20.05.20

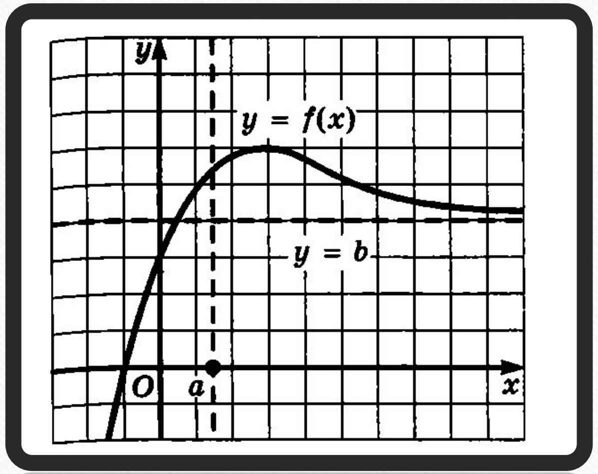
Предел функции

I. Предел функции на бесконечности

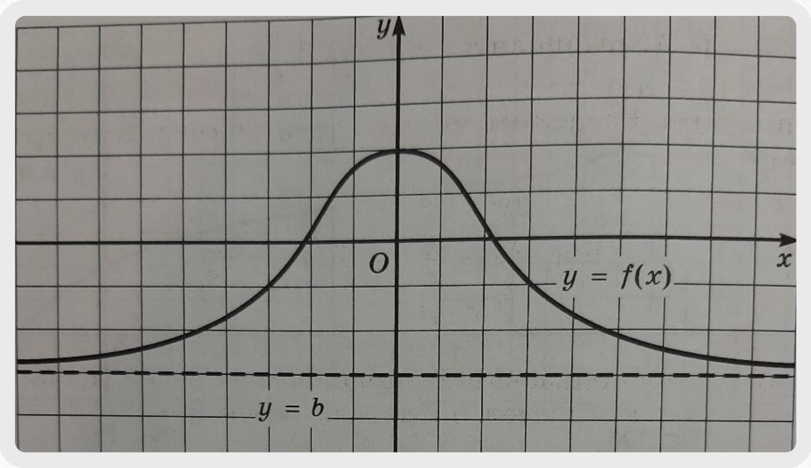
1. Понятие предела функции на бесконечности

$\lim\limits_{n \to \infty} f(n) = b$ - предел числовой последовательности (функции натурального аргумента) $n \in N$

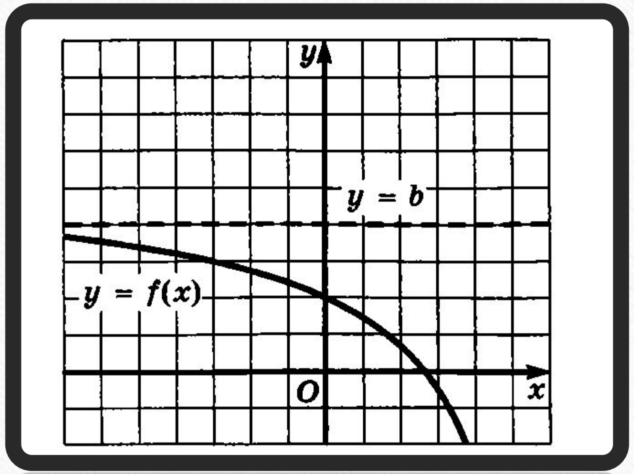
$\boxed{\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b}$ - предел функции f(x) при стремлении x к бесконечности равен b $x \in R$



$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$



$\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$



$\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$

I. Предел функции на бесконечности

2. Свойства вычисления пределов функций на бесконечности

1) *Для любого натурального показателя m и любого коэффициента k справедливо соотношение*

