Государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего образования
«Нижегородский государственный
инженерно-экономический университет»

# ЛЕКЦИЯ 1.
# Модуль 1. Анализ функции одной переменной
# Модульная единица 1. Предел. Непрерывность
# Тема: Предел числовой последовательности. Предел функции (2ч.)

Черемухин Артем Дмитриевич
доцент кафедры
«Математика и вычислительная техника»

# План лекционного занятия:

1. Множества. Действительные числа.
2. Функция.
3. Числовая последовательность.
4. Бесконечно малые и большие числовые последовательности.
5. Предел числовой последовательности.
6. Операции над пределами числовой последовательности.

# План лекционного занятия:

7. Предел функции в точке.
8. Односторонние пределы.
9. Основные теоремы о пределах
10. Бесконечно малые и большие функции.
11. Эквивалентные бесконечно малые функции
12. Первый и второй замечательные пределы.

# 1. Множества. Действительные числа

Понятие множества является одним из основных неопределяемых понятий математики. Под ***множеством*** понимают совокупность (собрание, класс, семейство...) некоторых объектов, объединенных по какому-либо признаку. Так можно говорить о множестве студентов института, о множестве рыб в Черном море, о множестве корней уравнения $x^2 + 2x + 2 = 0$, о множестве всех натуральных чисел и т. д.

# 1. Множества. Действительные числа

Объекты, из которых состоит множество, называются его ***элементами***. Множества принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита $A, B, \ldots, X, Y, \ldots$, а их элементы — малыми буквами $a, b, \ldots, x, y, \ldots$

Если элемент $x$ принадлежит множеству $X$, то записывают $x \in X$; запись $x \overline{\in} X$ или $x \notin X$ означает, что элемент $x$ не принадлежит множеству $X$.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется ***пустым***, обозначается символом $\varnothing$.

# 1. Множества. Действительные числа

Элементы множества записывают в фигурных скобках, внутри которых они перечислены (если это возможно), либо указано общее свойство, которым обладают все элементы данного множества.

Например, запись $A = \{1, 3, 15\}$ означает, что множество $A$ состоит из трех чисел 1, 3 и 15; запись $A = \{x : \ 0 \leqslant x \leqslant 2\}$ означает, что множество $A$ состоит из всех действительных (если не оговорено иное) чисел, удовлетворяющих неравенству $0 \leqslant x \leqslant 2$.

# 1. Множества. Действительные числа

Множество $A$ называется ***подмножеством*** множества $B$, если каждый элемент множества $A$ является элементом множества $B$. Символически это обозначают так $A \subset B$ («$A$ включено в $B$») или $B \supset A$ («множество $B$ включает в себя множество $A$»).

Говорят, что множества $A$ и $B$ ***равны*** или ***совпадают***, и пишут $A = B$, если $A \subset B$ и $B \subset A$. Другими словами, множества, состоящие из одних и тех же элементов, называются равными.

# 1. Множества. Действительные числа

***Объединением*** (или суммой) множеств $A$ и $B$ называется множество, состоящее из элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из этих множеств. Объединение (сумму) множеств обозначают $A \cup B$ (или $A + B$). Кратко можно записать $A \cup B = \{x : \ x \in A$ или $x \in B\}$.

# 1. Множества. Действительные числа

***Пересечением*** (или произведением) множеств $A$ и $B$ называется множество, состоящее из элементов, каждый из которых принадлежит множеству $A$ и множеству $B$. Пересечение (произведение) множеств обозначают $A \cap B$ (или $A \cdot B$). Кратко можно записать $A \cap B = \{x : x \in A \text{ и } x \in B\}$.

# 1. Множества. Действительные числа

В дальнейшем для сокращения записей будем использовать *некоторые* простейшие логические символы:

$\alpha \Longrightarrow \beta$ — означает «из предложения $\alpha$ *следует* предложение $\beta$»;

$\alpha \Longleftrightarrow \beta$ — «предложения $\alpha$ и $\beta$ равносильны», т. е. из $\alpha$ следует $\beta$ и из $\beta$ следует $\alpha$;

$\forall$ — означает «для любого», «для всякого»;

$\exists$ — «существует», «найдется»;

$:$ — «имеет место», «такое что»;

$\mapsto$ — «соответствие».

