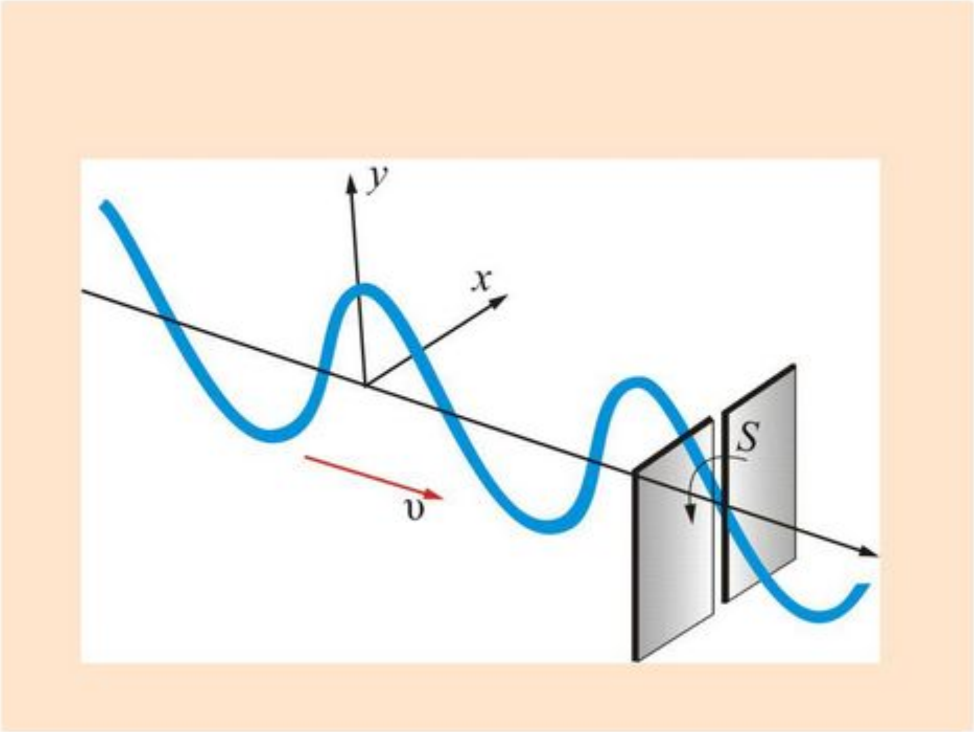
ВОЛНЫ



5.2 Уравнение плоской и сферической волны

Уравнением волны – называется выражение, которое дает ***смещение*** *колеблющейся точки* как функцию ее координат (x, y, z) и времени t.

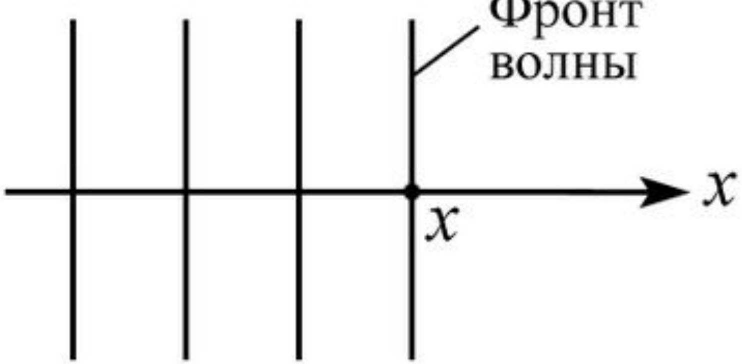
$$\xi = f(x, y, z, t) = \xi(x, y, z, t)$$

Уравнение плоской волны

Найдем вид волновой функции, ξ в случае плоской волны предполагая, что колебания носят гармонический характер: $\xi = A\cos(\omega t + \phi_0)$

Пусть $\phi_0 = 0$ $\qquad \xi = \xi(0,\, t) = A\cos\omega t$

Чтобы пройти путь ***x*** необходимо время $\tau = \dfrac{x}{\upsilon}$



$$\boxed{\xi(x,\, t) = A\cos\omega\left(t - \frac{x}{\upsilon}\right)}$$

– это ***уравнение плоской волны.***

Введем ***волновое число*** $\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$

