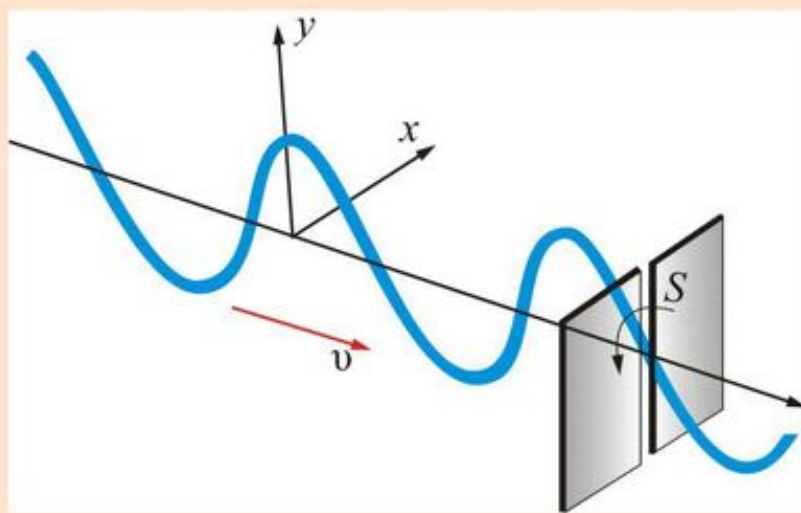


# ВОЛНЫ



## 5.2 Уравнение плоской и сферической волны

*Уравнением волны* – называется выражение, которое дает *смещение колеблющейся точки* как функцию ее координат  $(x, y, z)$  и времени  $t$ .

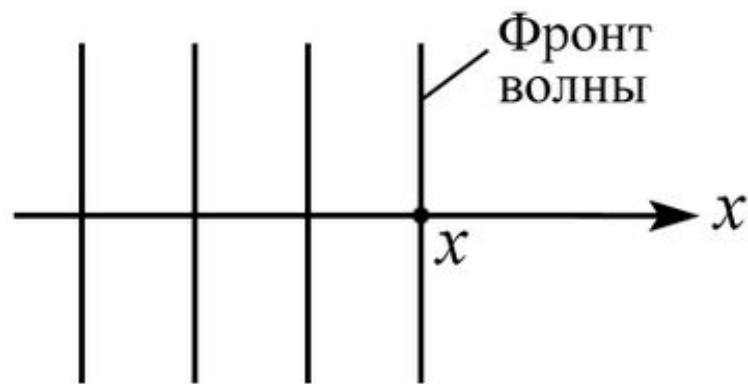
$$\xi = f(x, y, z, t) = \xi(x, y, z, t)$$

## Уравнение плоской волны

Найдем вид волновой функции,  $\xi$  в случае плоской волны предполагая, что колебания носят гармонический характер:  $\xi = A \cos(\omega t + \phi_0)$

Пусть  $\phi_0 = 0$   $\xi = \xi(0, t) = A \cos \omega t$

Чтобы пройти путь  $x$  необходимо время  $\tau = \frac{x}{v}$



$$\xi(x, t) = A \cos \omega \left( t - \frac{x}{v} \right)$$

— ЭТО **уравнение плоской волны.**

Введем **волновое число**

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

или в векторной форме

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n}$$

Так как  $\lambda = \nu T$ , то  $k = \frac{2\pi}{\nu T} = \frac{2\pi\nu}{\nu} = \frac{\omega}{\nu}$

Отсюда

$$\nu = \frac{\omega}{k}$$

Тогда **уравнение плоской волны** запишется так:

$$\xi = A \cos(\omega t - kx)$$

$$\xi = A \cos(\omega t - kx + \phi_0)$$

При поглощении *средой* энергии волны:

$$\xi = A e^{-\beta t} \cos(\omega t - kx + \phi_0)$$

-наблюдается *затухание* волны (уменьшение интенсивности волны по мере удаления от источника колебаний);

$\beta$  – коэффициент затухания;

$A$  – амплитуда.



