



Государственное бюджетное  
образовательное учреждение  
высшего образования  
«Нижегородский государственный  
инженерно-экономический университет»

## ЛЕКЦИЯ 1.

**Модуль 1. Анализ функции одной переменной**  
**Модульная единица 1. Предел. Непрерывность**  
**Тема: Предел числовой последовательности.**  
**Предел функции (2ч.)**

Черемухин Артем Дмитриевич  
доцент кафедры  
«Математика и вычислительная техника»

## План лекционного занятия:

1. Множества. Действительные числа.
2. Функция.
3. Числовая последовательность.
4. Бесконечно малые и большие числовые последовательности.
5. Предел числовой последовательности.
6. Операции над пределами числовой последовательности.

## План лекционного занятия:

7. Предел функции в точке.
8. Односторонние пределы.
9. Основные теоремы о пределах
10. Бесконечно малые и большие функции.
11. Эквивалентные бесконечно малые функции
12. Первый и второй замечательные пределы.

# 1. Множества. Действительные числа

⇒ Понятие множества является одним из основных неопределяемых понятий математики. Под **множеством** понимают совокупность (собрание, класс, семейство...) некоторых объектов, объединенных по какому-либо признаку. Так можно говорить о множестве студентов института, о множестве рыб в Черном море, о множестве корней уравнения  $x^2 + 2x + 2 = 0$ , о множестве всех натуральных чисел и т. д.



# 1. Множества. Действительные числа

Объекты, из которых состоит множество, называются его *элементами*. Множества принято обозначать заглавными буквами латинского алфавита  $A, B, \dots, X, Y, \dots$ , а их элементы — малыми буквами  $a, b, \dots, x, y, \dots$

Если элемент  $x$  принадлежит множеству  $X$ , то записывают  $x \in X$ ; запись  $x \bar{\in} X$  или  $x \notin X$  означает, что элемент  $x$  не принадлежит множеству  $X$ .

Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым*, обозначается символом  $\emptyset$ .

# 1. Множества. Действительные числа

Элементы множества записывают в фигурных скобках, внутри которых они перечислены (если это возможно), либо указано общее свойство, которым обладают все элементы данного множества.

Например, запись  $A = \{1, 3, 15\}$  означает, что множество  $A$  состоит из трех чисел 1, 3 и 15; запись  $A = \{x : 0 \leq x \leq 2\}$  означает, что множество  $A$  состоит из всех действительных (если не оговорено иное) чисел, удовлетворяющих неравенству  $0 \leq x \leq 2$ .

## 1. Множества. Действительные числа


☞ Множество  $A$  называется *подмножеством* множества  $B$ , если каждый элемент множества  $A$  является элементом множества  $B$ . Символически это обозначают так  $A \subset B$  (« $A$  включено в  $B$ ») или  $B \supset A$  («множество  $B$  включает в себя множество  $A$ »).

Говорят, что множества  $A$  и  $B$  *равны* или *совпадают*, и пишут  $A = B$ , если  $A \subset B$  и  $B \subset A$ . Другими словами, множества, состоящие из одних и тех же элементов, называются равными.

# 1. Множества. Действительные числа

⇒ *Объединением* (или суммой) множеств  $A$  и  $B$  называется множество, состоящее из элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из этих множеств. Объединение (сумму) множеств обозначают  $A \cup B$  (или  $A + B$ ). Кратко можно записать  $A \cup B = \{x : x \in A \text{ или } x \in B\}$ .

# 1. Множества. Действительные числа

 **Пересечением** (или произведением) множеств  $A$  и  $B$  называется множество, состоящее из элементов, каждый из которых принадлежит множеству  $A$  и множеству  $B$ . Пересечение (произведение) множеств обозначают  $A \cap B$  (или  $A \cdot B$ ). Кратко можно записать  $A \cap B = \{x : x \in A \text{ и } x \in B\}$ .



# 1. Множества. Действительные числа

В дальнейшем для сокращения записей будем использовать *некоторые* простейшие логические символы:

$\alpha \implies \beta$  — означает «из предложения  $\alpha$  *следует* предложение  $\beta$ »;

$\alpha \iff \beta$  — «предложения  $\alpha$  и  $\beta$  равносильны», т. е. из  $\alpha$  следует  $\beta$  и из  $\beta$  следует  $\alpha$ ;

$\forall$  — означает «для любого», «для всякого»;

$\exists$  — «существует», «найдется»;

$:$  — «имеет место», «такое что»;

$\mapsto$  — «соответствие».

# 1. Множества. Действительные числа

## Числовые множества.

Множества, элементами которых являются числа, называются *числовыми*. Примерами числовых множеств являются:

$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; \dots; n; \dots\}$  — множество натуральных чисел;

$\mathbb{Z}_0 = \{0; 1; 2; \dots; n; \dots\}$  — множество целых неотрицательных чисел;

$\mathbb{Z} = \{0; \pm 1; \pm 2; \dots; \pm n; \dots\}$  — множество целых чисел;

$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$  — множество рациональных чисел.