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\frac{k}{x^m}=0.}$$

2) *Если* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=c$, *то*

а) *предел суммы равен сумме пределов:*

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)+g(x))=b+c;$$

б) *предел произведения равен произведению пределов:*

$$\lim_{x\to\infty} f(x)g(x)=bc;$$

в) *предел частного равен частному пределов (разумеется, при условии, что* $c\neq 0$*):*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{b}{c};$$

г) *постоянный множитель можно вынести за знак предела:*

$$\lim_{x\to\infty} kf(x)=kb.$$

I. Предел функции на бесконечности

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^5-3x^3+1}{x^5+4x^2+2x}$

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^5-3x^3+1}{x^5+4x^2+2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^5}{x^5}-\frac{3x^3}{x^5}+\frac{1}{x^5}}{\frac{x^5}{x^5}+\frac{4x^2}{x^5}+\frac{2x}{x^5}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^5}}{1+\frac{4}{x^3}+\frac{2}{x^4}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^5}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x^3}+\frac{2}{x^4}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}2-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^5}}{\lim\limits_{x\to\infty}1+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^3}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^4}}=\frac{2-0+0}{1+0+0}=\frac{2}{1}=2$$

II. Предел функции на бесконечности

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3+x^2+1}{2x^4-3x^2+5x+2}$

Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+x^2+1}{2x^4-3x^2+5x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5x^3}{x^4}+\frac{x^2}{x^4}+\frac{1}{x^4}}{\frac{2}{x^4}-\frac{3x^2}{x^4}+\frac{5x}{x^4}+\frac{2}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}}{2-\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x^3}+\frac{2}{x^4}}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{3}{x^2}+\frac{5}{x^3}+\frac{2}{x^4}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^4}}{\lim\limits_{x\to\infty}2-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3}{x^2}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x^3}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^4}}=$$

$$=\frac{0+0+0}{2-0+0+0}=\frac{0}{2}=0$$

II. Предел функции на бесконечности

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^{6}+x^{2}+1}{2x^{4}-3x^{2}+5x+2}$

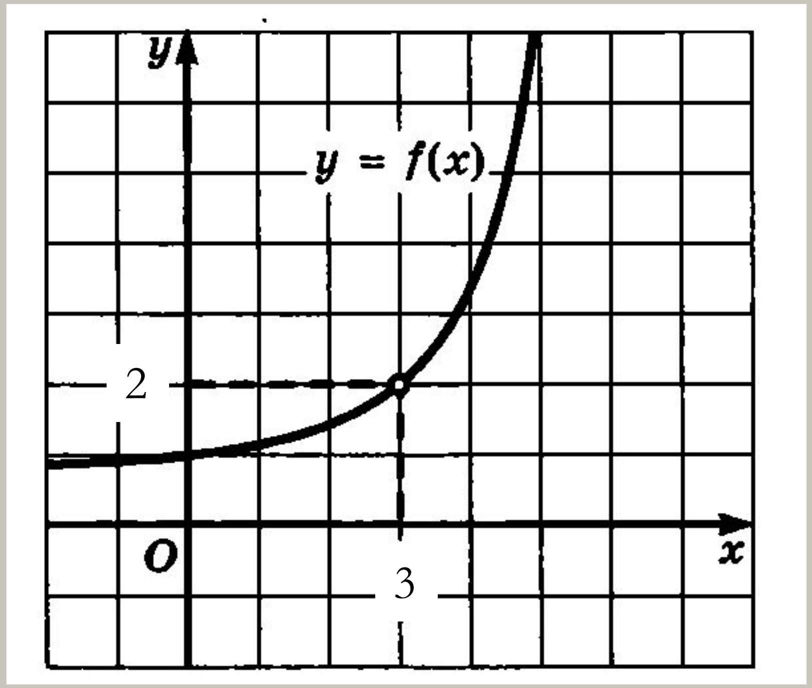
Решение.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^{6}+x^{2}+1}{2x^{4}-3x^{2}+5x+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{1}{x^{4}}+\frac{1}{x^{6}}}{\frac{2}{x^{2}}-\frac{3}{x^{4}}+\frac{5}{x^{5}}+\frac{2}{x^{6}}}=\infty,$$ значит, не существует.