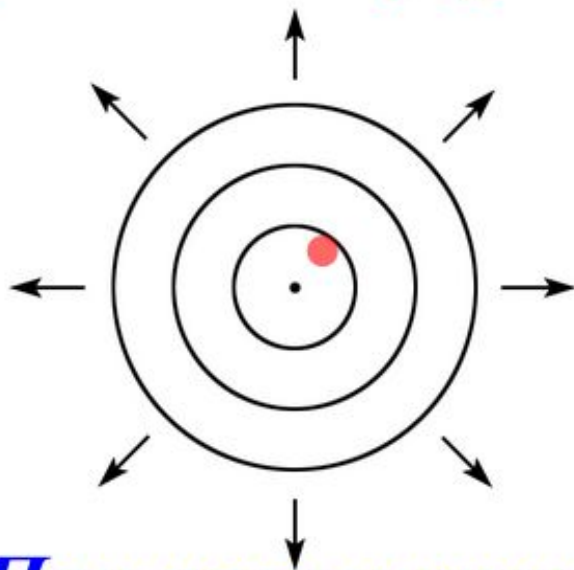
## Уравнение сферической волны

Пусть  $\phi_0 = 0$

Амплитуда колебаний убывает по закону

$$A \sim \frac{1}{r}$$

**Уравнение сферической волны:**



$$\xi = \frac{A}{r} \cos \omega \left( t - \frac{r}{v} \right)$$

ИЛИ

$$k = \frac{\omega}{v}$$

$$\xi = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr)$$

**При поглощении средой энергии волны:**

$$\xi = \frac{\hat{A}}{r} e^{-\beta t} \cos(\omega t - kr + \phi_0)$$

$\beta$  – коэффициент затухания.

## 5.6 Волновое уравнение

**Распространение волн** в однородной среде в общем случае **описывается волновым уравнением** – дифференциальным уравнением в частных производных:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

ИЛИ

$$\nabla^2 \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

**Всякая функция, удовлетворяющая этому уравнению, описывает некоторую волну, причем  $v$  – фазовая скорость волны.**

**Решением волнового уравнения**

$$\nabla^2 \xi = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

**является уравнение любой волны**, например

$$\xi = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr)$$

**сферической:**

$$\xi = A \cos(\omega t - kr)$$

или **плоской** :

**Для плоской волны**, распространяющейся вдоль оси **x**, **волновое уравнение** упрощается:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$



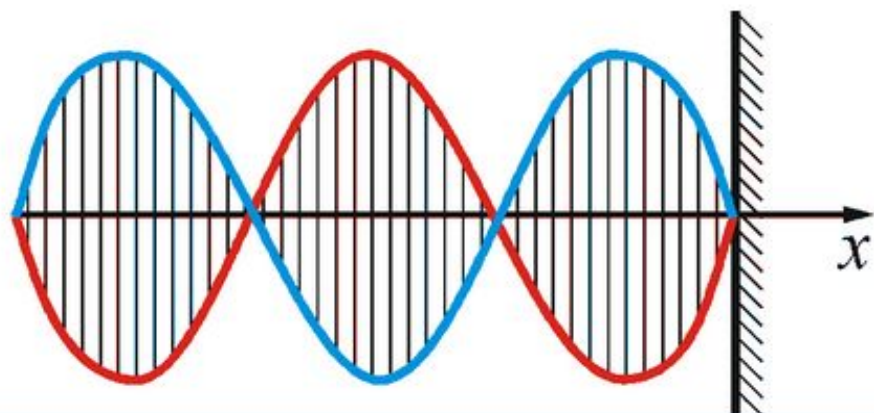
Очень важный *случай интерференции* наблюдается *при наложении двух встречных плоских волн* с одинаковой амплитудой.

Возникающий в результате колебательный процесс называется *стоячей волной*.

Практически стоячие волны возникают при отражении от преград.

