Государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Нижегородский государственный инженерно-экономический университет»

ЛЕКЦИЯ 1.
Модуль 1. Анализ функции одной переменной
Модульная единица 1. Предел. Непрерывность
Тема: Предел числовой последовательности. Предел функции (2ч.)

Черемухин Артем Дмитриевич
доцент кафедры
«Математика и вычислительная техника»

План лекционного занятия:

1. Множества. Действительные числа.
2. Функция.
3. Числовая последовательность.
4. Бесконечно малые и большие числовые последовательности.
5. Предел числовой последовательности.
6. Операции над пределами числовой последовательности.

План лекционного занятия:

7. Предел функции в точке.
8. Односторонние пределы.
9. Основные теоремы о пределах
10. Бесконечно малые и большие функции.
11. Эквивалентные бесконечно малые функции
12. Первый и второй замечательные пределы.

1. Множества. Действительные числа

Понятие множества является одним из основных неопределяемых понятий математики. Под ***множеством*** понимают совокупность (собрание, класс, семейство...) некоторых объектов, объединенных по какому-либо признаку. Так можно говорить о множестве студентов института, о множестве рыб в Черном море, о множестве корней уравнения $x^2 + 2x + 2 = 0$, о множестве всех натуральных чисел и т. д.

1. Множества. Действительные числа

Объекты, из которых состоит множество, называются его ***элементами***. Множества принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита $A, B, \ldots, X, Y, \ldots$, а их элементы — малыми буквами $a, b, \ldots, x, y, \ldots$

Если элемент x принадлежит множеству X, то записывают $x \in X$; запись $x \overline{\in} X$ или $x \notin X$ означает, что элемент x не принадлежит множеству X.

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется ***пустым***, обозначается символом $\varnothing$.

1. Множества. Действительные числа

Элементы множества записывают в фигурных скобках, внутри которых они перечислены (если это возможно), либо указано общее свойство, которым обладают все элементы данного множества.

Например, запись $A = \{1, 3, 15\}$ означает, что множество A состоит из трех чисел 1, 3 и 15; запись $A = \{x : \ 0 \leqslant x \leqslant 2\}$ означает, что множество A состоит из всех действительных (если не оговорено иное) чисел, удовлетворяющих неравенству $0 \leqslant x \leqslant 2$.

1. Множества. Действительные числа

Множество A называется ***подмножеством*** множества B, если каждый элемент множества A является элементом множества B. Символически это обозначают так $A \subset B$ («A включено в B») или $B \supset A$ («множество B включает в себя множество A»).

Говорят, что множества A и B ***равны*** или ***совпадают***, и пишут $A = B$, если $A \subset B$ и $B \subset A$. Другими словами, множества, состоящие из одних и тех же элементов, называются равными.

1. Множества. Действительные числа

Объединением (или суммой) множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из этих множеств. Объединение (сумму) множеств обозначают $A \cup B$ (или $A + B$). Кратко можно записать $A \cup B = \{x : \ x \in A$ или $x \in B\}$.

1. Множества. Действительные числа

Пересечением (или произведением) множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, каждый из которых принадлежит множеству A и множеству B. Пересечение (произведение) множеств обозначают $A \cap B$ (или $A \cdot B$). Кратко можно записать $A \cap B = \{x : x \in A$ и $x \in B\}$.

1. Множества. Действительные числа

В дальнейшем для сокращения записей будем использовать *некоторые* простейшие логические символы:

$\alpha \implies \beta$ — означает «из предложения α *следует* предложение β»;

$\alpha \iff \beta$ — «предложения α и β равносильны», т. е. из α следует β и из β следует α;

$\forall$ — означает «для любого», «для всякого»;

$\exists$ — «существует», «найдется»;

$:$ — «имеет место», «такое что»;

$\mapsto$ — «соответствие».

1. Множества. Действительные числа

Числовые множества.