или в векторной форме $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{n}$

Так как $\lambda = \upsilon T$, то $k = \frac{2\pi}{\upsilon T} = \frac{2\pi\nu}{\upsilon} = \frac{\omega}{\upsilon}$

Отсюда $\boxed{\upsilon = \frac{\omega}{k}}$

Тогда ***уравнение плоской волны*** запишется так:

$$\boxed{\xi = A\cos(\omega t - kx)}$$

$$\xi = A\cos(\omega t - kx + \phi_0)$$

При поглощении средой энергии волны:

$$\xi = Ae^{-\beta t}\cos(\omega t - kx + \phi_0)$$

-***наблюдается затухание волны*** (уменьшение интенсивности волны по мере удаления от источника колебаний);

β – коэффициент затухания;

A – амплитуда.

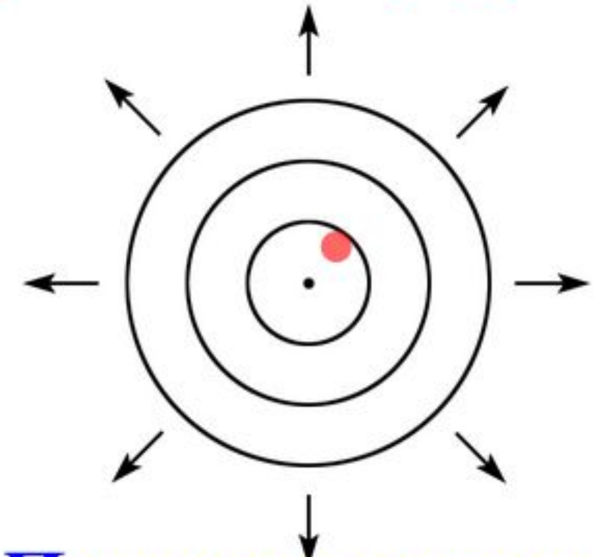
Уравнение сферической волны

Пусть $\phi_0 = 0$

Амплитуда колебаний убывает по закону $A \sim \frac{1}{r}$

Уравнение сферической волны:

$$\boxed{\xi = \frac{A}{r}\cos\omega\left(t - \frac{r}{\upsilon}\right)}$$



или

$$k = \frac{\omega}{\upsilon} \qquad \boxed{\xi = \frac{A}{r}\cos(\omega t - kr)}$$

При поглощении средой энергии волны:

$$\xi = \frac{\grave{A}}{r} e^{-\beta t}\cos(\omega t - kr + \phi_0)$$

β – коэффициент затухания.

5.6 Волновое уравнение

Распространение волн в однородной среде в общем случае ***описывается волновым уравнением*** – дифференциальным уравнением в частных производных:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2}=\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

или

$$\boxed{\nabla^2 \xi=\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}}$$

Всякая функция, *удовлетворяющая этому уравнению, описывает* ***некоторую волну****, причем* υ *-фазовая скорость волны*

Решением волнового уравнения $$\nabla^2 \xi = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

является уравнение **любой волны**, например

сферической:

$$\xi = \frac{A}{r}\cos(\omega t - kr)$$

или **плоской** :

$$\xi = A\cos(\omega t - kr)$$

Для плоской волны, распространяющейся вдоль оси $\boldsymbol{x}$, **волновое уравнение** упрощается:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

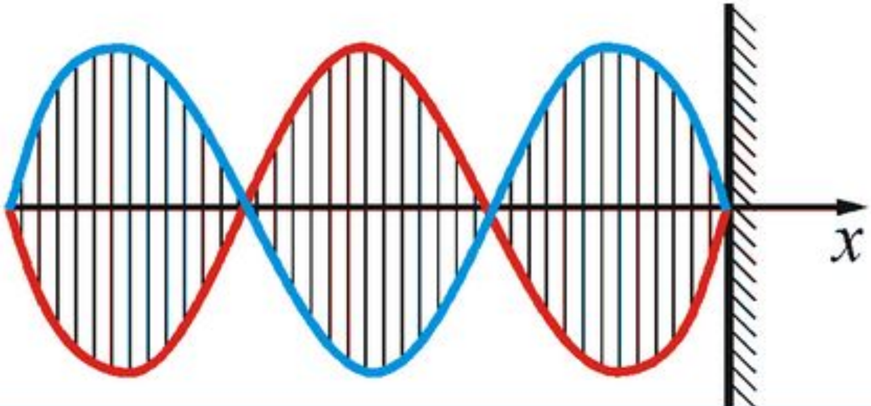
Очень важный ***случай интерференции*** наблюдается ***при наложении двух встречных плоских волн*** с одинаковой амплитудой.