$\mathbb{R}$  — множество действительных чисел.

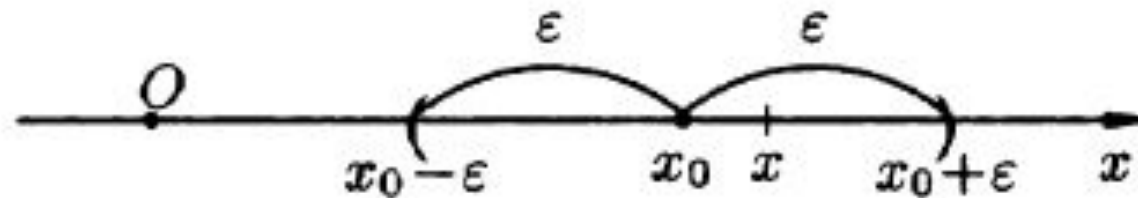
Между этими множествами существует соотношение

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

# 1. Множества. Действительные числа

## Числовые промежутки. Окрестность точки

 Пусть  $x_0$  — любое действительное число (точка на числовой прямой). **Окрестностью** точки  $x_0$  называется любой интервал  $(a; b)$ , содержащий точку  $x_0$ . В частности, интервал  $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ , где  $\varepsilon > 0$ , называется  **$\varepsilon$ -окрестностью** точки  $x_0$ . Число  $x_0$  называется **центром**, а число  $\varepsilon$  — **радиусом**.



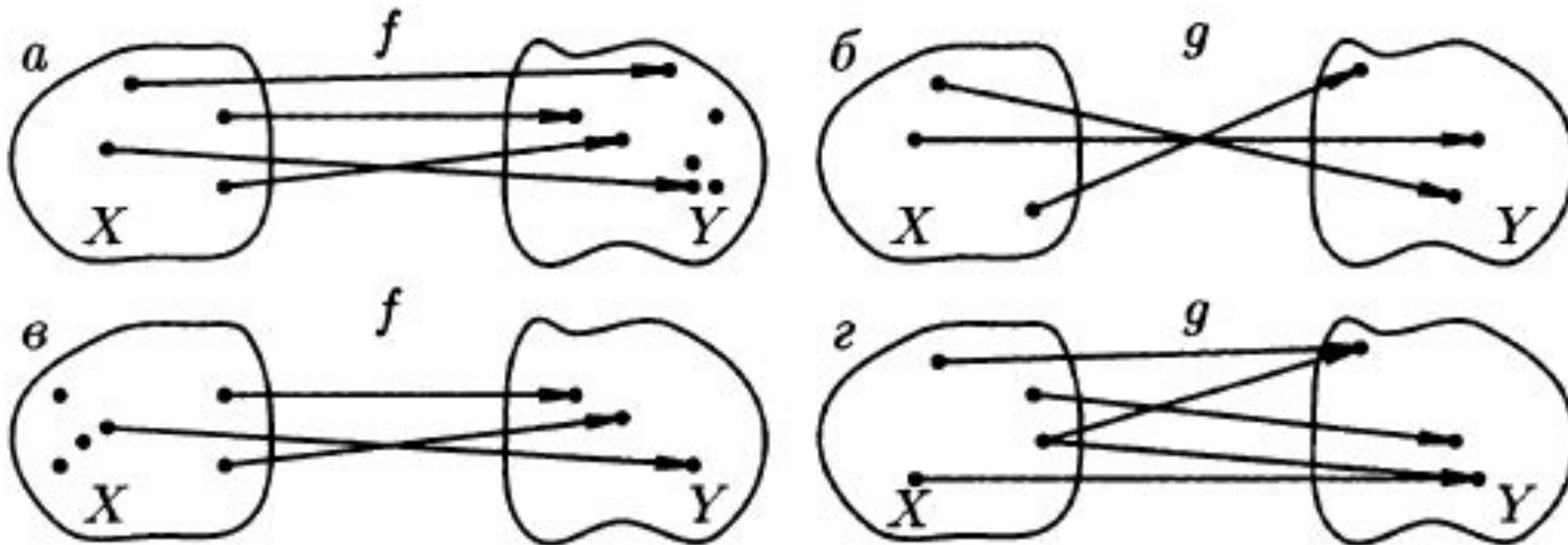


## 2. Функции

Одним из основных математических понятий является понятие функции. Понятие функции связано с установлением зависимости (связи) между элементами двух множеств.