Множества, элементами которых являются числа, называются *числовыми*. Примерами числовых множеств являются:

$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \ldots; n; \ldots\}$ — множество натуральных чисел;

$\mathbb{Z}_0 = \{0; 1; 2; \ldots; n; \ldots\}$ — множество целых неотрицательных чисел;

$\mathbb{Z} = \{0; \pm1; \pm2; \ldots; \pm n; \ldots\}$ — множество целых чисел;

$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} : \quad m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\right\}$ — множество рациональных чисел.

$\mathbb{R}$ — множество действительных чисел.

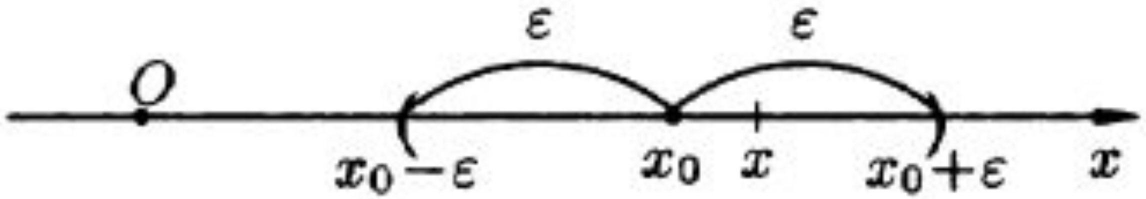
Между этими множествами существует соотношение

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

1. Множества. Действительные числа

Числовые промежутки. Окрестность точки

Пусть x_0 — любое действительное число (точка на числовой прямой). ***Окрестностью*** точки x_0 называется любой интервал $(a;b)$, содержащий точку x_0. В частности, интервал $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$, где $\varepsilon>0$, называется ***ε-окрестностью*** точки x_0. Число x_0 называется ***центром***, а число ε — *радиусом*.

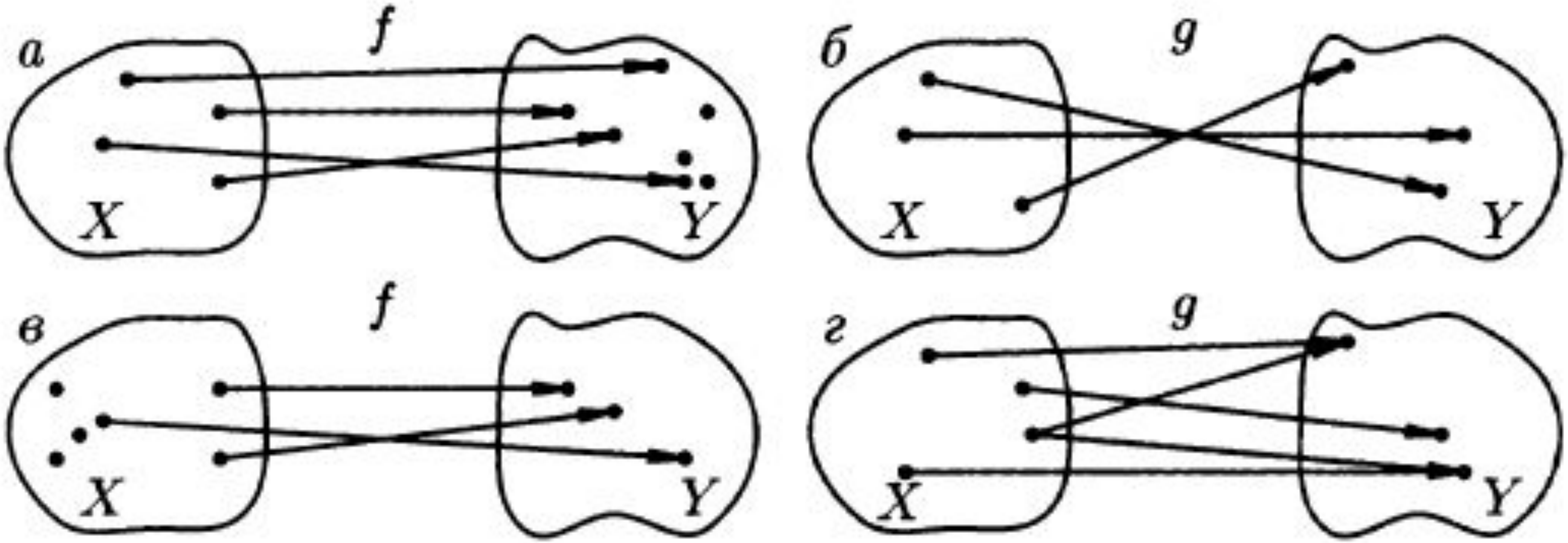


2. Функции

Одним из основных математических понятий является понятие функции. Понятие функции связано с установлением зависимости (связи) между элементами двух множеств.

