Теория колебаний

Гармоническими колебаниями называются колебания, при которых колеблющаяся физическая величина изменяется по закону синуса (или косинуса).

Различные ***периодические процессы*** (процессы, повторяющиеся через равные промежутки времени) могут быть представлены в виде суммы (суперпозиции) гармонических колебаний.

Гармоническое колебание величины s описывается уравнением типа

$$s = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$$

где: A – амплитуда колебания — максимальное значение колеблющейся величины;

ω – круговая (циклическая) частота;

φ – начальная фаза колебания в момент времени $t = 0$;

$(\omega t + \varphi)$ – фаза колебания в момент времени t.

Фаза колебания определяет значение колеблющейся величины в данный момент времени. Так как косинус изменяется в пределах от +1 до –1, то s может принимать значения от $+A$ до $-A$.

Дифференциальное уравнение гармонического осциллятора

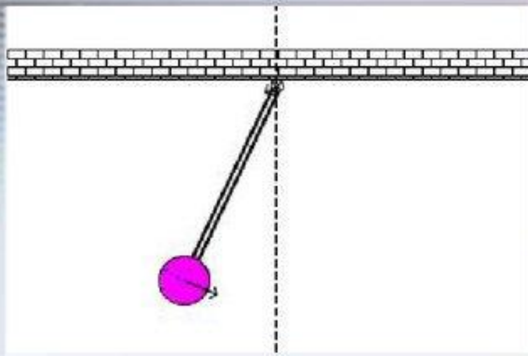
$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Решение этого уравнения:

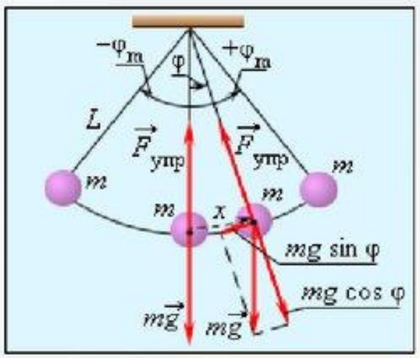
$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

Здесь x – колеблющаяся величина.

Математический маятник



Математическим маятником называют идеализированную систему, состоящую из невесомой и нерастяжимой нити, на которой подвешена масса, сосредоточенная в одной точке (материальная точка), совершающая под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной точки или оси.



Вращательный момент сил: $M = -mgl\sin\varphi$

$J = ml^2$ Уравнение моментов: $ml^2\ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$$

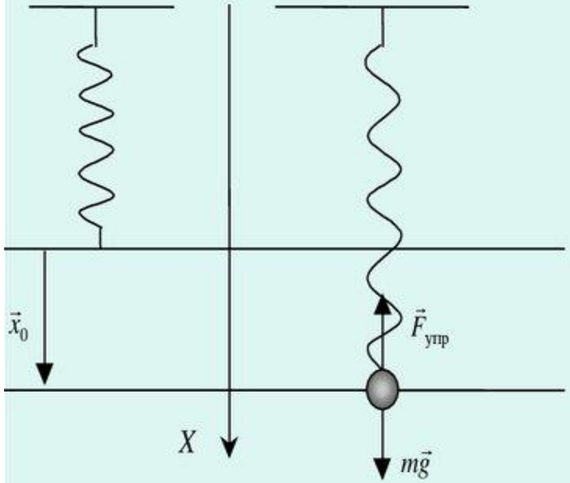
Ограничимся малыми колебаниями: $\sin\varphi \approx \varphi$

$$\frac{g}{l} = \omega_0^2; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

1.1. Пружинный маятник



Уравнение основного закона динамики поступательного движения материальной точки (второй закон Ньютона):

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = m\vec{a}$$

Пружинный маятник в положении равновесия

$$Mg - kx0 = 0.$$

Отсюда $mg = kx_0 \Rightarrow k/m = g/x_0 = \omega_0^2$

$$mg - k(x_0 + x) = m\ddot{x}$$

$$-kx = m\ddot{x}$$

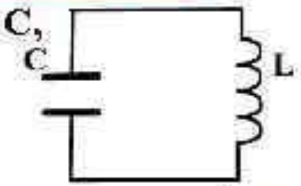
$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Поскольку $k/m = \omega_0$ – собственная циклическая частота колебаний пружинного маятника, то дифференциальное уравнение собственных колебаний можно представить в виде:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

5.1.8. *Томсоновский колебательный контур. Формула Томсона*

- ***Свободные электрические колебания*** возникают в ***простом колебательном контуре***, состоящем из ***конденсатора*** с электроёмкостью **C**, соединённой с ним последовательно ***катушкой индуктивности*** **L** и ***электросопротивлением*** **R=0**. Такой колебательный контур называется ***идеальным***.



