

20.05.20

Предел функции

I. Предел функции на бесконечности

1. Понятие предела функции на бесконечности

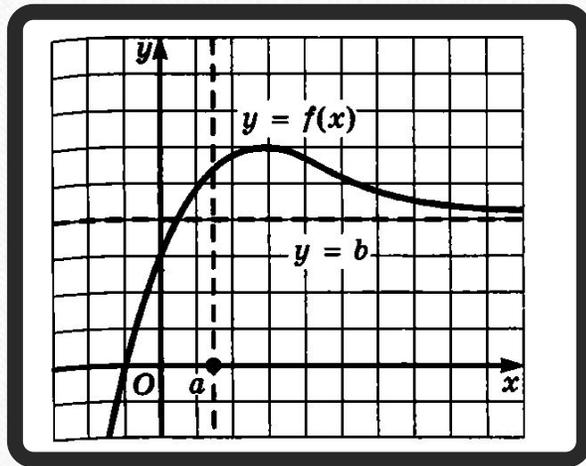
$\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = b$ - предел числовой последовательности
(функции натурального аргумента)

$$n \in \mathbb{N}$$

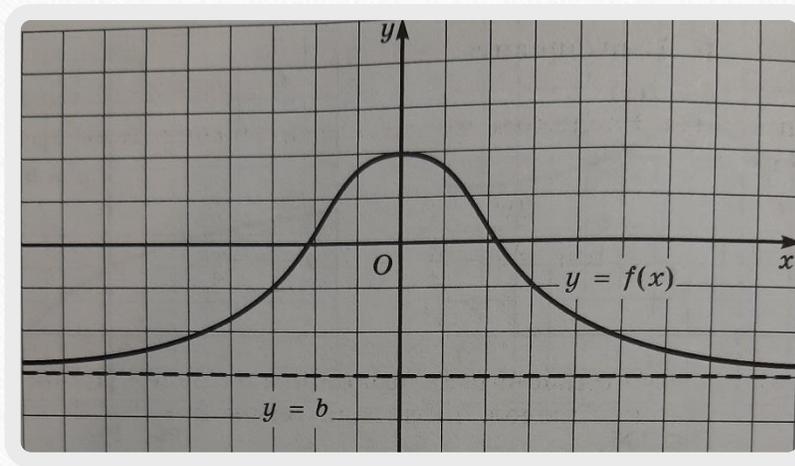
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$$

- предел функции $f(x)$ при стремлении x к
бесконечности равен b

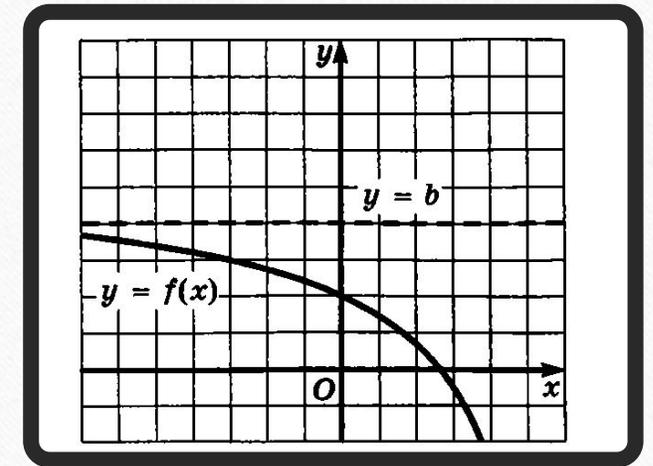
$$x \in \mathbb{R}$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$$



$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$$

1. Предел функции на бесконечности

2. Свойства вычисления пределов функций на бесконечности

1) Для любого натурального показателя m и любого коэффициента k справедливо соотношение

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{k}{x^m} = 0.$$

2) Если $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = c$, то

а) предел суммы равен сумме пределов:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + g(x)) = b + c;$$

б) предел произведения равен произведению пределов:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)g(x) = bc;$$

в) предел частного равен частному пределов (разумеется, при условии, что $c \neq 0$):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c};$$

г) постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} kf(x) = kb.$$

I. Предел функции на бесконечности

Пример 1. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 - 3x^3 + 1}{x^5 + 4x^2 + 2x}$