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= A \cos(\omega t - kx) \\ \xi_2 &= A \cos(\omega t + kx) \end{aligned} \right\}$$

$$\xi = 2A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) \cos \omega t$$



или  $\xi = A^* \cos \omega t$

- *уравнение стоячей волны – частный случай интерференции*

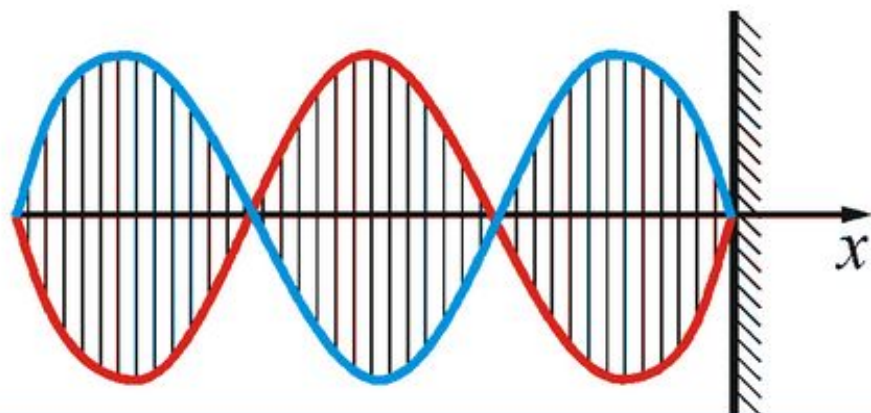
Очень важный *случай интерференции* наблюдается *при наложении двух встречных плоских волн* с одинаковой амплитудой.

Возникающий в результате колебательный процесс называется *стоячей волной*.

Практически стоячие волны возникают при отражении от преград.

$$\left. \begin{aligned} \xi_1 &= A \cos(\omega t - kx) \\ \xi_2 &= A \cos(\omega t + kx) \end{aligned} \right\}$$

$$\xi = 2A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) \cos \omega t$$



или  $\xi = A^* \cos \omega t$

- *уравнение стоячей волны – частный случай интерференции*

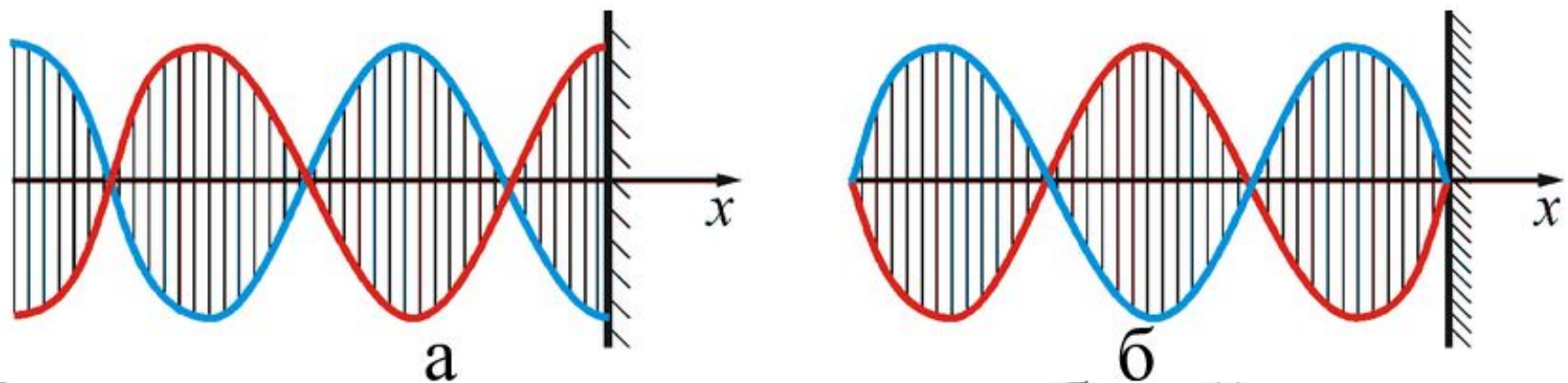


$$\xi = A^* \cos \omega t$$

$$A^* = 2A \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda} x\right) - \text{суммарная амплитуда}$$