Конденсатор заряжается путём сообщения его обкладкам электрического заряда **+q** и **-q**. При этом между обкладками возникает напряжение **U=q/C**.

В результате перетекания зарядов с одной обкладки на другую в контуре возникает электрический ток, сила которого равна $\mathbf{I} = \dot{\mathbf{q}}$. Нарастающий электрический ток возбуждает в контуре ЭДС самоиндукции: $\varepsilon_{си} = -L\dot{I} = -L\ddot{q}$. Согласно второму правилу Кирхгофа $\varepsilon_{си} = U$ или $-L\ddot{q} = q/C$. Это уравнение является **дифференциальным уравнением идеального колебательного контура**.

В стандартной форме оно имеет вид: $\boxed{\ddot{q} + \frac{1}{LC} q = 0}$.

Сравнение его с ***дифференциальным уравнением гармонических колебаний*** позволяет выразить ***частоту*** и ***период*** колебаний идеального контура: $\boxed{\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$, $\boxed{T = 2\pi\sqrt{LC}}$.

Формула, определяющая период колебаний называется **формулой Томсона**.

Решением дифференциального уравнения является : $\boxed{q(t) = q_0 \cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}} t + \varphi_0\right)}$,

где $\mathbf{q_0}$ и $\boldsymbol{\varphi_0}$ - постоянные величины, определяемые ***начальными условиями***.

Плазменные (ленгмюровские) колебания

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi n e^2}{m_e}}$$

Задача «Хищник-жертва»

ВОЗДЕЙСТВИЕ ХИЩНИКОВ НА ПОПУЛЯЦИИ ЖЕРТВ.

Многие хищные позвоночные не подрывают численности жертв, и приводят ее к стабилизации; они изымают часть молодняка и животных лишенных кормового участка, что не дает популяции жертв резко подорвать свои кормовые ресурсы.
Нередко полное уничтожение хищников приводило сперва к резкому увеличению численности жертв, а затем к ее катастрофическому падению из-за эпизоотии или подрыва кормовой базы.

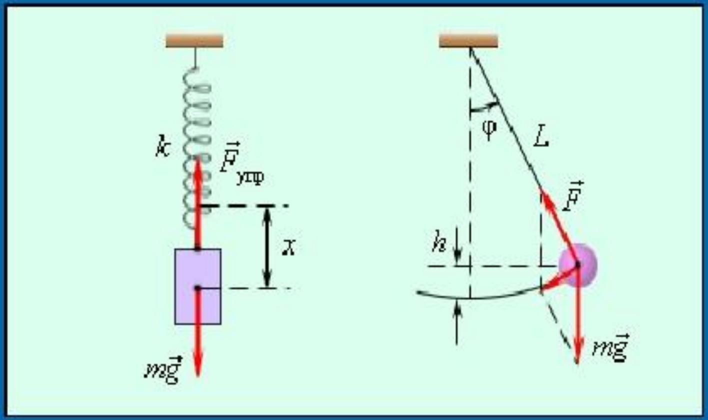
Многие хищники не способны предотвращать вспышки численности жертв, так как у них скорость роста популяции ниже, чем у жертв.
Поэтому наблюдаются циклические колебания численности хищника и жертвы, причем эти циклы тесно связаны во времени: за подъемом численности жертв ее некоторым запаздыванием следует подъем численности хищника, после которого численность жертв начинает падать.
Классический пример колебания численности зайцев и рысей в Канаде.