Пусть даны два непустых множества X и Y. Соответствие f, которое каждому элементу $x \in X$ сопоставляет один и только один элемент $y \in Y$, называется ***функцией*** и записывается $y = f(x)$, $x \in X$ или $f : X \to Y$. Говорят еще, что функция f ***отображает*** множество X на множество Y.

2. Функции



Множество X называется *областью определения* функции f и обозначается $D(f)$. Множество всех $y \in Y$ называется *множеством значений* функции f и обозначается $E(f)$.

3. Числовая последовательность

Под ***числовой последовательностью*** $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ понимается функция

$$\boxed{x_n = f(n),}$$

заданная на множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел. Кратко последовательность обозначается в виде $\{x_n\}$ или x_n, $n \in \mathbb{N}$. Число x_1 называется первым членом (элементом) последовательности, x_2 — вторым,..., x_n — ***общим*** или ***n-м членом последовательности***.

$$v_n = \{2, 5, 10, \ldots, n^2 + 1, \ldots\}; \qquad z_n = \{-1, 2, -3, 4, \ldots, (-1)^n \cdot n, \ldots\};$$

$$y_n = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\}; \qquad u_n = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots\right\}.$$

3. Числовая последовательность

Последовательность $\{x_n\}$ называется ***ограниченной***, если существует такое число $M > 0$, что для любого $n \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$|x_n| \leqslant M.$$

Последовательность $\{x_n\}$ называется ***возрастающей*** (***неубывающей***), если для любого n выполняется неравенство $x_{n+1} > x_n$ ($x_{n+1} \geqslant x_n$). Аналогично определяется убывающая (невозрастающая) последовательность.

Все эти последовательности называются ***монотонными*** последовательностями.

4. Бесконечно малые и большие числовые последовательности

$\Rrightarrow$ Последовательность $\{\alpha_n\}$ называется *бесконечно малой*, если для любого сколь угодно малого положительного числа ε можно подобрать такой номер N, что, начиная с этого номера (т. е. для всех $n \geqslant N$), будет выполнено неравенство $|\alpha_n| < \varepsilon$.

$\Rrightarrow$ Последовательность $\{x_n\}$ называется *положительной бесконечно большой*, если для любого сколь угодно большого числа M найдется такой номер N, что для всех n, начиная с этого номера, выполняется неравенство $x_n > M$.

5. Предел числовой последовательности

Можно заметить, что члены последовательности u_n неограниченно приближаются к числу 1. В этом случае говорят, что последовательность u_n, $n \in \mathbb{N}$ стремится к пределу 1.

Число a называется ***пределом последовательности*** $\{x_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется такое натуральное число N, что при всех $n > N$ выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Коротко определение предела можно записать так:

$$\boxed{(\forall \varepsilon > 0\ \exists N:\ \forall n > N \Longrightarrow |x_n - a| < \varepsilon) \iff \lim_{n\to\infty} x_n = a.}$$

5. Предел числовой последовательности

В случае, если последовательность $\{x_n\}$ имеет своим пределом число a, говорят также, что последовательность $\{x_n\}$ *сходится* (или стремится) к числу a, и обозначают этот факт так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \quad \text{или} \quad x_n \to a \ (\text{при } n \to \infty).$$

$\Rightarrow$ Если последовательность не имеет предела, то говорят, что она *расходится*.

5. Предел числовой последовательности

Не всякая последовательность имеет предел. Сформулируем без доказательства признак существования предела последовательности.