Возникающий в результате колебательный процесс называется ***стоячей волной***.

Практически стоячие волны возникают при отражении от преград.

$$\left.\begin{aligned}\xi_1 &= A\cos(\omega t - kx)\\ \xi_2 &= A\cos(\omega t + kx)\end{aligned}\right\}$$

$$\boxed{\xi = 2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\cos\omega t}$$



или $\xi = A^{*}\cos\omega t$

- ***уравнение стоячей волны – частный случай интерференции***

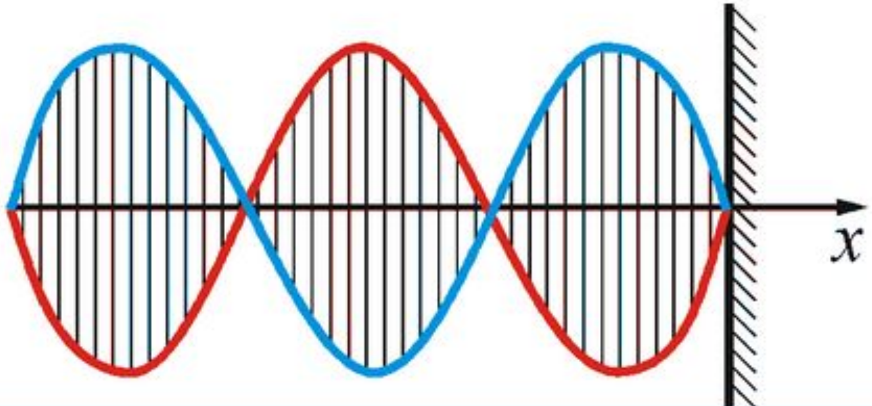
Очень важный ***случай интерференции*** наблюдается ***при наложении двух встречных плоских волн*** с одинаковой амплитудой.

Возникающий в результате колебательный процесс называется ***стоячей волной***.

Практически стоячие волны возникают при отражении от преград.

$$\left.\begin{aligned}\xi_1 &= A\cos(\omega t - kx)\\ \xi_2 &= A\cos(\omega t + kx)\end{aligned}\right\}$$

$$\boxed{\xi = 2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\cos\omega t}$$



или $\xi = A^{*}\cos\omega t$

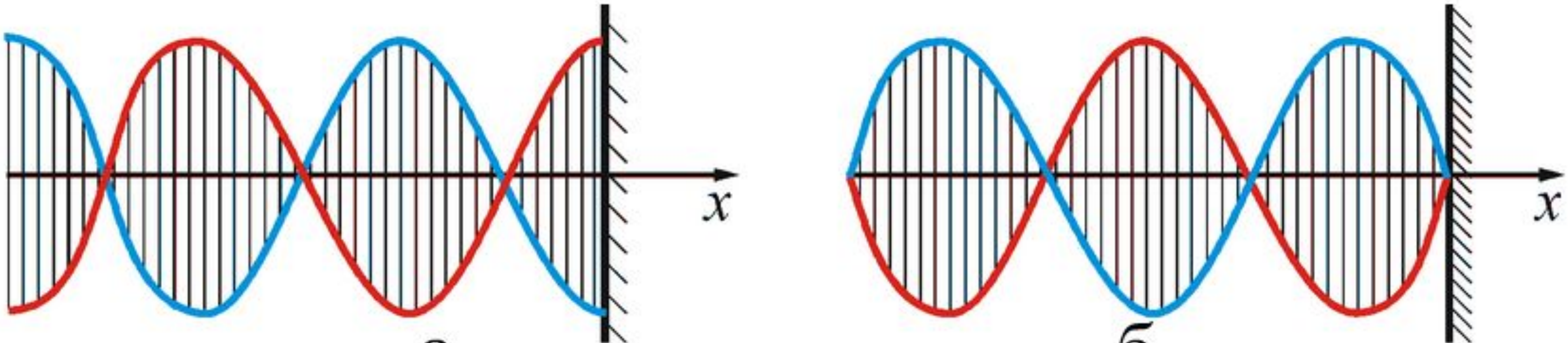
- ***уравнение стоячей волны*** – ***частный случай интерференции***