Неопределенность вида $\left(\frac{a}{0}\right)$

II. Предел функции в точке

1. Предел функции при x → *a* существует тогда и только тогда, когда существуют и равны между собой оба односторонних предела.



$$\lim_{x\to 3-} f(x) = 2 - \textit{левый предел}$$

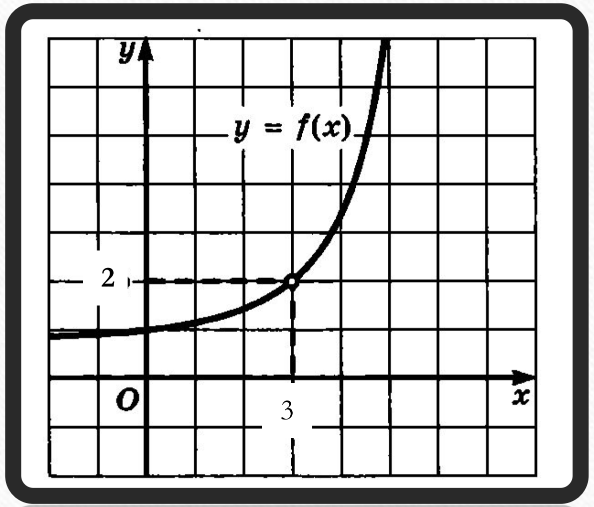
(подходим к x = 3 слева)

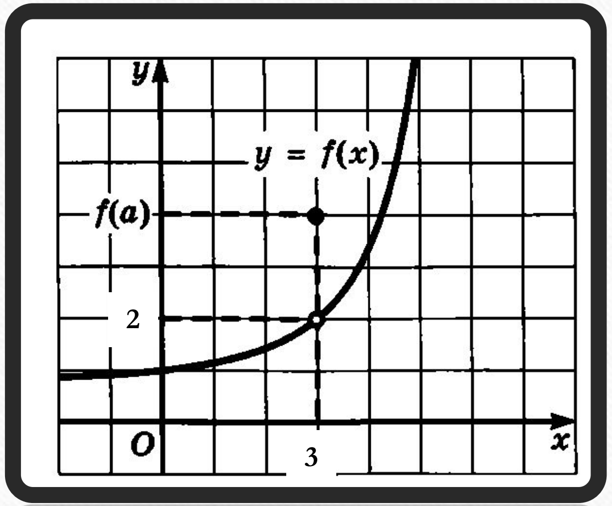
$$\lim_{x\to 3+} f(x) = 2 - \textit{правый предел}$$

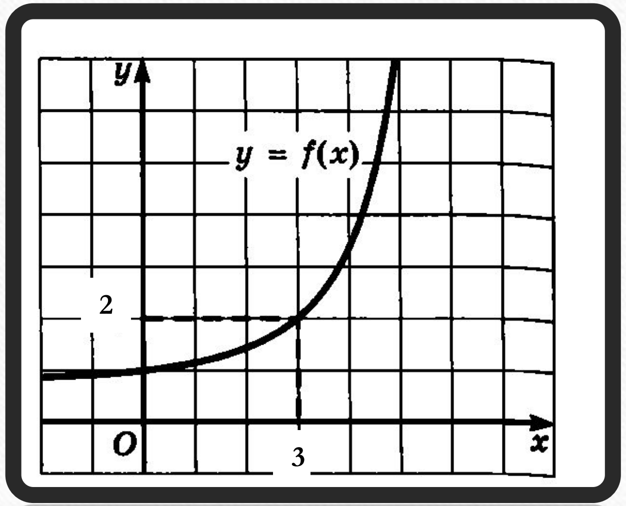
(подходим к x = 3 справа)

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 2 - \textit{предел существует}$$