Когда суммарная амплитуда **равна максимальному** значению  $A^* = 2A$  - это **пучности** стоячей волны

**Координаты пучностей:**  $x_{\text{пучн}} = \pm n\lambda/2$  ( $n=0, 1, 2..$ )



а

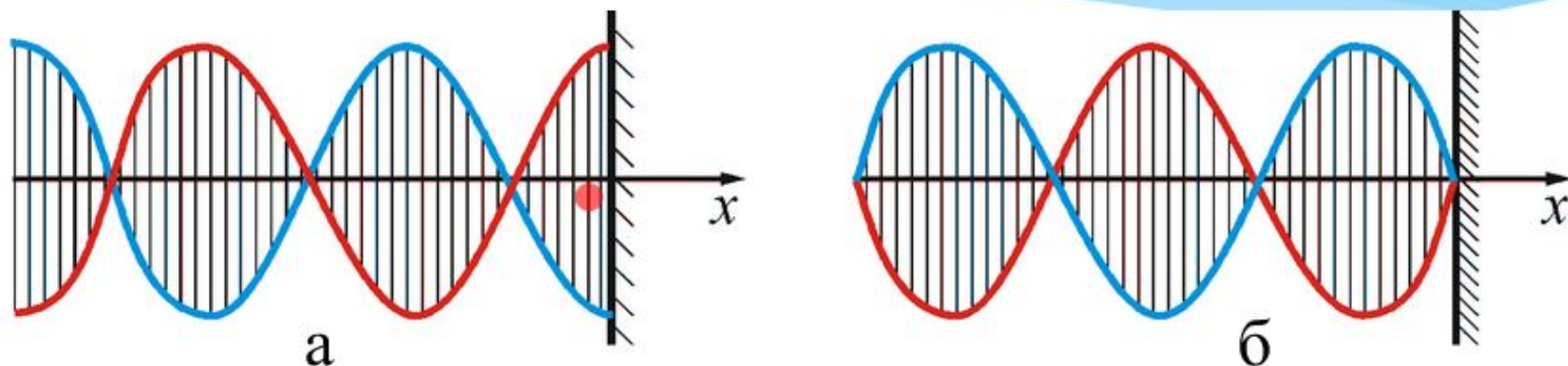
б

Когда суммарная амплитуда колебаний **равна нулю**

$A^* = 0$  - это **узлы** стоячей волны.

**Координаты узлов:**  $x_{\text{узн}} = \pm \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{2}$

Если среда, от которой происходит отражение, *менее плотная*, то в месте отражения возникает *пучность* (а), если *более плотная* – *узел* (б).



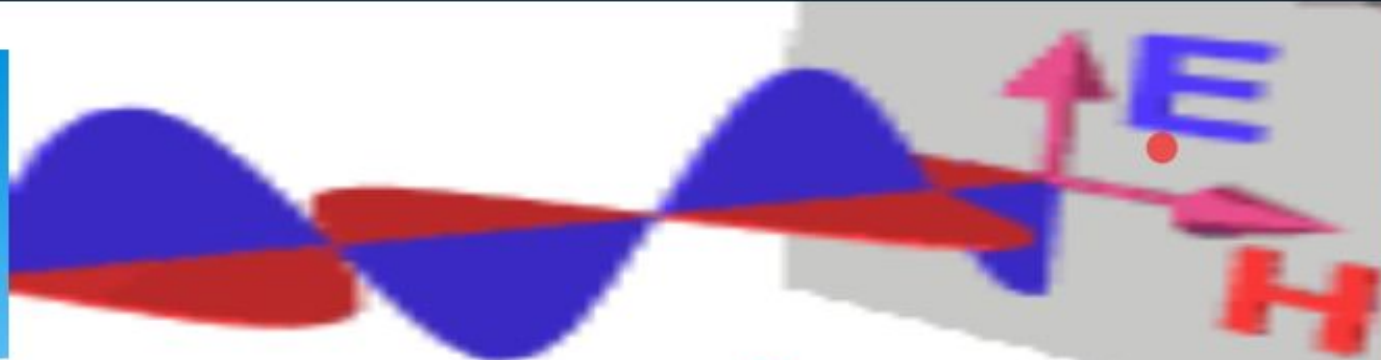
Определим *расстояние между соседними узлами (пучностями)*: т.к.  $k\Delta x \equiv \pi$  тогда:

$$\Delta x \equiv \frac{\pi}{k} = \frac{\lambda}{2}$$

- расстояние между соседними пучностями, как и соседними узлами, одинаково и составляет *половину длины волны*.

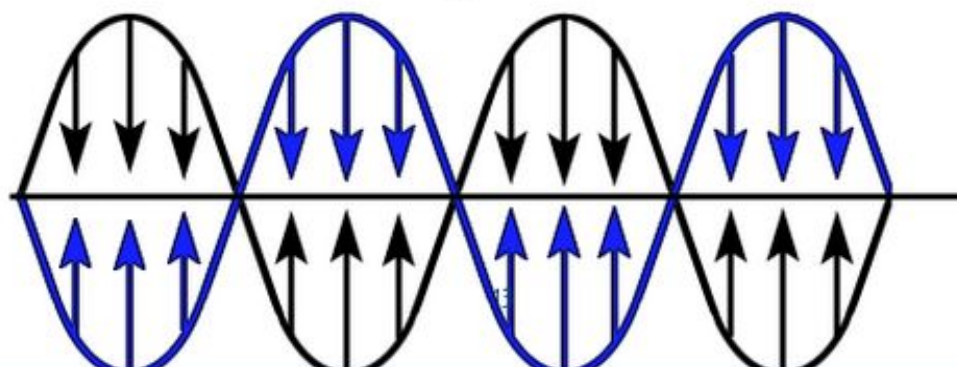
Пучности и узлы сдвинуты друг относительно друга на *четверть длины волны*.





Если рассматривать **бегущую волну**, то в направлении ее распространения **переносится энергия** колебательного движения.

**В случае** же **стоячей волны переноса энергии нет**, т.к. падающая и отраженная волны одинаковой амплитуды несут одинаковую энергию в противоположных направлениях.



# Энергия упругих волн. Вектор Умова

$$W = \frac{mA^2\omega^2}{2},$$

где  $m$  – масса среды, вовлеченной в колебательный процесс.

$$\langle w \rangle = \frac{W}{V} = \frac{\rho A^2 \omega^2}{2},$$

где  $\rho$  – плотность среды, в которой распространяется волна,  $\rho = \frac{m}{V}$ .

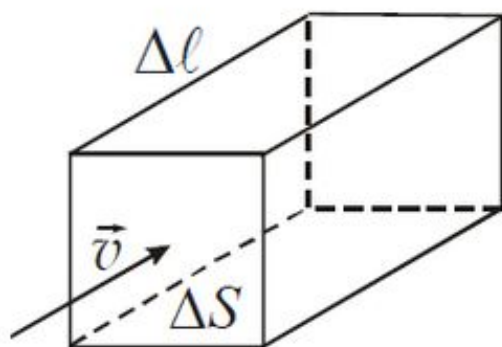
Итак, среда, в которой возникает волна, обладает дополнительным запасом энергии. Эта энергия доставляется от источника колебаний в различные точки среды самой волной, следовательно, волна переносит с собой энергию. Количество энергии, переносимое волной через некоторую поверхность в единицу времени, называется *поток энергии*  $\Phi$  через эту поверхность:

$$\Phi = \frac{\Delta W}{\Delta t}.$$



$$j = \frac{\Delta\Phi}{\Delta S} = \frac{\Delta W}{\Delta S \Delta t} = \frac{w\Delta S v\Delta t}{\Delta S \Delta t} = wv,$$

$$\vec{j} = w\vec{v}.$$





Итак, вектор Умова равен произведению  
объемной плотности энергии на вектор  
скорости распространения волны.