$$\xi = A^{*}\cos\omega t$$

$$A^{*} = 2A\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$ ***- суммарная амплитуда***

Когда суммарная амплитуда равна максимальному значению $A^{*} = 2A$ - это ***пучности*** стоячей волны

Координаты пучностей: $x_{\text{пучн}} = \pm n\lambda/2$ $(n=0, 1, 2..)$



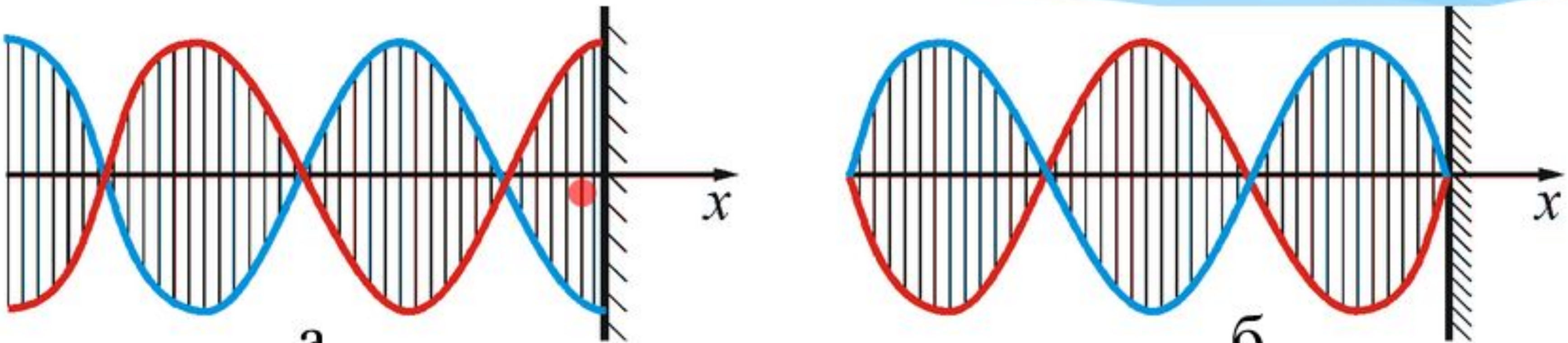
а б

Когда суммарная амплитуда колебаний равна нулю

$A^{*} = 0$ ***– это узлы стоячей волны.***

Координаты узлов: $x_{\text{узл}} = \pm\left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}$

Если среда, от которой происходит отражение, ***менее плотная***, то в месте отражения возникает пучность (а), если более плотная – узел (б).