II. Предел функции в точке







$$\lim_{x\to 3} f(x) = 2$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 2$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 2 = f(3)$$

$f(3) \neq 2$

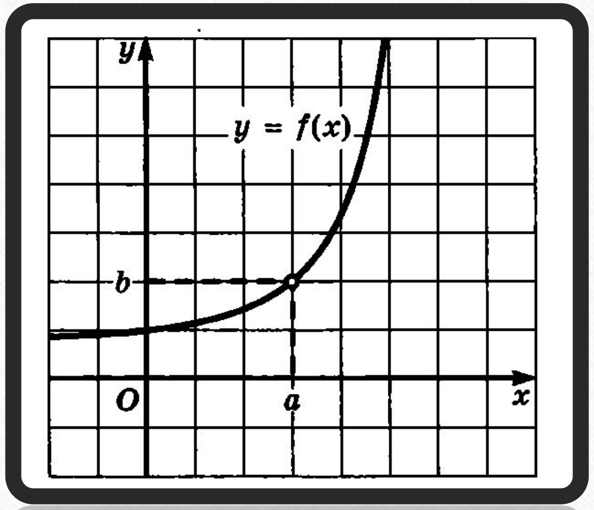
$f(3) \neq 2$

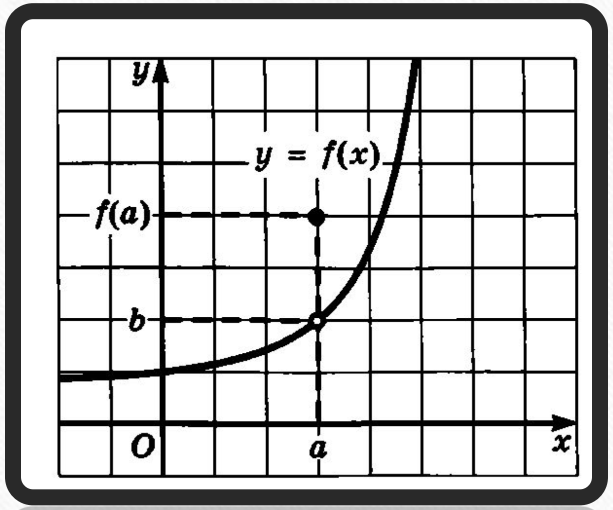
$f(3) = 2$

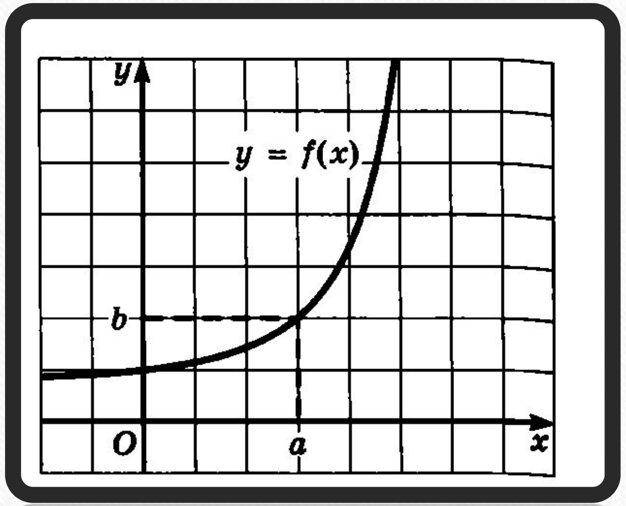
$f(3)$ не существует

$f(3) = 4$

II. Предел функции в точке







$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

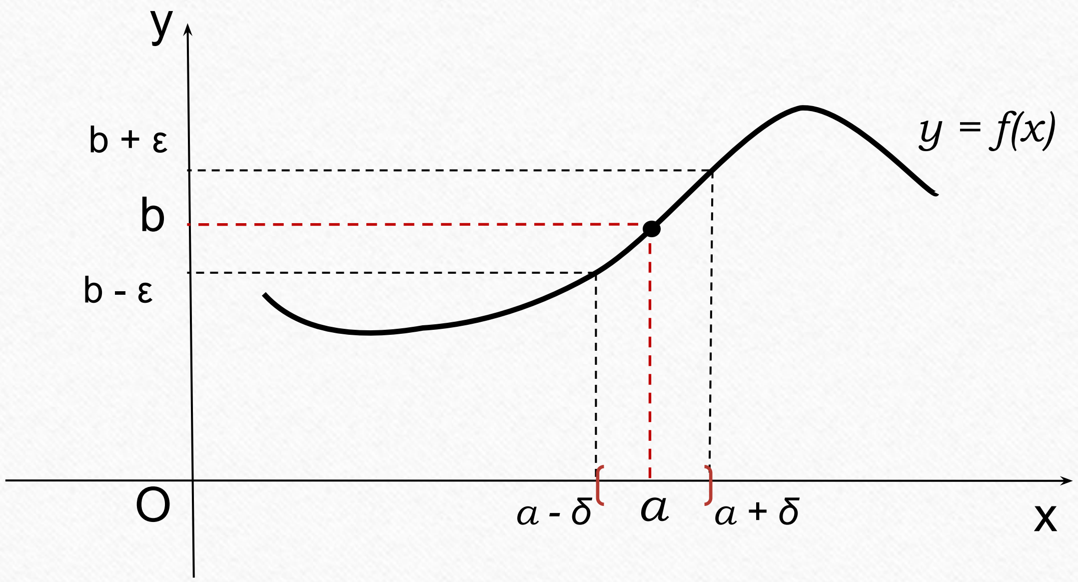
- предел f(x)при x, стремящемся к a, равен b.

Смысл: если значения аргумента приближаются к a, то значения функции стремятся к b (чем меньше окрестность точки a, тем точнее приближенное равенство $f(x) \approx b$).