Теорема 1. (Вейерштрасс). Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

Следовательно, на основании теоремы Вейерштрасса последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, имеет предел, обозначаемый обычно буквой e:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Число e называют *неперовым* числом. Число e иррациональное, его приближенное значение равно 2,72 ($e = 2{,}718281828459045\ldots$).

6. Операции над пределами числовой последовательности

1. Предел суммы (разности) двух сходящихся последовательностей равен сумме (соответственно, разности) их пределов:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim_{n\to\infty} y_n = b \implies \lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b.$$

2. Предел произведения двух сходящихся последовательностей равен произведению их пределов:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim_{n\to\infty} y_n = b \implies \lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b.$$

6. Операции над пределами числовой последовательности

3. Предел частного двух сходящихся последовательностей равен частному их пределов:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,\ \lim_{n\to\infty} y_n = b,\ (b \neq 0,\ y_n \neq 0\ \forall n) \implies \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

В частности:

— постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad c \in \mathbb{R} \implies \lim_{n\to\infty} (cx_n) = c \cdot a;$$

Найти пределы последовательностей:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2 - n + 2}{5n^2 + 2}$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})$;

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2 - n + 2}{5n^2 + 2}$;

1) Преобразуем выражение, стоящее под знаком предела, поделив числитель и знаменатель на старшую степень n, т. е. на n^2:

$$\frac{3n^2 - n + 2}{5n^2 + 2} = \frac{3 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{5 + \frac{2}{n^2}}.$$

Отсюда, используя теорему о действиях над пределами, получим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2-n+2}{5n^2+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{3-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{5+\frac{2}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\frac{2}{n^2}\right)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}3-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}5+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}}=\frac{3-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}+2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}{5+2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}}=$$

$$=\frac{3-0+0}{5+0}=\frac{3}{5}.$$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1});$

2) Домножим и разделим выражение под знаком предела на сопряженное к нему, после чего воспользуемся формулой разности квадратов:

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}=\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=$$

$$=\frac{(\sqrt{n+1})^2-(\sqrt{n-1})^2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=\frac{(n+1)-(n-1)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}.$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}) = \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} =$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}.$$

Поскольку последовательность $\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}$ — бесконечно большая, то последовательность $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}}$ — бесконечно малая. Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}} = 0$, а значит, и $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}) = 0$.

7. Предел функции в точке

Пусть функция $y = f(x)$ *определена в некоторой окрестности точки* x_0*, кроме, быть может, самой точки* x_0.

Определение 1 (на «языке последовательностей», или по Гейне). Число A называется ***пределом функции*** $y = f(x)$ *в точке* x_0 (или при $x \to x_0$), если для любой последовательности допустимых значений аргумента x_n, $n \in \mathbb{N}$ $(x_n \neq x_0)$, сходящейся к x_0 (т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$), последовательность соответствующих значений функции $f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, сходится к числу A (т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$).

7. Предел функции в точке

Определение 2 (на «языке ε-δ», или по Коши). Число A называется ***пределом функции в точке*** x_0 (или при $x \to x_0$), если для любого положительного ε найдется такое положительное число δ, что для всех $x \neq x_0$, удовлетворяющих неравенству $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.

$$\left(\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x : \underbrace{|x - x_0| < \delta, \quad x \neq x_0}_{\text{или } 0 < |x - x_0| < \delta} \implies |f(x) - A| < \varepsilon\right) \iff$$

$$\iff \lim_{x \to x_0} f(x) = A.$$

8. Односторонние пределы

Число A_1 называется ***пределом функции*** $y = f(x)$ ***слева*** в точке x_0, если для любого число $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $x \in (x_0 - \delta; x_0)$, выполняется неравенство $|f(x) - A_1| < \varepsilon$. Предел слева записывают так: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = A_1$ или коротко: $f(x_0 - 0) = A_1$ (обозначение Дирихле).