а

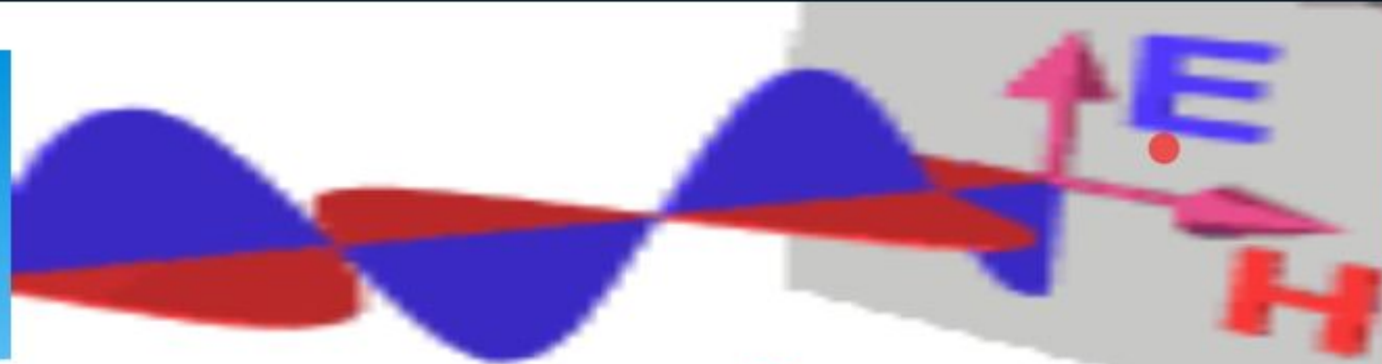
б

Определим ***расстояние между соседними узлами (пучностями):*** т.к. $k\Delta x \equiv \pi$ тогда:

$$\boxed{\Delta x \equiv \frac{\pi}{k} = \frac{\lambda}{2}}$$

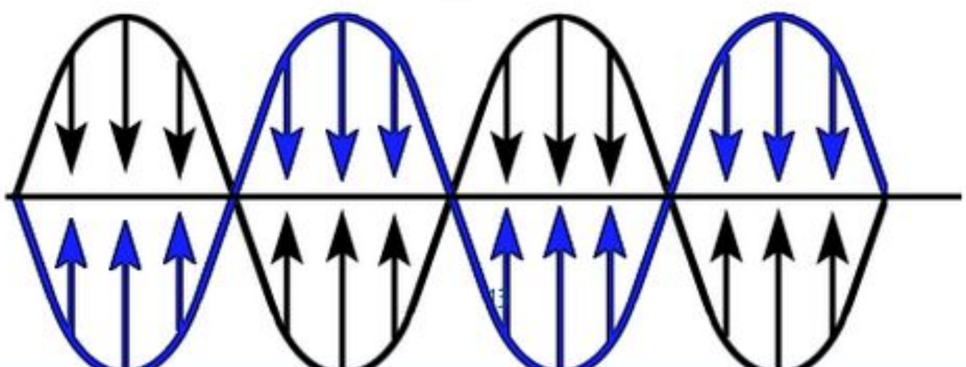
- расстояние между соседними пучностями, как и соседними узлами, одинаково и составляет ***половину длины волны.***

Пучности и узлы сдвинуты друг относительно друга на ***четверть длины волны.***



Если рассматривать ***бегущую волну***, то в направлении ее распространения ***переносится энергия*** колебательного движения.

В случае же ***стоячей волны переноса энергии нет***, т.к. падающая и отраженная волны одинаковой амплитуды несут одинаковую энергию в противоположных направлениях.



Энергия упругих волн. Вектор Умова

$$W = \frac{mA^2\omega^2}{2},$$

где m – масса среды, вовлеченной в колебательный процесс.

$$< w >= \frac{W}{V} = \frac{\rho A^2\omega^2}{2},$$

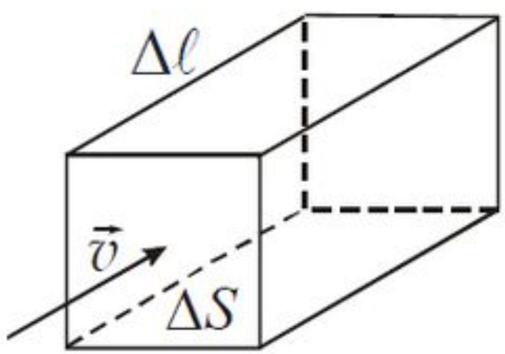
где ρ – плотность среды, в которой распространяется волна, $\rho = \frac{m}{V}$.