При этом сама точка x = a <u>не</u> <u>рассматривается</u>!

II. Предел функции в точке

2. Определение из математического анализа

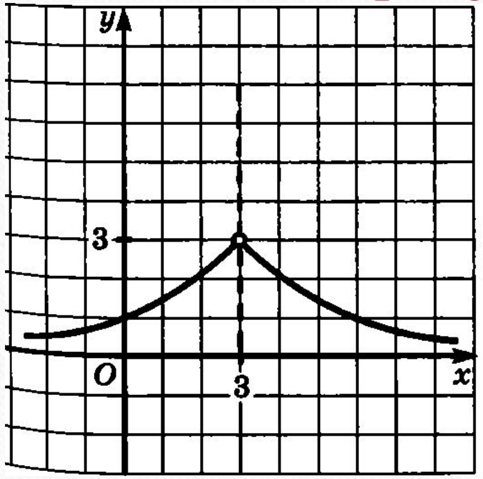


Функция $y = f(x)$ стремится к пределу b при $x \to a$, если для каждого положительного числа ε, как бы мало оно не было, можно указать такое положительное число δ, что при всех $x \neq a$ из области определения функции, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

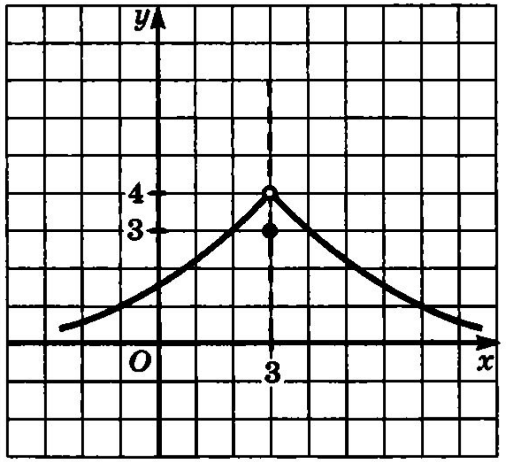
II. Предел функции в точке

3. Примеры. Существует ли предел функции при x → 3 ?
(схематически рисунок и ответ)