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 - 3x^3 + 1}{x^5 + 4x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x^5}{x^5} - \frac{3x^3}{x^5} + \frac{1}{x^5}}{\frac{x^5}{x^5} + \frac{4x^2}{x^5} + \frac{2x}{x^5}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^5}}{1 + \frac{4}{x^3} + \frac{2}{x^4}} =$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^5} \right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x^3} + \frac{2}{x^4} \right)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} 2 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x^2} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^5}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^3} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^4}} = \frac{2 - 0 + 0}{1 + 0 + 0} = \frac{2}{1} = 2$$

II. Предел функции на бесконечности

Пример 2. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + x^2 + 1}{2x^4 - 3x^2 + 5x + 2}$

Решение.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + x^2 + 1}{2x^4 - 3x^2 + 5x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5x^3}{x^4} + \frac{x^2}{x^4} + \frac{1}{x^4}}{\frac{2}{x^4} - \frac{3x^2}{x^4} + \frac{5x}{x^4} + \frac{2}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}}{2 - \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x^3} + \frac{2}{x^4}} =$$

$$= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} \right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{3}{x^2} + \frac{5}{x^3} + \frac{2}{x^4} \right)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^4}}{\lim_{x \rightarrow \infty} 2 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x^2} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x^3} + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x^4}} =$$

$$= \frac{0 + 0 + 0}{2 - 0 + 0 + 0} = \frac{0}{2} = 0$$

II. Предел функции на бесконечности

Пример 3. Вычислить $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^6 + x^2 + 1}{2x^4 - 3x^2 + 5x + 2}$

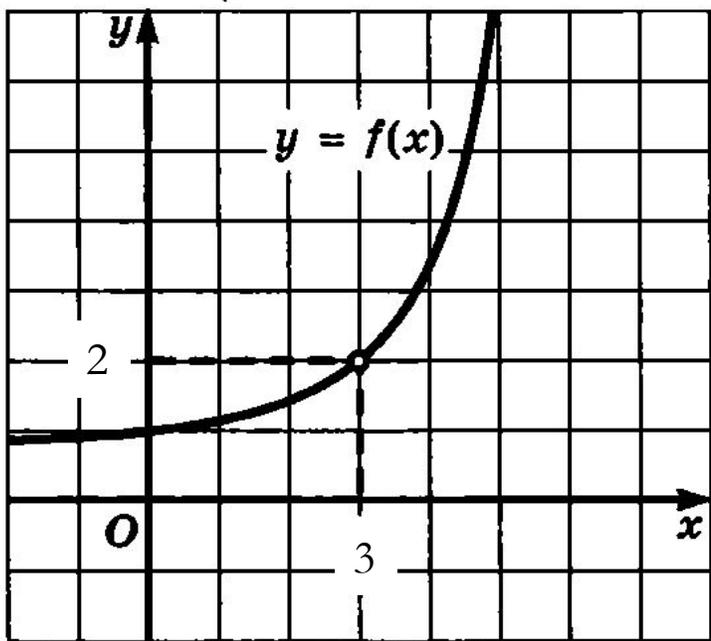
Решение.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^6 + x^2 + 1}{2x^4 - 3x^2 + 5x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6}}{\frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^4} + \frac{5}{x^5} + \frac{2}{x^6}} = \infty, \text{ значит, не существует.}$$

↑
Неопределенность вида $\left(\frac{a}{0}\right)$

II. Предел функции в точке

1. Предел функции при $x \rightarrow a$ существует тогда и только тогда, когда существуют и равны между собой оба односторонних предела.



$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2 - \text{левый предел}$$

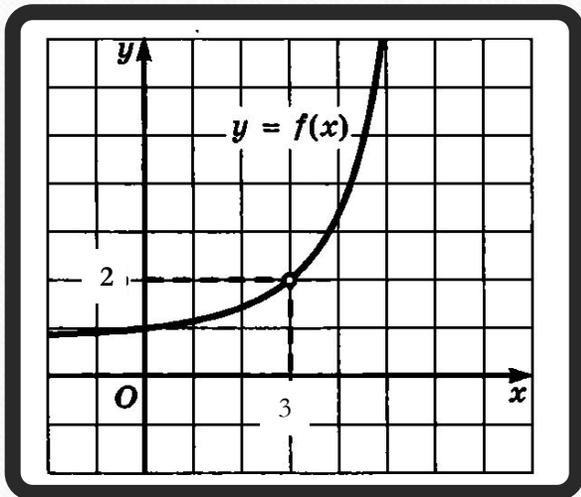
(ПОДХОДИМ К $x = 3$ СЛЕВА)

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 2 - \text{правый предел}$$

(ПОДХОДИМ К $x = 3$ СПРАВА)