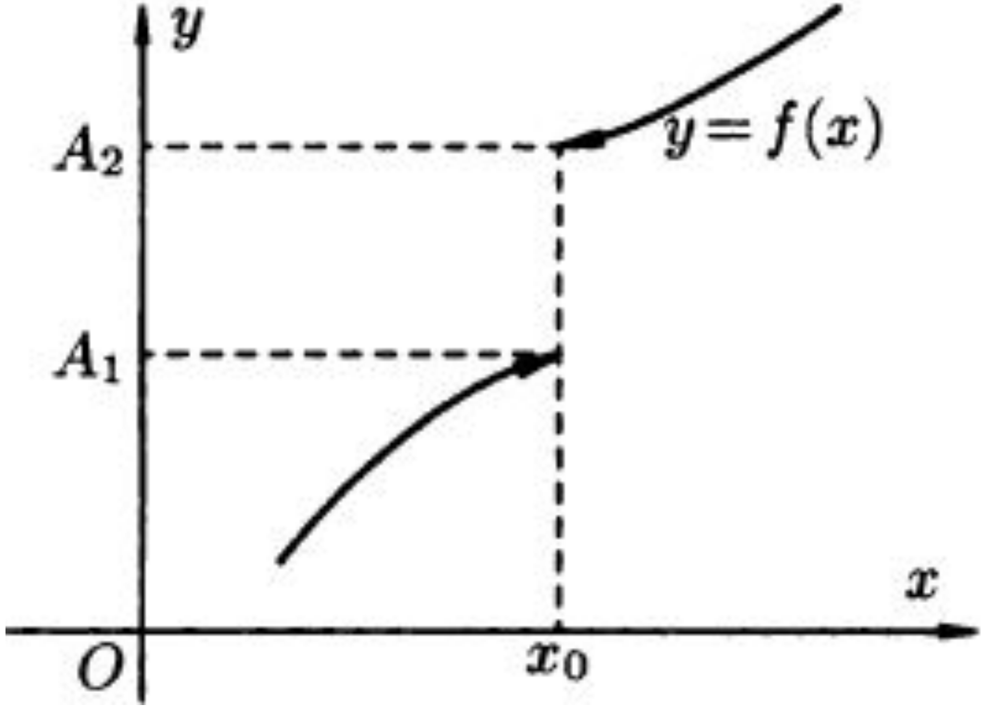
Аналогично определяется *предел функции справа*, запишем его с помощью символов:

$$\Big(\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon)\ \forall x \in (x_0; x_0 + \delta) \implies |f(x) - A_2| < \varepsilon\Big) \iff$$

$$\iff \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A_2.$$

8. Односторонние пределы

Пределы функции слева и справа называются ***односторонними*** пределами. Очевидно, если существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, то существуют и оба односторонних предела, причем $A = A_1 = A_2$.



9. Основные теоремы о пределах

Теорема 1 Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm\varphi(x))=\lim_{x\to x_0}f(x)\pm\lim_{x\to x_0}\varphi(x).$$

Следствие 1 Функция может иметь только один предел при $x \to x_0$.

9. Основные теоремы о пределах

Теорема 2. Предел произведения двух функций равен произведению их пределов:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot\varphi(x)) = \lim_{x\to x_0} f(x)\cdot \lim_{x\to x_0}\varphi(x).$$

9. Основные теоремы о пределах

Следствие 2. Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x \to x_0} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Следствие 3. Предел степени с натуральным показателем равен той же степени предела: $\lim_{x \to x_0} (f(x))^n = \left(\lim_{x \to x_0} f(x)\right)^n$. В частности, $\lim_{x \to x_0} x^n = x_0^n$, $n \in \mathbb{N}$.

9. Основные теоремы о пределах

Теорема *3.* Предел дроби равен пределу числителя, деленному на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)} \quad \left(\lim_{x \to x_0} \varphi(x) \neq 0\right).$$

Пример 1. Вычислить $\lim\limits_{x\to 1}(3x^2 - 2x + 7)$.

Решение:

$$\lim_{x\to 1}(3x^2 - 2x + 7) = \lim_{x\to 1} 3x^2 - \lim_{x\to 1} 2x + \lim_{x\to 1} 7 =$$

$$= 3\left(\lim_{x\to 1} x\right)^2 - 2\lim_{x\to 1} x + 7 = 3 \cdot 1 - 2 + 7 = 8.$$

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}$.