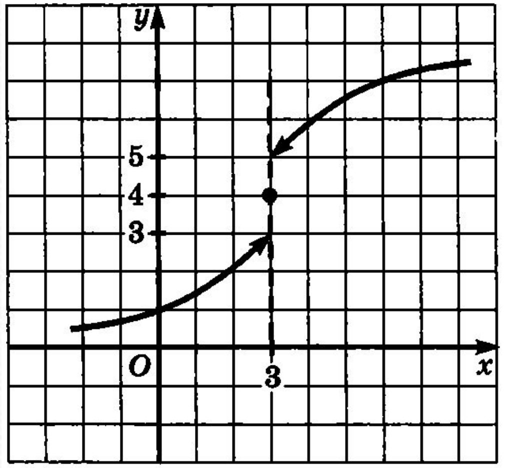
1)



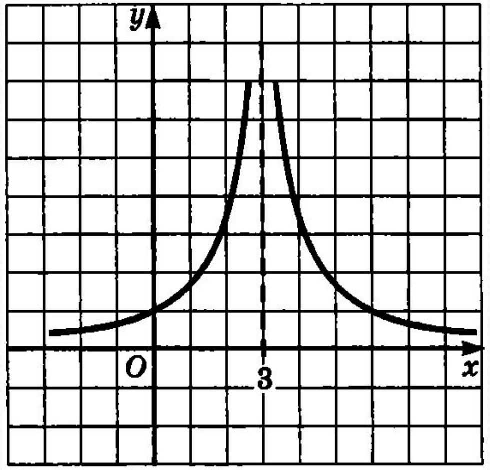
2)



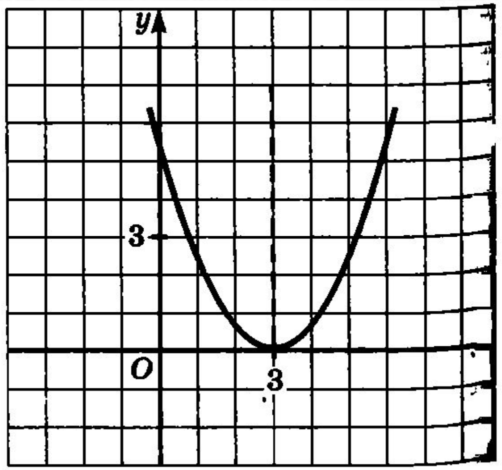
3)



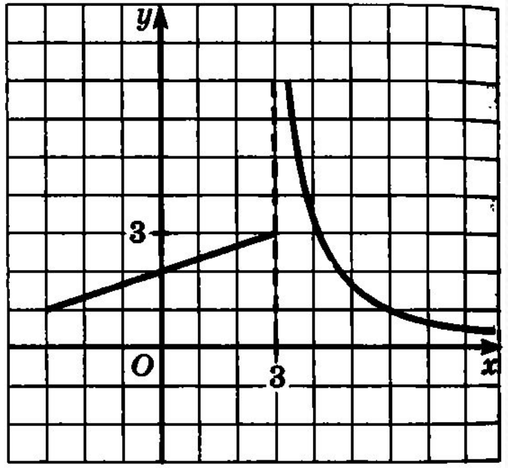
4)



5)



6)



III. Непрерывность функции

1) Функцию y = f(x) называют непрерывной в точке x = a, если выполняется условие

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$$

2) Функцию y = f(x) называют непрерывной на промежутке, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

3) Утверждение.

Если формула функции f (x) состоит из рациональных, иррациональных, тригонометрических и обратных тригонометрических выражений, то функция y = f (x) непрерывна в любой точке a, в которой определено выражение f (x).

Значит,

$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$$

(т.е. **предел функции при x → *a* равен значению функции в этой точке, *f (a)***).