$$J = \langle w \rangle v = \frac{1}{2} \rho v \omega^2 A^2.$$

# Эффект Доплера

Зависимость длины волны  
от относительной скорости  
движения



Источник звука, удаляющийся от приемника в момент  $t_1$

В момент времени  $t_0$  источник звука находится рядом с приемником

Звуковые волны, идущие к приемнику

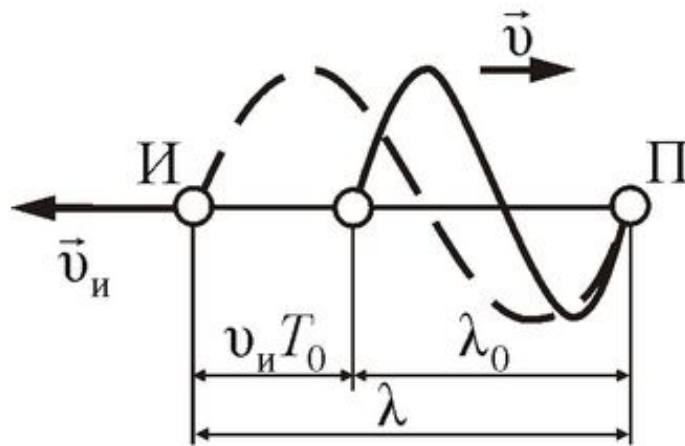
Приемник звука

$Vt$



# Акустический эффект Доплера (несколько случаев проявления)

## 1. Источник движется относительно приемника



Источник смещается в среде за время, равное периоду его колебаний  $T_0$ , на расстояние

$$v_и T_0 = \frac{v_и}{\nu_0}$$

где  $\nu_0$  – частота колебаний источника,  $v$  – фазовая скорость волны



*Длина волны*, регистрируемая приемником,

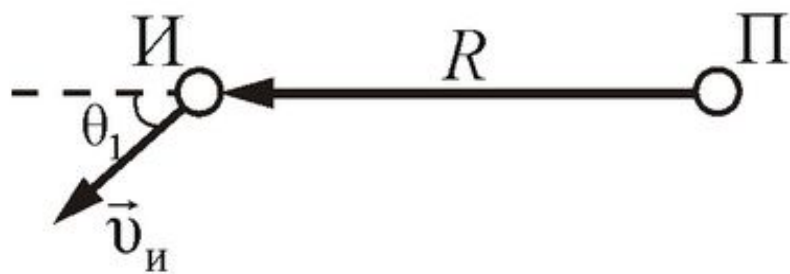
$$\lambda = \lambda_0 + v_{\text{и}} T_0 = (v + v_{\text{и}}) T_0 = \frac{(v + v_{\text{и}})}{v_0}$$

$$v = \frac{v}{\lambda} = \frac{v_0}{1 + v_{\text{и}} / v}$$

*Частота волны*,

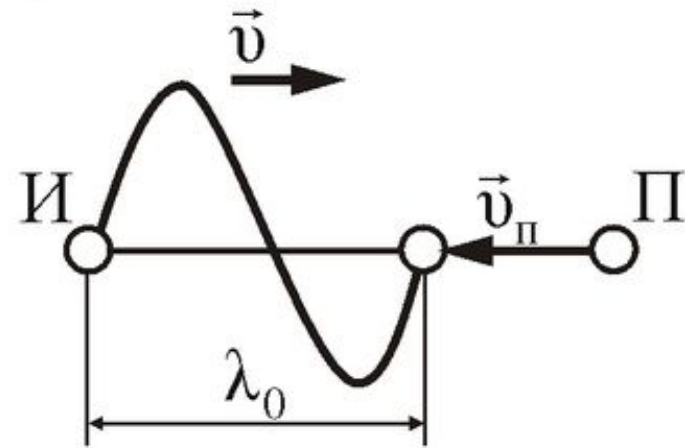
регистрируемая приемником,

Если вектор  $\vec{v}_{\text{и}}$  скорости источника *направлен под* произвольным *углом*  $\theta_1$  к радиус-вектору  $\vec{R}$