Классификация колебаний

Тип колебаний	Каковы условия возникновения колебаний	Чем определяется период колебаний	Чем определяется амплитуда колебаний
Свободные	Колебательная система (КС) при наличии первоначального запаса энергии	Собственными параметрами КС. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$; $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$; $T = 2\pi\sqrt{LC}$	Начальными условиями
Вынужденные	Любая система при наличии внешнего, периодически изменяющегося воздействия	Частотой внешнего, периодически изменяющегося воздействия	Амплитудой внешнего воздействия, соотношением частот $\nu_{внешн} = \nu_{собств}$, диссипативными потерями энергии в КС
Автоколебания	Автоколебательная система (АКС) при наличии внешнего источника энергии	Собственными параметрами КС	Параметрами АКС (ее нелинейностью)
Параметрические	Колебательная система (КС) при периодически изменяющихся параметрах КС	Собственными параметрами КС	Соотношением частоты изменения параметров КС с ее собственной частотой

- Свободные

Колебания, возникающие при однократном воздействии внешней силы (первоначальном сообщении энергии) и при отсутствии внешних воздействий на колебательную систему.

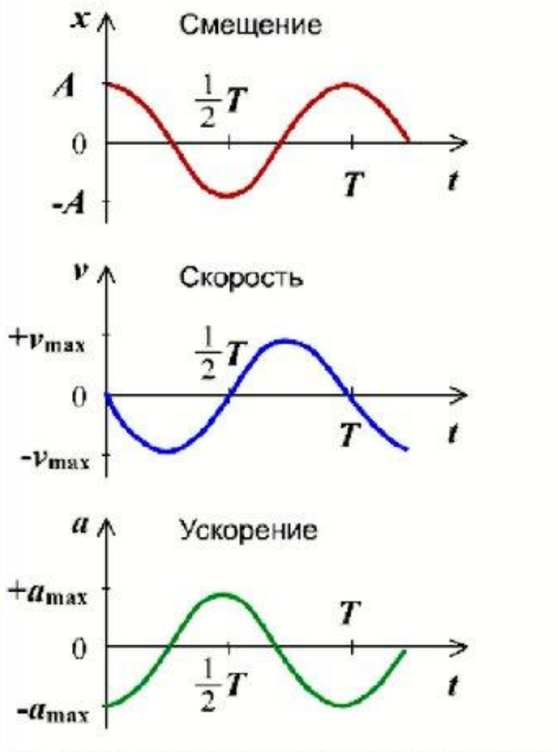


Условия возникновения свободных колебаний

1. Колебательная система должна иметь положение устойчивого равновесия.
2. При выведении системы из положения равновесия должна возникать равнодействующая сила, возвращающая систему в исходное положение
3. Инертность системы
4. Силы трения (сопротивления) очень малы.

Изменение скорости и ускорения при гармоническом колебании

Если колебание описывать по закону косинуса



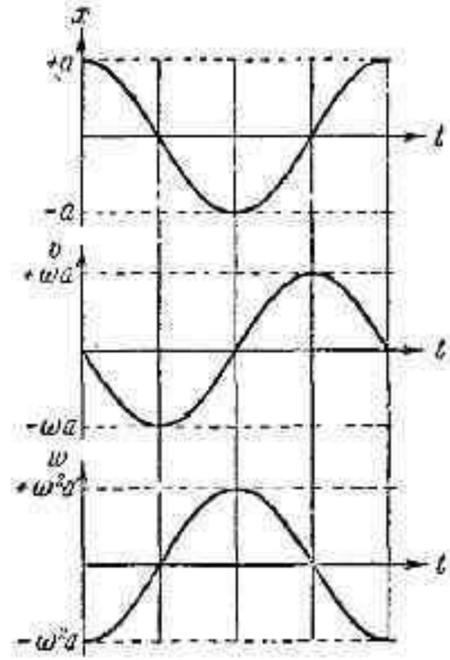
Графики смещения, скорости, ускорения при гармонических колебаниях

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0) = A\omega\cos\left[(\omega t + \varphi_0) + \frac{\pi}{2}\right]$$

$$a = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0) = A\omega^2\cos\left[(\omega t + \varphi_0) + \pi\right]$$