# 1. Множества. Действительные числа

## Числовые множества.

Множества, элементами которых являются числа, называются *числовыми*. Примерами числовых множеств являются:

$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \ldots; n; \ldots\}$ — множество натуральных чисел;

$\mathbb{Z}_0 = \{0; 1; 2; \ldots; n; \ldots\}$ — множество целых неотрицательных чисел;

$\mathbb{Z} = \{0; \pm1; \pm2; \ldots; \pm n; \ldots\}$ — множество целых чисел;

$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} : \quad m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\right\}$ — множество рациональных чисел.

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел.

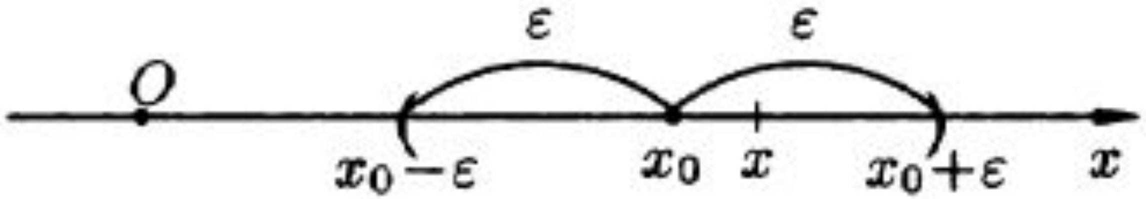
Между этими множествами существует соотношение

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

# 1. Множества. Действительные числа

## Числовые промежутки. Окрестность точки

Пусть $x_0$ — любое действительное число (точка на числовой прямой). ***Окрестностью*** точки $x_0$ называется любой интервал $(a; b)$, содержащий точку $x_0$. В частности, интервал $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, где $\varepsilon > 0$, называется $\varepsilon$***-окрестностью*** точки $x_0$. Число $x_0$ называется ***центром***, а число $\varepsilon$ — *радиусом*.