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2 - \text{предел существует}$$

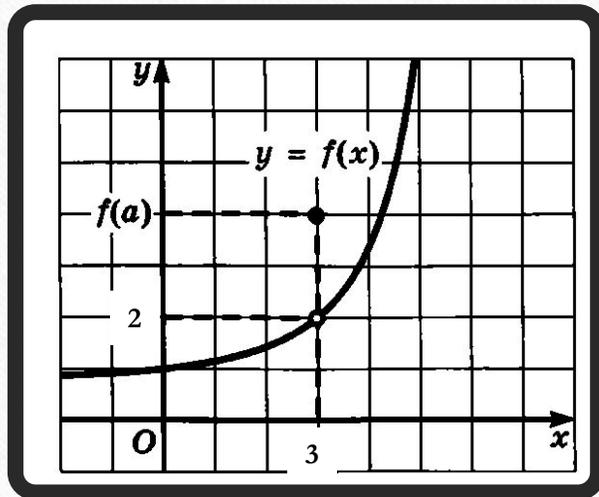
II. Предел функции в точке



$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$$

$$f(3) \neq 2$$

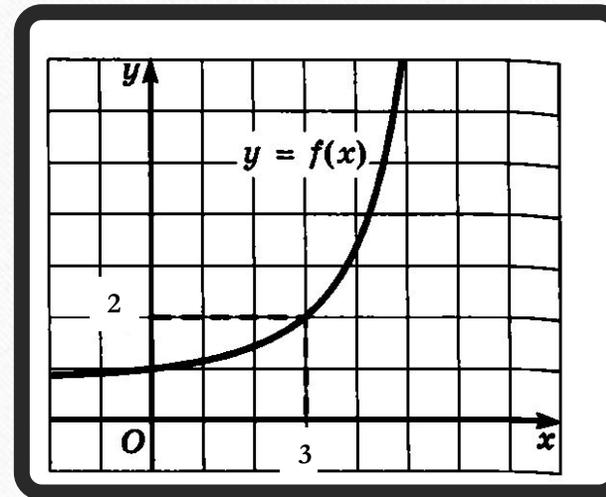
$f(3)$ не существует



$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$$

$$f(3) \neq 2$$

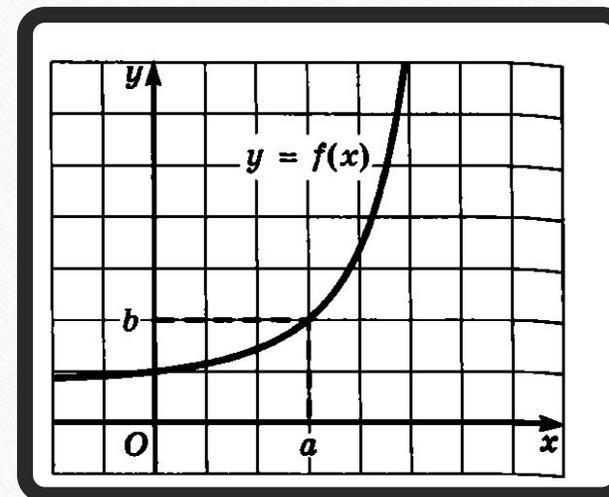
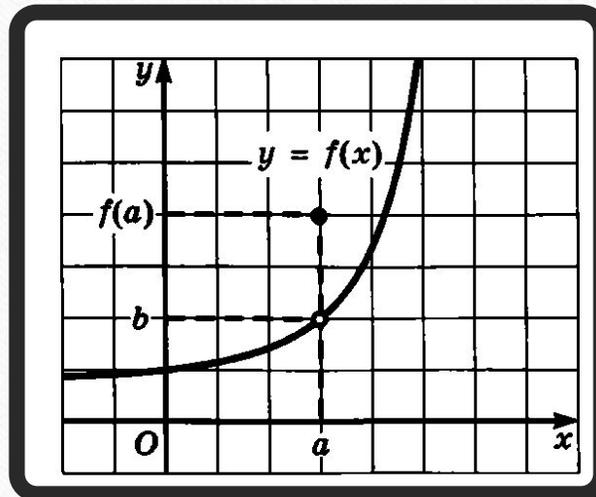
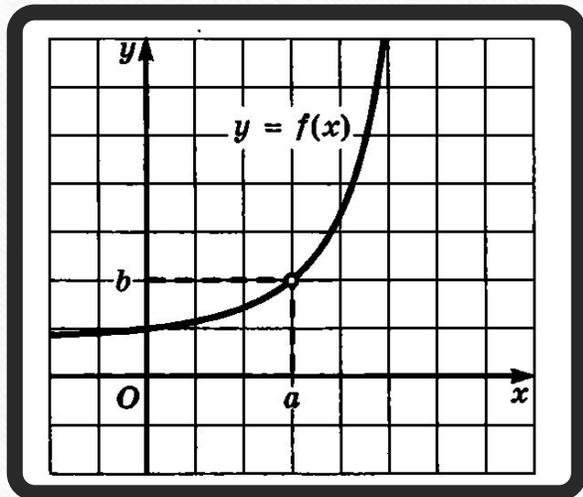
$$f(3) = 4$$