$$v = \frac{v_0}{1 + (v_{\text{е}} / v) \cos \theta_1}$$

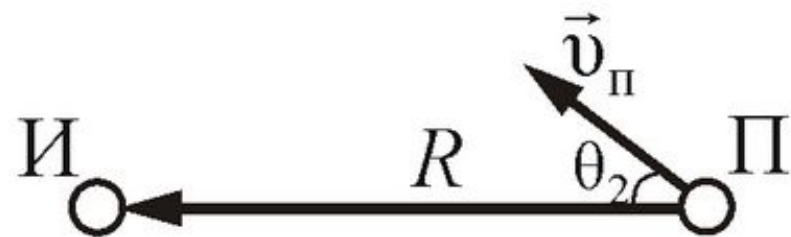
## 2. Приемник движется относительно источника



**Частота волны,**  
регистрируемая  
приемником:

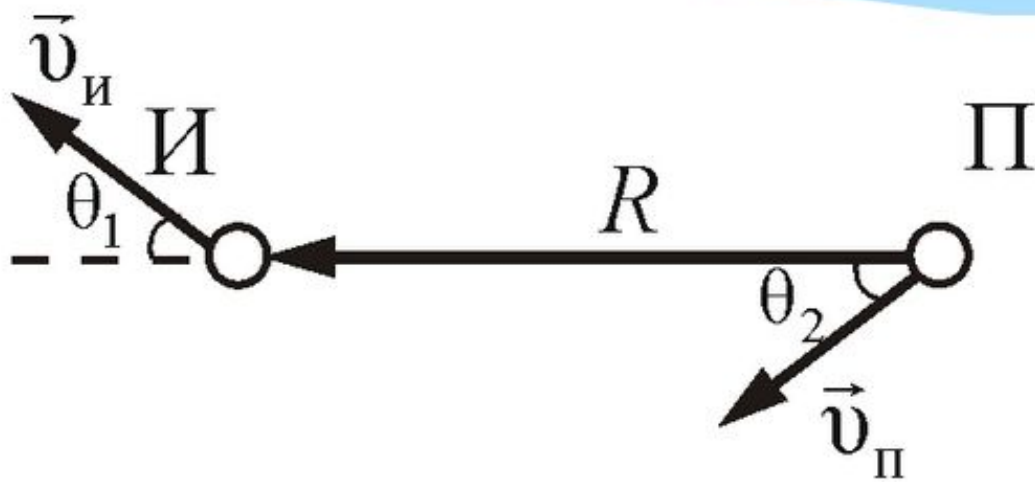
$$\nu = (\nu + \nu_{\text{П}}) / \lambda_0 = \nu_0 (1 + \nu_{\text{П}} / \nu).$$

Если приемник движется относительно  
источника под углом:



$$\nu = \nu_0 [1 + (\nu_{\text{П}} / \nu) \cos \theta_2]$$

3. В общем случае, когда и приемник и источник звуковых волн движутся относительно среды  $c$  произвольными скоростями



$$v = v_0 \frac{1 + (v_П / v) \cos \theta_2}{1 + (v_И / v) \cos \theta_1}$$

Если  $v_{\text{и}} \ll v$

$$v \approx v_0 [1 - (v'/v) \cos \theta]$$

где  $\vec{v}' = \vec{v}_{\text{и}} - \vec{v}_{\text{п}}$

– скорость источника волны относительно приемника, а  $\theta$  – угол между векторами  $\vec{v}'$  и  $\vec{R}$

Величина  $v' \cos \theta$ , равная проекции  $\vec{v}'$  на направление  $\vec{R}$ , называется *лучевой скоростью источника*.