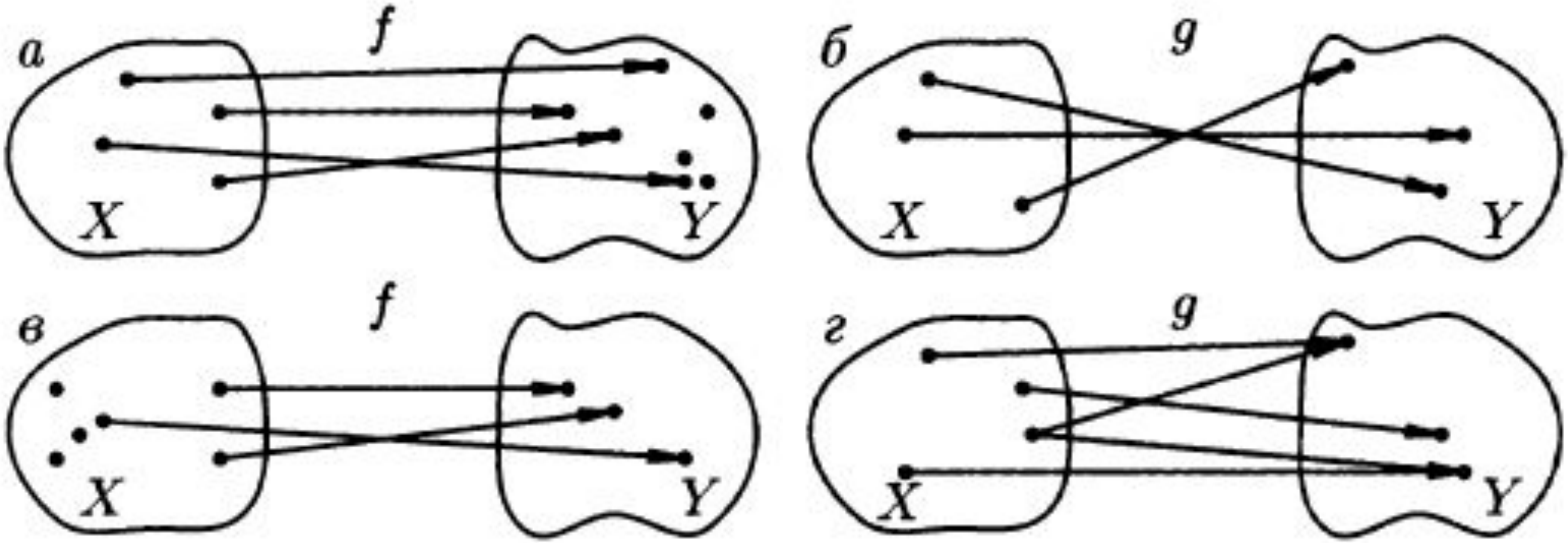
# 2. Функции

Одним из основных математических понятий является понятие функции. Понятие функции связано с установлением зависимости (связи) между элементами двух множеств.

Пусть даны два непустых множества $X$ и $Y$. Соответствие $f$, которое каждому элементу $x \in X$ сопоставляет один и только один элемент $y \in Y$, называется ***функцией*** и записывается $y = f(x)$, $x \in X$ или $f : X \to Y$. Говорят еще, что функция $f$ ***отображает*** множество $X$ на множество $Y$.

Княгининский университет

# 2. Функции




Множество $X$ называется *областью определения* функции $f$ и обозначается $D(f)$. Множество всех $y \in Y$ называется *множеством значений* функции $f$ и обозначается $E(f)$.

# 3. Числовая последовательность

Под ***числовой последовательностью*** $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ понимается функция

$$\boxed{x_n = f(n),}$$

заданная на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел. Кратко последовательность обозначается в виде $\{x_n\}$ или $x_n$, $n \in \mathbb{N}$. Число $x_1$ называется первым членом (элементом) последовательности, $x_2$ — вторым,..., $x_n$ — ***общим*** или ***n-м членом последовательности***.

$$v_n = \{2, 5, 10, \ldots, n^2 + 1, \ldots\}; \qquad z_n = \{-1, 2, -3, 4, \ldots, (-1)^n \cdot n, \ldots\};$$

$$y_n = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}; \qquad u_n = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots\right\}.$$

# 3. Числовая последовательность

Последовательность $\{x_n\}$ называется ***ограниченной***, если существует такое число $M > 0$, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$|x_n| \leqslant M.$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется ***возрастающей*** (***неубывающей***), если для любого $n$ выполняется неравенство $x_{n+1} > x_n$ ($x_{n+1} \geqslant x_n$). Аналогично определяется убывающая (невозрастающая) последовательность.

Все эти последовательности называются ***монотонными*** последовательностями.

# 4. Бесконечно малые и большие числовые последовательности

⇛ Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется *бесконечно малой*, если для любого сколь угодно малого положительного числа $\varepsilon$ можно подобрать такой номер $N$, что, начиная с этого номера (т. е. для всех $n \geqslant N$), будет выполнено неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$.

⇛ Последовательность $\{x_n\}$ называется *положительной бесконечно большой*, если для любого сколь угодно большого числа $M$ найдется такой номер $N$, что для всех $n$, начиная с этого номера, выполняется неравенство $x_n > M$.

# 5. Предел числовой последовательности

Можно заметить, что члены последовательности $u_n$ неограниченно приближаются к числу 1. В этом случае говорят, что последовательность $u_n$, $n \in \mathbb{N}$ стремится к пределу 1.

Число $a$ называется ***пределом последовательности*** $\{x_n\}$, если для любого положительного числа $\varepsilon$ найдется такое натуральное число $N$, что при всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Коротко определение предела можно записать так:

$$\boxed{(\forall \varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n > N \Longrightarrow |x_n - a| < \varepsilon) \iff \lim_{n\to\infty} x_n = a.}$$

# 5. Предел числовой последовательности

В случае, если последовательность $\{x_n\}$ имеет своим пределом число $a$, говорят также, что последовательность $\{x_n\}$ *сходится* (или стремится) к числу $a$, и обозначают этот факт так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{или} \quad x_n \to a \ (\text{при } n \to \infty).$$

$\Rrightarrow$ Если последовательность не имеет предела, то говорят, что она *расходится*.