- Смещение: $x = a\cos(\omega_0 t + \alpha)$
- Скорость: $v = \dot{x} = -a\omega_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) = a\omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \alpha + \frac{\pi}{2}\right)$
- Ускорение: $\ddot{x} = -a\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha) = a\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \alpha + \pi)$
- Ускорение и смещение в противофазе!
- Кинетическая энергия равна:
$$E_k = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{ma^2\omega_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t + \alpha)$$
- Потенциальная энергия равна:
$$E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{ka^2}{2}\cos^2(\omega_0 t + \alpha)$$
- Полная энергия:
$$E = E_k + E_p = \frac{ka^2}{2}\left(\text{или } \frac{ma^2\omega_0^2}{2}\right)$$
- Ек и Ер изменяются с частотой в два раза превышающие частоту гармонических колебаний. Среднее значение Ек = среднему значению Ер = ½ Е



ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ СВОБОДНЫХ ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ

$$\boxed{\frac{d^2S}{dt^2} + 2\delta\frac{dS}{dt} + \omega_0^2 S = 0}$$

Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний линейной системы.

Где:

- S – колеблющаяся величина описывающая физический процесс.
- $\delta = const$ – коэффициент затухания
- ω_0 – циклическая частота свободных НЕЗАТУХАЮЩИХ колебаний той же системы (то есть при отсутствии потерь энергии $\delta = 0$), иначе говоря – собственная циклическая частота системы.

Затухающие колебания.
Решение дифференциального уравнения затухающих колебаний.

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0. \qquad (1)$$

В уравнение (1) подставим функцию $x(t)=e^{\lambda t}$ и получим характеристическое уравнение:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{d}{dt}(e^{\lambda t})=\lambda e^{\lambda t}, \qquad \frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d^2}{dt^2}(e^{\lambda t})=\lambda^2e^{\lambda t},$$

$$\lambda^2e^{\lambda t}+2\beta\lambda e^{\lambda t}+\omega_0^2e^{\lambda t}=0$$

$\lambda^2+2\beta\lambda+\omega_0^2=0$ - характеристическое уравнение.

Затухающие колебания.
Решение дифференциального уравнения затухающих колебаний.

Корни этого характеристического уравнения:

$$\lambda_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}; \qquad \lambda_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}.$$

Как известно, общим решением дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами является функция:

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Подкоренные выражения в формулах, определяющих корни характеристического уравнения, в зависимости от значений параметров β и ω могут быть как положительными, так и отрицательными. Это приводит к тому, что существует два класса решений.

Затухающие колебания.
Решение дифференциального уравнения затухающих колебаний.

$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$. $\quad \lambda_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$; $\quad \lambda_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$.

1. Если $\beta < \omega_0$, то подкоренное выражение будет отрицательным, а корни характеристического уравнения – комплексными.

Обозначим $\sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = i\omega$, тогда

$$\lambda_1 = -\beta + i\omega, \qquad \lambda_2 = -\beta - i\omega.$$

Решение уравнения в этом случае будет иметь вид:

$$x(t) = C_1 e^{-\beta t} e^{-i\omega t} + C_2 e^{-\beta t} e^{i\omega t}; \qquad x(t) = e^{-\beta t}(C_1 e^{-i\omega t} + C_2 e^{i\omega t}).$$

Или в действительной форме: $x(t) = e^{-\beta t} ACos(\omega t + \varphi_0)$.

Здесь A и φ_0 – произвольные постоянные имеющие смысл амплитуды и начальной фазы колебаний, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$.

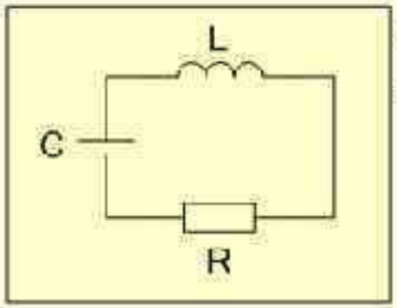
Затухающие колебания.
Решение дифференциального уравнения затухающих колебаний.

$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}$. $\lambda_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$; $\lambda_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$.

2. Если $\beta > \omega_0$, то подкоренные выражения в формулах, определяющих корни характеристического уравнения будут положительными, а корни характеристического уравнения λ_1 и λ_2 – действительными.

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Уравнение затухающих электромагнитных колебаний



Дифференциальное уравнение можно переписать в виде

$$L\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{C}=0.$$

Или $\quad \dfrac{d^2q}{dt^2}+\dfrac{R}{L}\dfrac{dq}{dt}+\dfrac{1}{LC}q=0,\quad$ где $\quad \dfrac{1}{LC}=\omega_0^2,\quad \dfrac{R}{L}=2\beta.$

$$\frac{d^2q}{dt^2}+2\beta\frac{dq}{dt}+\omega_0^2q=0.$$

Полученное уравнение аналогично уравнению затухающих механических колебаний. Его решение аналогично решению уравнения для механических колебаний.