Итак, среда, в которой возникает волна, обладает дополнительным запасом энергии. Эта энергия доставляется от источника колебаний в различные точки среды самой волной, следовательно, волна переносит с собой энергию. Количество энергии, переносимое волной через некоторую поверхность в единицу времени, называется *потоком энергии* Φ через эту поверхность:

$$\Phi = \frac{\Delta W}{\Delta t}.$$

$$j = \frac{\Delta\Phi}{\Delta S} = \frac{\Delta W}{\Delta S\,\Delta t} = \frac{w\Delta S\, v\Delta t}{\Delta S\,\Delta t} = w\,v,$$

$$\vec{j} = w\,\vec{v}.$$



Итак, вектор Умова равен произведению объемной плотности энергии на вектор скорости распространения волны.

$$J = \langle w \rangle v = \frac{1}{2} \rho v \omega^2 A^2 .$$

Эффект Доплера

Зависимость длины волны

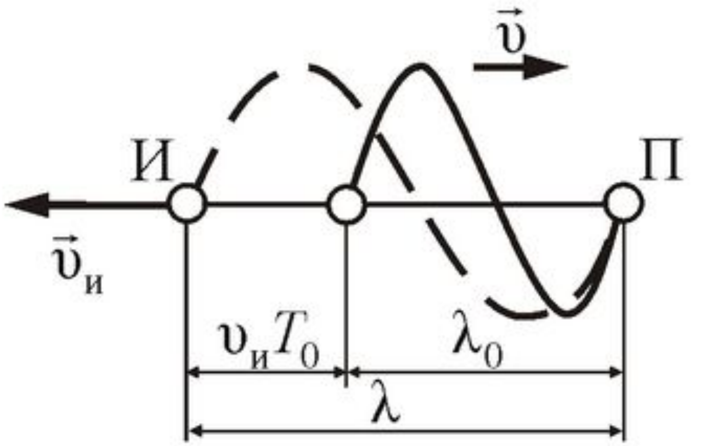
от относительной скорости

движения


Источник звука, удаляющийся
от приемника в момент t_1
Vt
В момент времени t_0 источник звука
находится рядом с приемником
Звуковые волны,
идущие к приемнику
Приемник звука

Акустический эффект Доплера
(несколько случаев проявления)

1. Источник движется относительно приемника



Источник смещается в среде за время, равное периоду его колебаний T_0, на расстояние

$$\upsilon_и T_0 = \frac{\upsilon_и}{\nu_0}$$

где ν_0 – частота колебаний источника, υ – фазовая скорость волны

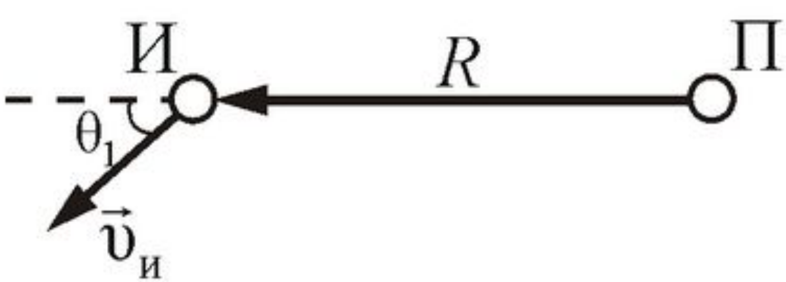
Длина волны, регистрируемая приемником,

$$\lambda = \lambda_0 + \upsilon_и T_0 = (\upsilon + \upsilon_и) T_0 = \frac{(\upsilon + \upsilon_и)}{\nu_0}$$

$$\boxed{\nu = \frac{\upsilon}{\lambda} = \frac{\nu_0}{1 + \upsilon_и / \upsilon}}$$

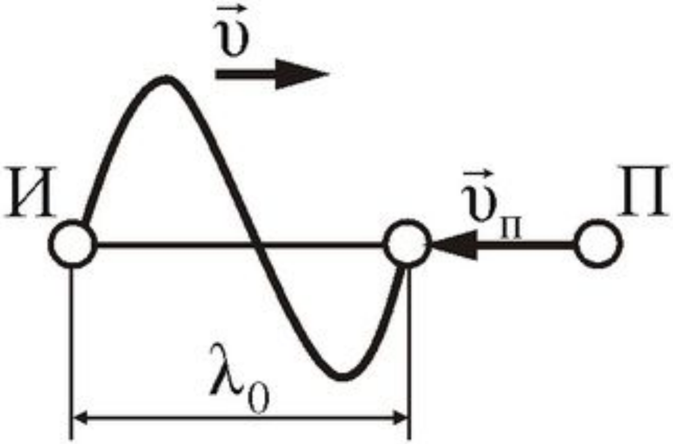
Частота волны, регистрируемая приемником,