# 5. Предел числовой последовательности

Не всякая последовательность имеет предел. Сформулируем без доказательства признак существования предела последовательности.

**Теорема 1. (Вейерштрасс).** Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

Следовательно, на основании теоремы Вейерштрасса последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, имеет предел, обозначаемый обычно буквой $e$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Число $e$ называют *неперовым* числом. Число $e$ иррациональное, его приближенное значение равно 2,72 ($e = 2{,}718281828459045\ldots$).

# 6. Операции над пределами числовой последовательности

1. Предел суммы (разности) двух сходящихся последовательностей равен сумме (соответственно, разности) их пределов:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim_{n\to\infty} y_n = b \implies \lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b.$$

2. Предел произведения двух сходящихся последовательностей равен произведению их пределов:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim_{n\to\infty} y_n = b \implies \lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b.$$

# 6. Операции над пределами числовой последовательности

3. Предел частного двух сходящихся последовательностей равен частному их пределов:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim_{n\to\infty} y_n = b,\ (b \neq 0,\ y_n \neq 0\ \forall n) \implies \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

В частности:

— постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad c \in \mathbb{R} \implies \lim_{n\to\infty} (cx_n) = c \cdot a;$$

Найти пределы последовательностей:

**1)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2 - n + 2}{5n^2 + 2}$;

**2)** $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})$;

**1)** $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2 - n + 2}{5n^2 + 2}$;

1) Преобразуем выражение, стоящее под знаком предела, поделив числитель и знаменатель на старшую степень $n$, т. е. на $n^2$:

$$\frac{3n^2 - n + 2}{5n^2 + 2} = \frac{3 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{5 + \frac{2}{n^2}}.$$

Отсюда, используя теорему о действиях над пределами, получим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-n+2}{5n^2+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{5+\frac{2}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\frac{2}{n^2}\right)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}3-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}5+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}}=\frac{3-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{5+2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=$$

$$=\frac{3-0+0}{5+0}=\frac{3}{5}.$$

**2)** $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1});$

2) Домножим и разделим выражение под знаком предела на сопряженное к нему, после чего воспользуемся формулой разности квадратов:

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}=\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=$$

$$=\frac{(\sqrt{n+1})^2-(\sqrt{n-1})^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\frac{(n+1)-(n-1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}.$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}) = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} =$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}.$$

Поскольку последовательность $\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}$ — бесконечно большая, то последовательность $\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$ — бесконечно малая. Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = 0$, а значит, и $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}) = 0$.

# 7. Предел функции в точке

*Пусть функция* $y = f(x)$ *определена в некоторой окрестности точки* $x_0$, *кроме, быть может, самой точки* $x_0$.

**Определение 1 (на «языке последовательностей», или по Гейне).** Число $A$ называется ***пределом функции*** $y = f(x)$ *в точке* $x_0$ (или при $x \to x_0$), если для любой последовательности допустимых значений аргумента $x_n$, $n \in \mathbb{N}$ $(x_n \neq x_0)$, сходящейся к $x_0$ (т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$), последовательность соответствующих значений функции $f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к числу $A$ (т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$).

# 7. Предел функции в точке

**Определение 2 (на «языке $\varepsilon$-$\delta$», или по Коши).** Число $A$ называется ***пределом функции в точке*** $x_0$ (или при $x \to x_0$), если для любого положительного $\varepsilon$ найдется такое положительное число $\delta$, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$$\left(\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall x: \ \underbrace{|x - x_0| < \delta,\ \ x \neq x_0}_{\text{или } 0 < |x - x_0| < \delta} \implies |f(x) - A| < \varepsilon\right) \iff$$

$$\iff \lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

# 8. Односторонние пределы

Число $A_1$ называется ***пределом функции*** $y = f(x)$ ***слева*** в точке $x_0$, если для любого число $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $x \in (x_0 - \delta; x_0)$, выполняется неравенство $|f(x) - A_1| <$ $< \varepsilon$. Предел слева записывают так: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$ или коротко: $f(x_0 - 0) = A_1$ (обозначение Дирихле).