Затухающие колебания

Уравнение затухающих колебаний: $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

$2\beta = \frac{r}{m};\ \omega_0^2 = \frac{k}{m}$

r – коэффициент сопротивления $F \sim rv$,
k – коэффициент квазиупругой силы,
ω_0 – собственная частота системы

При не слишком большом затухании $\beta < \omega_0$

$$x(t) = A_0 e^{-\beta t}\cos(\omega t + \alpha)$$

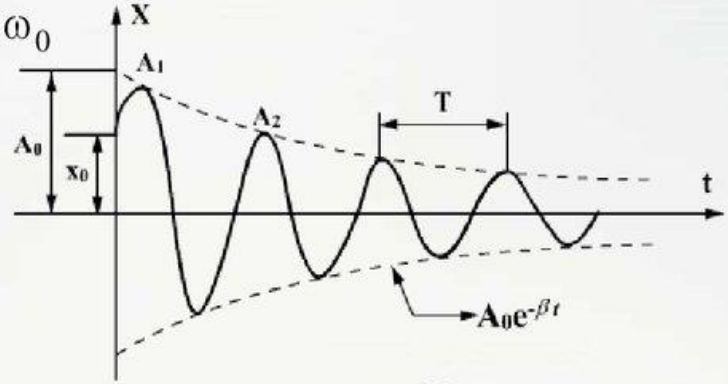


рис 7.8

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}$$

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\beta T}$$ Декремент затухания

$$\lambda = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T$$ Логарифмический декремент затухания

$$A(t) = A_0 e^{-\frac{\lambda}{T}t}$$

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e$$ Добротность

Энергия колеблющейся системы

$$E = \frac{kx^2}{2} + \frac{m\dot{x}^2}{2}$$

$$E = E_0 e^{-2\beta t}$$

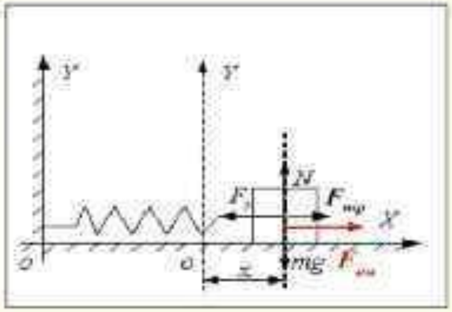
Уравнение вынужденных колебаний

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{r}{m}\frac{dx}{dt}+\frac{k}{m}x(t)=\frac{F_0}{m}Cos(\omega_B t)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x(t)=f_0Cos(\omega_B t)$$

$f_0 = F_0/m$ – приведённая амплитуда внешней силы

Вынужденные колебания.
Вынужденные механические колебания.



Уравнение движения можно переписать в виде:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - r\frac{dx}{dt} + F_0\cos(\Omega t).$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + r\frac{dx}{dt} + kx = F_0\cos(\Omega t)$$

Разделим уравнение на m:

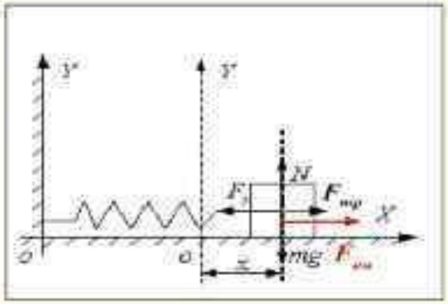
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{r}{m}\frac{dx}{dt} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t).$$

Введем следующие обозначения: $2\beta = \frac{r}{m}$, $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$,

ω_0 – собственная частота незатухающих колебаний без учета трения.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \qquad f_0 = \frac{F_0}{m}.$$

Вынужденные колебания.
Вынужденные механические колебания.



Теперь можно переписать уравнение движения в виде:

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=f_0\cos(\Omega t). \qquad (1)$$

Мы получили **дифференциальное уравнение вынужденных колебаний**.

С точки зрения математики это линейное неоднородное дифференциальное уравнение. Приступим к его решению.