$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2 = f(3)$$

$$f(3) = 2$$

II. Предел функции в точке



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

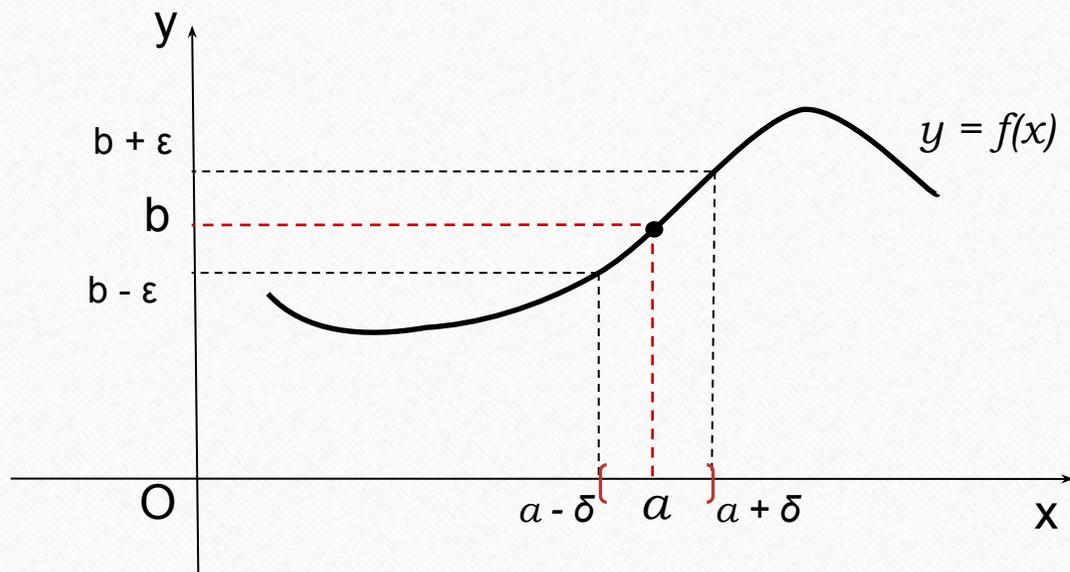
- предел $f(x)$ при x ,
стремящемся к a , равен b .

Смысл: если значения аргумента приближаются к a , то значения функции стремятся к b (чем меньше окрестность точки a , тем точнее приближенное равенство $f(x) \approx b$).

При этом сама точка $x = a$ не рассматривается!

II. Предел функции в точке

2. Определение из математического анализа

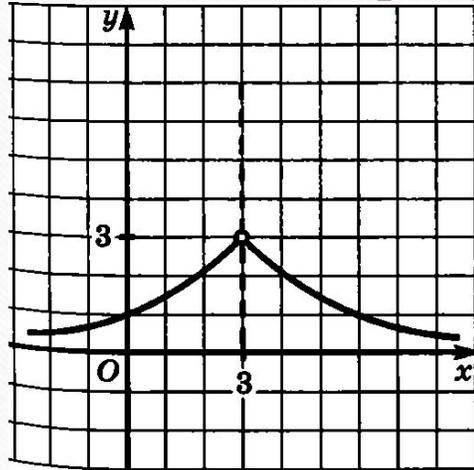


Функция $y = f(x)$ стремится к пределу b при $x \rightarrow a$, если для каждого положительного числа ε , как бы мало оно не было, можно указать такое положительное число δ , что при всех $x \neq a$ из области определения функции, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, имеет место неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