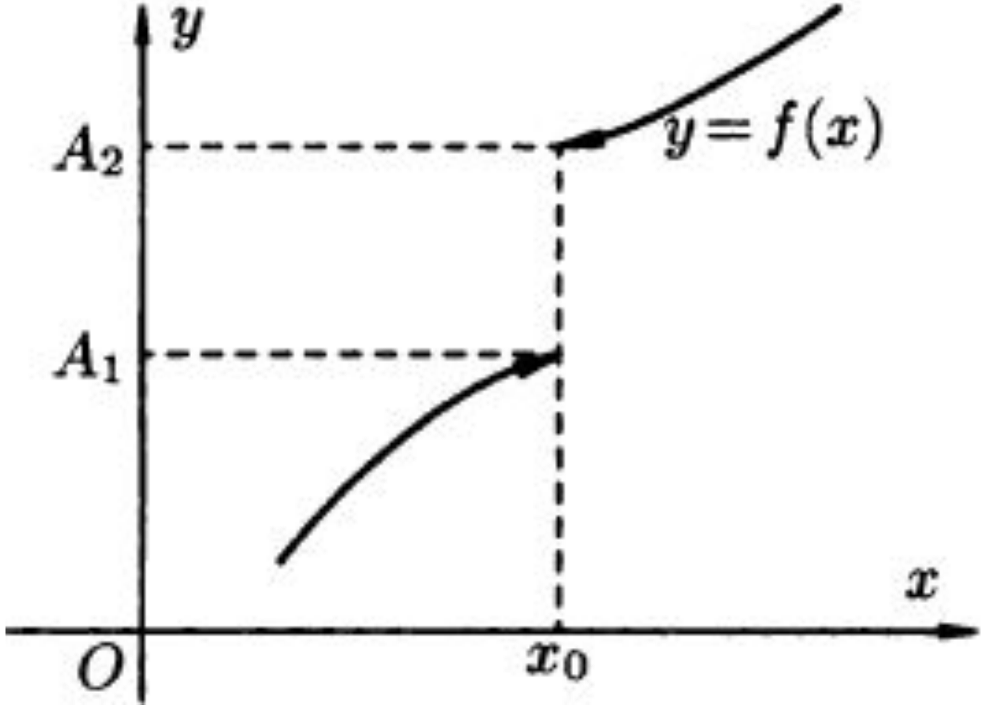
Аналогично определяется *предел функции справа*, запишем его с помощью символов:

$$\big(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon)\ \forall x \in (x_0; x_0 + \delta) \implies |f(x) - A_2| < \varepsilon\big) \iff$$

$$\iff \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2.$$

# 8. Односторонние пределы

Пределы функции слева и справа называются ***односторонними*** пределами. Очевидно, если существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то существуют и оба односторонних предела, причем $A = A_1 = A_2$.



# 9. Основные теоремы о пределах

**Теорема 1** Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов:

$$\lim_{x \to x_0} (f(x) \pm \varphi(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} \varphi(x).$$

**Следствие 1** Функция может иметь только один предел при $x \to x_0$.

# 9. Основные теоремы о пределах

**Теорема 2.** Предел произведения двух функций равен произведению их пределов:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot\varphi(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0}\varphi(x).$$

# 9. Основные теоремы о пределах

**Следствие 2.** Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x\to x_0} c\cdot f(x) = c\cdot \lim_{x\to x_0} f(x).$$

**Следствие 3.** Предел степени с натуральным показателем равен той же степени предела: $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x))^n = \left(\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\right)^n$. В частности, $\lim\limits_{x\to x_0} x^n = x_0^n$, $n\in\mathbb{N}$.

# 9. Основные теоремы о пределах

**Теорема** *3.* Предел дроби равен пределу числителя, деленному на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}\quad\left(\lim_{x\to x_0}\varphi(x)\neq 0\right).$$

***Пример 1.*** Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2-2x+7)$.

**Решение:**

$$\lim_{x\to 1}(3x^2-2x+7)=\lim_{x\to 1}3x^2-\lim_{x\to 1}2x+\lim_{x\to 1}7=$$

$$=3\left(\lim_{x\to 1}x\right)^2-2\lim_{x\to 1}x+7=3\cdot 1-2+7=8.$$

***Пример 2.*** Вычислить $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}$.

**Решение:**

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+16)}{(x-2)(x-4)} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x+16}{x-4} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}(x+16)}{\lim\limits_{x\to 2}(x-4)} = \frac{2+16}{2-4} = -9.$$

# 10. Бесконечно большая функция (б.б.ф.)

Функция $y = f(x)$ называется ***бесконечно большой при*** $x \to x_0$, если для любого числа $M > 0$ существует число $\delta = \delta(M) > 0$, что для всех $x$, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > M$.