Решение:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+16)}{(x-2)(x-4)} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{x+16}{x-4} = \frac{\lim\limits_{x\to 2}(x+16)}{\lim\limits_{x\to 2}(x-4)} = \frac{2+16}{2-4} = -9.$$

10. Бесконечно большая функция (б.б.ф.)

Функция $y = f(x)$ называется ***бесконечно большой при*** $x \to x_0$, если для любого числа $M > 0$ существует число $\delta = \delta(M) > 0$, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x)| > M$.

Например, функция $y = \dfrac{1}{x-2}$ есть б.б.ф. при $x \to 2$.

Например, $y = 2^x$ есть б.б.ф. при $x \to \infty$.

10. Бесконечно малая функция (б.м.ф.)

Функция $y = f(x)$ называется ***бесконечно малой при*** $x \to x_0$, если

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = 0.}$$

Примерами б.м.ф. служат функции $y = x^2$ при $x \to 0$; $y = x - 2$ при $x \to 2$; $y = \sin x$ при $x \to \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Княгининский университет

11. Эквивалентные бесконечно малые функции

Среди бесконечно малых функций одного порядка особую роль играют так называемые эквивалентные бесконечно малые.

Если $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha}{\beta} = 1$, то α и β называются ***эквивалентными бесконечно малыми*** (при $x \to x_0$); это обозначается так: $\alpha \sim \beta$.

Например, $\sin x \sim x$ при $x \to 0$, т. к. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$; $\operatorname{tg} x \sim x$ при $x \to 0$, т. к. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$.

11. Эквивалентные бесконечно малые функции

Ниже приведены *важнейшие эквивалентности*, которые используются при вычислении пределов:

1. $\sin x \sim x$ при $x \to 0$;
2. $\operatorname{tg} x \sim x \ (x \to 0)$;
3. $\arcsin x \sim x \ (x \to 0)$;
4. $\operatorname{arctg} x \sim x \ (x \to 0)$;
5. $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} \ (x \to 0)$;
6. $e^x - 1 \sim x \ (x \to 0)$;
7. $a^x - 1 \sim x \cdot \ln a \ (x \to 0)$;
8. $\ln(1 + x) \sim x \ (x \to 0)$;
9. $\log_a(1 + x) \sim x \cdot \log_a e \ (x \to 0)$;
10. $(1 + x)^k - 1 \sim k \cdot x$, $k > 0 \ (x \to 0)$;
    в частности, $\sqrt{1 + x} - 1 \sim \frac{x}{2}$.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x}$.

Решение: Так как $\operatorname{tg} 2x \sim 2x, \sin 3x \sim 3x$ при $x \to 0$, то

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}.$$

12. Первый замечательный предел

При вычислении пределов выражений, содержащих тригонометрические функции, часто используют предел

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,}$$

называемый ***первым замечательным пределом***.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2x}$.

◐ Решение: Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Теорема о пределе дроби неприменима. Обозначим $3x = t$; тогда при $x \to 0$ и $t \to 0$, поэтому

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{2x} = \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{2\cdot\frac{t}{3}} = \lim_{t\to 0}\frac{3}{2}\cdot\frac{\sin t}{t} = \frac{3}{2}\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = \frac{3}{2}\cdot 1 = \frac{3}{2}.$$ ●

12. Второй замечательный предел

Как известно, предел числовой последовательности $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, имеет предел, равный e

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Поэтому

$$\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.} \quad \text{или} \quad \boxed{\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.}$$

называются ***вторым замечательным пределом.***

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x$.

Решение: Обозначим $x = 2t$, очевидно, $t \to \infty$ при $x \to \infty$. Имеем

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}\right)^x = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{2t} =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t \cdot \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t = e \cdot e = e^2. \qquad \bullet$$

Государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего образования
«Нижегородский государственный
инженерно-экономический университет»

ЛЕКЦИЯ 1.
Модуль 1. Анализ функции одной переменной
Модульная единица 1. Предел. Непрерывность
Тема: Предел числовой последовательности. Предел функции (2ч.)

Черемухин Артем Дмитриевич
доцент кафедры
«Математика и вычислительная техника»