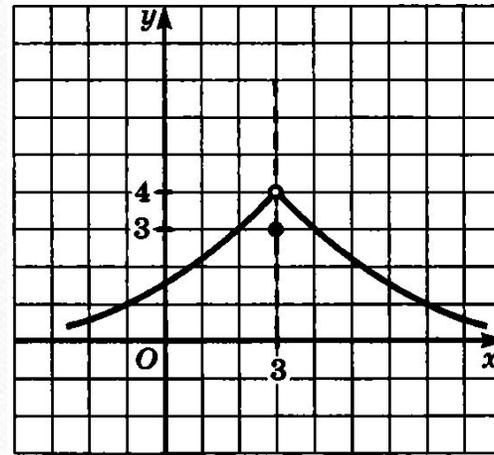
II. Предел функции в точке

3. Примеры. Существует ли предел функции при $x \rightarrow 3$?
(схематически рисунок и ответ)

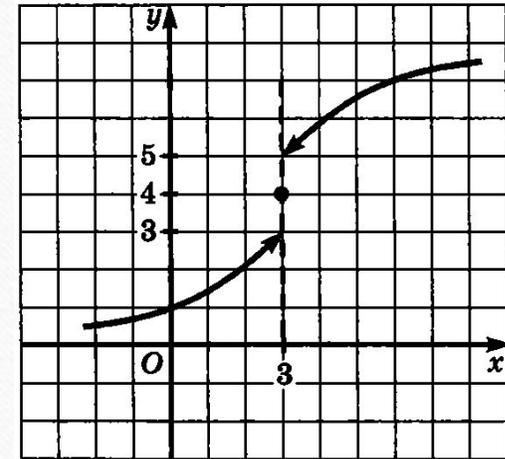
1)



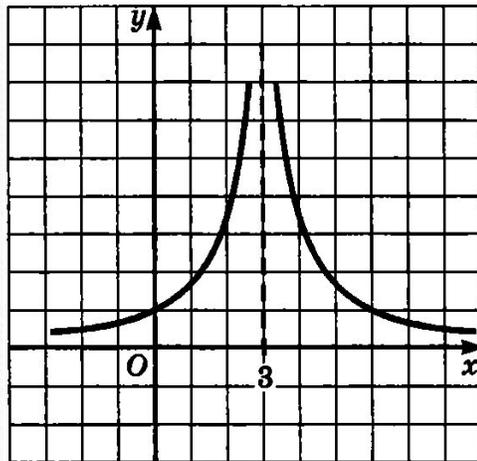
2)



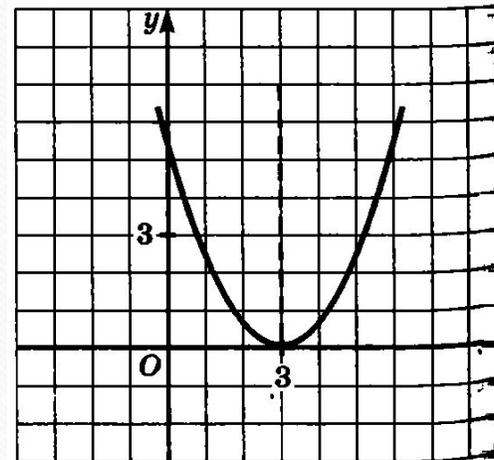
3)



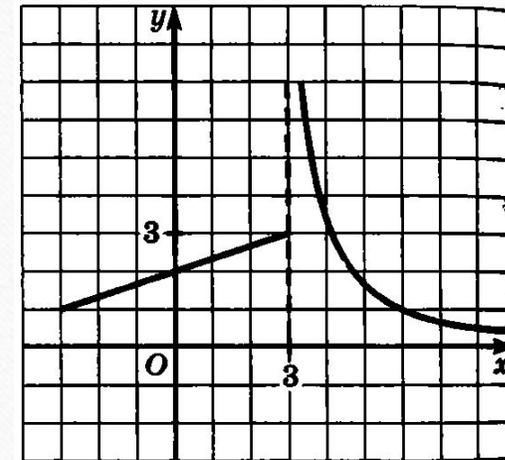
4)



5)



6)



III. Непрерывность функции

1) Функцию $y = f(x)$ называют непрерывной в точке $x = a$, если выполняется условие

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

2) Функцию $y = f(x)$ называют непрерывной на промежутке, если она непрерывна в каждой точке этого промежутка.

3) Утверждение.

Если формула функции $f(x)$ состоит из рациональных, иррациональных, тригонометрических и обратных тригонометрических выражений, то функция $y = f(x)$ непрерывна в любой точке a , в которой определено выражение $f(x)$.

Значит,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

(т.е. **предел функции при $x \rightarrow a$ равен значению функции в этой точке, $f(a)$**).