Например, функция $y = \dfrac{1}{x-2}$ есть б.б.ф. при $x \to 2$.

Например, $y = 2^x$ есть б.б.ф. при $x \to \infty$.

Княгининский
университет

# 10. Бесконечно малая функция (б.м.ф.)

Функция $y = f(x)$ называется ***бесконечно малой при*** $x \to x_0$, если

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = 0.}$$

Примерами б.м.ф. служат функции $y = x^2$ при $x \to 0$; $y = x - 2$ при $x \to 2$; $y = \sin x$ при $x \to \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

# 11. Эквивалентные бесконечно малые функции

Среди бесконечно малых функций одного порядка особую роль играют так называемые эквивалентные бесконечно малые.

Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha}{\beta}=1$, то $\alpha$ и $\beta$ называются ***эквивалентными бесконечно малыми*** (при $x\to x_0$); это обозначается так: $\alpha\sim\beta$.

Например, $\sin x\sim x$ при $x\to 0$, т. к. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$; $\operatorname{tg} x\sim x$ при $x\to 0$, т. к. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=1$.

# 11. Эквивалентные бесконечно малые функции

Ниже приведены *важнейшие эквивалентности*, которые используются при вычислении пределов:

1. $\sin x \sim x$ при $x \to 0$;
2. $\operatorname{tg} x \sim x$ $(x \to 0)$;
3. $\arcsin x \sim x$ $(x \to 0)$;
4. $\operatorname{arctg} x \sim x$ $(x \to 0)$;
5. $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ $(x \to 0)$;
6. $e^x - 1 \sim x$ $(x \to 0)$;
7. $a^x - 1 \sim x \cdot \ln a$ $(x \to 0)$;
8. $\ln(1 + x) \sim x$ $(x \to 0)$;
9. $\log_a(1 + x) \sim x \cdot \log_a e$ $(x \to 0)$;
10. $(1 + x)^k - 1 \sim k \cdot x$, $k > 0$ $(x \to 0)$;
    в частности, $\sqrt{1 + x} - 1 \sim \frac{x}{2}$.

***Пример 3.*** Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x}{\sin 3x}$.

Решение: Так как $\operatorname{tg}2x \sim 2x, \sin 3x \sim 3x$ при $x \to 0$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}2x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}.$$

Княгининский университет

# 12. Первый замечательный предел

При вычислении пределов выражений, содержащих тригонометрические функции, часто используют предел

$$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1,}$$

называемый ***первым замечательным пределом***.

***Пример 4.*** Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{2x}$.

Решение: Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Теорема о пределе дроби неприменима. Обозначим $3x = t$; тогда при $x \to 0$ и $t \to 0$, поэтому

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{2 \cdot \frac{t}{3}} = \lim_{t\to 0} \frac{3}{2} \cdot \frac{\sin t}{t} = \frac{3}{2} \lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}.$$

# 12. Второй замечательный предел

Как известно, предел числовой последовательности $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, имеет предел, равный $e$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Поэтому

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.}$$

или

$$\boxed{\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.}$$

называются ***вторым замечательным пределом.***

***Пример 5.*** Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$.

Решение: Обозначим $x = 2t$, очевидно, $t \to \infty$ при $x \to \infty$. Имеем

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t} =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t \cdot \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e\cdot e = e^2.$$

Государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего образования
«Нижегородский государственный
инженерно-экономический университет»

# ЛЕКЦИЯ 1.
# Модуль 1. Анализ функции одной переменной
# Модульная единица 1. Предел. Непрерывность
# Тема: Предел числовой последовательности. Предел функции (2ч.)

Черемухин Артем Дмитриевич
доцент кафедры
«Математика и вычислительная техника»