Эффект Доплера нашел широкое применение в науке и технике. Особенно большую роль это явление играет в *астрофизике*. На основании доплеровского смещения линий поглощения в спектрах звезд и туманностей можно определять лучевые скорости  $v \cos \theta$  этих объектов по отношению к Земле: при  $v \ll c$  по формуле (1)

$$v \cos \theta \approx (1 - v/v_0)c$$

Американский астроном **Э. Хаббл** обнаружил в 1929 г. явление, получившее название ***космологического красного смещения*** и состоящее в том, что линии в спектрах излучения внегалактических объектов смещены в сторону меньших частот (больших длин волн).



На эффекте Доплера основаны радиолокационные, лазерные методы измерения скоростей различных объектов на Земле (например, автомобиля, самолета и др.).

### 55. Волновое уравнение.

Рассмотрим плоскую волну, бегущую в произвольном направлении, и запишем эту же функцию в скалярном виде.

$$\xi(\vec{r}, t) = A \cdot \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi_0) = A \cdot \cos(\omega t - \kappa_x x - \kappa_y y - \kappa_z z + \varphi_0). \quad (55.1)$$

Нужно понимать, что это две формы записи одной и той же функции. Мы будем пользоваться той формой записи, которая удобнее.

Найдем вторую частную производную этой функции по координате  $x$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial x} &= \kappa_x A \cdot \sin(\omega t - \kappa_x x - \kappa_y y - \kappa_z z + \varphi_0); \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} &= -\kappa_x^2 A \cdot \cos(\omega t - \kappa_x x - \kappa_y y - \kappa_z z + \varphi_0); \\ \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} &= -\kappa_x^2 \cdot \xi(x, y, z, t). \end{aligned} \quad (55.2.a)$$

Аналогично получаем вторые производные по другим координатам:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} = -\kappa_y^2 \cdot \xi(x, y, z, t), \quad (55.2.б)$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -\kappa_z^2 \cdot \xi(x, y, z, t). \quad (55.2.в)$$



Складываем выражения (55.2.а), (55.2.б), (55.2.в) и получаем:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -(\kappa_x^2 + \kappa_y^2 + \kappa_z^2) \cdot \xi(x, y, z, t).$$

В левой части равенства стоит оператор Лапласа, примененный к функции  $\xi(x, y, z)$ . В скобках в правой части – квадрат волнового числа.

Сведения из математики.

*Оператором Лапласа*, примененным к скалярной функции  $f$  от декартовых координат  $x, y, z$ , называется сумма вторых частных производных по этим координатам:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

$$\nabla^2 \xi(x, y, z, t) = -\kappa^2 \xi(x, y, z, t);$$

$$\frac{\nabla^2 \xi(x, y, z, t)}{\kappa^2} = -\xi(x, y, z, t). \quad (55.3)$$

Теперь найдем вторую частную производную функции (55.1) по времени:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\omega A \cdot \sin(\omega t - \kappa_x x - \kappa_y y - \kappa_z z + \varphi_0);$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 A \cdot \cos(\omega t - \kappa_x x - \kappa_y y - \kappa_z z + \varphi_0);$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 \xi(x, y, z, t);$$

$$\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\xi(x, y, z, t). \quad (55.4)$$

Правые части уравнений (55.3) и (55.4) равны друг другу, значит, равны и левые части.

$$\frac{1}{\omega^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\nabla^2 \xi(x, y, z, t)}{\kappa^2}; \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\omega^2}{\kappa^2} \nabla^2 \xi(x, y, z, t);$$

$$\frac{\partial^2 \xi(x, y, z, t)}{\partial t^2} = v^2 \nabla^2 \xi(x, y, z, t). \quad (55.5.a)$$

Полученное уравнение является дифференциальным уравнением второго порядка в частных производных. В механике, в физике оно называется *волновым уравнением*. Хотя мы вывели его для плоских волн, оно справедливо для любых волн, в том числе и для немеханических. В одномерном виде это уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \xi(x, t)}{\partial x^2}. \quad (55.5.6)$$

Если какая-либо функция координат и времени удовлетворяет уравнению вида (55.5.а) или (55.5.б), то эта функция описывает распространение волны со скоростью  $v$ .