрицу A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \widetilde{A} = \frac{1}{27} \cdot \begin{pmatrix} -48 & 24 & -3 \\ 42 & -21 & 6 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{14}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку:

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} -\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{14}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{16}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{1}{9} \\ \frac{14}{9} & -\frac{7}{9} & \frac{2}{9} \\ -\frac{1}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{1}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad \bullet$$

Пр.19

Найти (методом элементарных преобразований) матрицу, обратную к данной:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Записывая матрицу $\Gamma = (A|E)$ размера (3×6), с помощью элементарных преобразований над строками приведем ее сначала к ступенчатому виду $\Gamma_1 = (A_1|B)$, а затем к виду $\Gamma_2 = (E|A^{-1})$:

$$\Gamma = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \mathrm{II}-\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-2\cdot\mathrm{I} \end{array} \sim$$

$$\sim \Gamma_1 = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \mathrm{II}+\mathrm{III} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{III}:2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1/2 \end{array}\right) \begin{array}{l} \mathrm{I}-\mathrm{II}-\mathrm{III} \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 5 & -1 & -3/2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1/2 \end{array}\right) = \Gamma_2.$$

Итак, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3/2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$.

Сделаем проверку:

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -1 & -3/2 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

Пр.20

Решить матричное уравнение:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

❍ Запишем данное матричное уравнение в виде $AX = B$. Его решением является матрица $X = A^{-1}B$ (если существует матрица A^{-1}).

1) Найдем определитель матрицы A:

$$\det A = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Значит, обратная матрица A^{-1} существует, и исходное уравнение имеет (единственное) решение.

2) Найдем обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \widetilde{A} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

3) Найдем матрицу

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$ ●