Как известно из математики, общее решение неоднородного дифференциального уравнения вида (1) равно сумме общего решения однородного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2}+2\beta\frac{dx}{dt}+\omega_0^2x=0, \qquad (2)$$

плюс частное решение неоднородного дифференциального уравнения (1).

Вынужденные колебания. Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения. Механические колебания.

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения есть сумма общего решения однородного дифференциального уравнения и частного решения неоднородного уравнения

$$x(t) = e^{-\beta t} A Cos(\omega t + \varphi_0) + B Cos(\Omega t + \varphi)$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{r}{2m}\right)^2}, \qquad \beta = \frac{r}{2m}, \qquad f_0 = \frac{F_0}{m},$$

$$B = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\beta^2\Omega^2}}, \qquad \varphi = arctg\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.$$

Вынужденные колебания.
Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения.

Решаем линейное однородное уравнение (ещё один раз!):

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta\frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0. \qquad (2)$$

В уравнение (2) подставим функцию $x(t) = e^{\lambda t}$ и получим характеристическое уравнение:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(e^{\lambda t}) = \lambda e^{\lambda t}, \qquad \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(e^{\lambda t}) = \lambda^2 e^{\lambda t},$$

$$\lambda^2 e^{\lambda t} + 2\beta\lambda e^{\lambda t} + \omega_0^2 e^{\lambda t} = 0$$

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$$ - характеристическое уравнение.

Вынужденные колебания.
Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения.

Корни этого характеристического уравнения:

$$\lambda_1 = -\beta + \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}; \qquad \lambda_2 = -\beta - \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}.$$

Как известно, общим решением дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами является функция:

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}.$$

Подкоренные выражения в формулах, определяющих корни характеристического уравнения, в зависимости от значений параметров β и ω могут быть как положительными, так и отрицательными. Это приводит к тому, что существует два класса решений. Но в этот раз мырассмотрим только колебательное решение.

Вынужденные колебания.
Частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения.

$$\begin{cases} \left| B\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right) Cos\varphi - 2B\beta\Omega Sin\varphi - f_0 \right| = 0 \\ \left| -B\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right) Sin\varphi - 2B\beta\Omega Cos\varphi \right| = 0 \end{cases}$$

Из второго уравнения системы

$$tg\varphi = -\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}, \qquad \varphi = arctg\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.$$

Чтобы определить величину B, сначала выразим $Sin\varphi$, через B, β, ω, и Ω.

Для этого умножим первое из уравнений системы на $sin\varphi$, а второе – на $cos\varphi$.

$$\begin{cases} \left(\omega_0^2 - \Omega^2\right) Sin\varphi Cos\varphi - 2\beta\Omega Sin^2\varphi = \dfrac{f_0}{B} Sin\varphi \\ -\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right) Sin\varphi Cos\varphi - 2\beta\Omega Cos^2\varphi = 0 \end{cases}$$

Вынужденные колебания.
Частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения.

$$\begin{cases} \left(\omega_0^2 - \Omega^2\right) Sin\varphi Cos\varphi - 2\beta\Omega Sin^2\varphi = \dfrac{f_0}{B} Sin\varphi \\ -\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right) Sin\varphi Cos\varphi - 2\beta\Omega Cos^2\varphi = 0 \end{cases}$$

Сложив уравнения, получим

$$-2\beta\Omega\left(Sin^2\varphi + Cos^2\varphi\right) = \frac{f_0}{B} Sin\varphi$$

$$Sin\varphi = -\frac{2\beta\Omega}{f_0}$$

По определению

$$tg\varphi = \frac{Sin\varphi}{Cos\varphi} = \frac{Sin\varphi}{\sqrt{1 - Sin^2\varphi}}.$$

Ранее было получено

$$tg\varphi = -\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.$$

Вынужденные колебания.
Частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения.

Итак, мы установили, что функция $x(t) = B\cos(\Omega t + \varphi)$ может быть решением неоднородного дифференциального уравнения (1) только тогда, когда параметры B и φ определяются формулами

$$B = \frac{f_0}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\beta^2\Omega^2}},$$

$$\varphi = arctg\,\frac{2\beta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}.$$

$$f_0 = \frac{F_0}{m}$$