Если вектор $\vec{\upsilon}_и$ скорости источника ***направлен под*** произвольным ***углом*** θ_1 к радиус-вектору $\vec{R}$



$$\nu = \frac{\nu_0}{1 + (\upsilon_è / \upsilon) \cos\theta_1}.$$

2. Приемник движется относительно источника

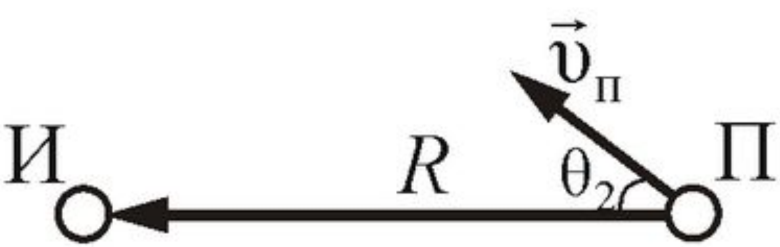


Частота волны, регистрируемая приемником:

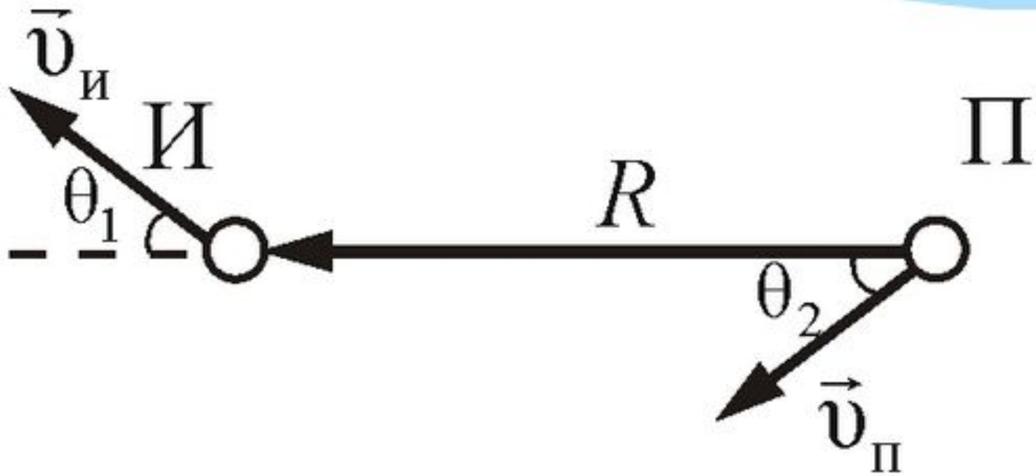
$$\nu = (\upsilon + \upsilon_{п}) / \lambda_0 = \nu_0 (1 + \upsilon_{п} / \upsilon).$$

Если приемник движется относительно источника под углом:

$$\nu = \nu_0 [1 + (\upsilon_{п} / \upsilon) \cos \theta_2]$$



3. В общем случае, когда и приемник и источник звуковых волн движутся относительно среды с произвольным скоростями



$$\nu = \nu_0 \frac{1 + (\upsilon_п / \upsilon)\cos\theta_2}{1 + (\upsilon_и / \upsilon)\cos\theta_1}$$

Если $\upsilon_{и} << \upsilon$

$$\nu \approx \nu_0[1-(\upsilon'/\upsilon)\cos\theta]$$

где $\vec{\upsilon}' = \vec{\upsilon}_{и} - \vec{\upsilon}_{п}$

– скорость источника волны относительно приемника, а θ – угол между векторами $\vec{\upsilon}'$ и $\vec{R}$

Величина $\upsilon'\cos\theta$, равная проекции $\vec{\upsilon}'$ на направление $\vec{R}$, называется ***лучевой скоростью источника.***

Эффект Доплера нашел широкое применение в науке и технике. Особенно большую роль это явление играет в ***астрофизике***. На основании доплеровского смещения линий поглощения в спектрах звезд и туманностей можно определять лучевые скорости $\upsilon\cos\theta$ этих объектов по отношению к Земле: при $\upsilon << c$ по формуле (1)

$$\upsilon\cos\theta \approx (1 - \nu / \nu_0)c$$

Американский астроном Э. Хаббл обнаружил в 1929 г. явление, получившее название ***космологического красного смещения*** и состоящее в том, что линии в спектрах излучения внегалактических объектов смещены в сторону меньших частот (больших длин волн).

На эффекте Доплера основаны радиолокационные, лазерные методы измерения скоростей различных объектов на Земле (например, автомобиля, самолета и др.).

55. Волновое уравнение.

Рассмотрим плоскую волну, бегущую в произвольном направлении, и запишем эту же функцию в скалярном виде.

$$\xi(\vec{r},t) = A\cdot\cos\left(\omega t - \vec{\kappa}\cdot\vec{r} + \varphi_o\right) = A\cdot\cos\left(\omega t - \kappa_x x - \kappa_y y - \kappa_z z + \varphi_o\right). \quad (55.1)$$

Нужно понимать, что это две формы записи одной и той же функции. Мы будем пользоваться той формой записи, которая удобнее.

Найдем вторую частную производную этой функции по координате x.

$$\frac{\partial\xi}{\partial x} = \kappa_x A\cdot\sin\left(\omega t - \kappa_x x - \kappa_y y - \kappa_z z + \varphi_o\right);$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = -\kappa_x^2 A\cdot\cos\left(\omega t - \kappa_x x - \kappa_y y - \kappa_z z + \varphi_o\right);$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} = -\kappa_x^2\cdot\xi(x,y,z,t). \quad (55.2.а)$$

Аналогично получаем вторые производные по другим координатам:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial y^2} = -\kappa_y^2\cdot\xi(x,y,z,t), \quad (55.2.б)$$

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2} = -\kappa_z^2\cdot\xi(x,y,z,t). \quad (55.2.в)$$

Складываем выражения (55.2.а), (55.2.б), (55.2.в) и получаем:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} = -\left(\kappa_x^2 + \kappa_y^2 + \kappa_z^2\right) \cdot \xi(x, y, z, t).$$

В левой части равенства стоит оператор Лапласа, примененный к функции $\xi(x,y,z)$. В скобках в правой части – квадрат волнового числа.

<u>Сведения из математики</u>.

Оператором Лапласа, примененным к скалярной функции f от декартовых координат x, y, z, называется сумма вторых частных производных по этим координатам:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

$$\nabla^2 \xi(x, y, z, t) = -\kappa^2 \xi(x, y, z, t);$$

$$\frac{\nabla^2 \xi(x,y,z,t)}{\kappa^2} = -\xi(x,y,z,t). \qquad (55.3)$$

Теперь найдем вторую частную производную функции (55.1) по времени:

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = -\omega A \cdot \sin\left(\omega t - \kappa_x x - \kappa_y y - \kappa_z z + \varphi_0\right);$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 A \cdot \cos\left(\omega t - \kappa_x x - \kappa_y y - \kappa_z z + \varphi_0\right);$$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\omega^2 \xi\left(x,y,z,t\right);$$

$$\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\xi\left(x,y,z,t\right). \qquad (55.4)$$

Правые части уравнений (55.3) и (55.4) равны друг другу, значит, равны и левые части.

$$\frac{1}{\omega^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\nabla^2 \xi(x,y,z,t)}{\kappa^2}; \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\omega^2}{\kappa^2}\nabla^2 \xi(x,y,z,t);$$

$$\frac{\partial^2 \xi(x,y,z,t)}{\partial t^2} = \upsilon^2 \nabla^2 \xi(x,y,z,t). \qquad (55.5.a)$$

Полученное уравнение является дифференциальным уравнением второго порядка в частных производных. В механике, в физике оно называется *волновым уравнением*. Хотя мы вывели его для плоских волн, оно справедливо для любых волн, в том числе и для немеханических. В одномерном виде это уравнение имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2} = \upsilon^2 \frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2}. \qquad (55.5.б)$$

> Если какая-либо функция координат и времени удовлетворяет уравнению вида (55.5.а) или (55.5.б), то эта функция описывает распространение волны со скоростью υ.