⇒ Пусть даны два непустых множества  $X$  и  $Y$ . Соответствие  $f$ , которое каждому элементу  $x \in X$  сопоставляет один и только один элемент  $y \in Y$ , называется **функцией** и записывается  $y = f(x)$ ,  $x \in X$  или  $f : X \rightarrow Y$ . Говорят еще, что функция  $f$  **отображает** множество  $X$  на множество  $Y$ .

## 2. Функции



Множество  $X$  называется *областью определения* функции  $f$  и обозначается  $D(f)$ . Множество всех  $y \in Y$  называется *множеством значений* функции  $f$  и обозначается  $E(f)$ .

### 3. Числовая последовательность

☞ Под *числовой последовательностью*  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$  понимается функция

$$x_n = f(n),$$

заданная на множестве  $\mathbb{N}$  натуральных чисел. Кратко последовательность обозначается в виде  $\{x_n\}$  или  $x_n, n \in \mathbb{N}$ . Число  $x_1$  называется первым членом (элементом) последовательности,  $x_2$  — вторым, ...,  $x_n$  — *общим* или  *$n$ -м членом последовательности*.

$$v_n = \{2, 5, 10, \dots, n^2 + 1, \dots\}; \quad z_n = \{-1, 2, -3, 4, \dots, (-1)^n \cdot n, \dots\};$$
$$y_n = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\right\}; \quad u_n = \left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots, \frac{n-1}{n}, \dots\right\}.$$

### 3. Числовая последовательность

☞ Последовательность  $\{x_n\}$  называется *ограниченной*, если существует такое число  $M > 0$ , что для любого  $n \in \mathbb{N}$  выполняется неравенство

$$|x_n| \leq M.$$

☞ Последовательность  $\{x_n\}$  называется *возрастающей* (*неубывающей*), если для любого  $n$  выполняется неравенство  $x_{n+1} > x_n$  ( $x_{n+1} \geq x_n$ ). Аналогично определяется убывающая (невозрастающая) последовательность.

☞ Все эти последовательности называются *монотонными* последовательностями.



## 4. Бесконечно малые и большие числовые последовательности

⇒ Последовательность  $\{\alpha_n\}$  называется *бесконечно малой*, если для любого сколь угодно малого положительного числа  $\varepsilon$  можно подобрать такой номер  $N$ , что, начиная с этого номера (т. е. для всех  $n \geq N$ ), будет выполнено неравенство  $|\alpha_n| < \varepsilon$ .

⇒ Последовательность  $\{x_n\}$  называется *положительной бесконечно большой*, если для любого сколь угодно большого числа  $M$  найдется такой номер  $N$ , что для всех  $n$ , начиная с этого номера, выполняется неравенство  $x_n > M$ .

## 5. Предел числовой последовательности

Можно заметить, что члены последовательности  $u_n$  неограниченно приближаются к числу 1. В этом случае говорят, что последовательность  $u_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  стремится к пределу 1.

⇒ Число  $a$  называется *пределом последовательности*  $\{x_n\}$ , если для любого положительного числа  $\varepsilon$  найдется такое натуральное число  $N$ , что при всех  $n > N$  выполняется неравенство

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

Коротко определение предела можно записать так:

$$(\forall \varepsilon > 0 \exists N : \forall n > N \implies |x_n - a| < \varepsilon) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

## 5. Предел числовой последовательности

В случае, если последовательность  $\{x_n\}$  имеет своим пределом число  $a$ , говорят также, что последовательность  $\{x_n\}$  *сходится* (или *стремится*) к числу  $a$ , и обозначают этот факт так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \quad \text{или} \quad x_n \rightarrow a \quad (\text{при } n \rightarrow \infty).$$

$\Rightarrow$  Если последовательность не имеет предела, то говорят, что она *расходится*.

## 5. Предел числовой последовательности

Не всякая последовательность имеет предел. Сформулируем без доказательства признак существования предела последовательности.

**Теорема 1. (Вейерштрасс).** Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел.

Следовательно, на основании теоремы Вейерштрасса последовательность  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , имеет предел, обозначаемый обычно буквой  $e$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Число  $e$  называют *неперовым* числом. Число  $e$  иррациональное, его приближенное значение равно 2,72 ( $e = 2,718281828459045\dots$ ).



## 6. Операции над пределами числовой последовательности

1. Предел суммы (разности) двух сходящихся последовательностей равен сумме (соответственно, разности) их пределов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b.$$

2. Предел произведения двух сходящихся последовательностей равен произведению их пределов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b.$$

## 6. Операции над пределами числовой последовательности

3. Предел частного двух сходящихся последовательностей равен частному их пределов:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b, (b \neq 0, y_n \neq 0 \forall n) \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}.$$

В частности:

— постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad c \in \mathbb{R} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} (cx_n) = c \cdot a;$$

Найти пределы последовательностей:

1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - n + 2}{5n^2 + 2};$

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1});$

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - n + 2}{5n^2 + 2};$$

○ 1) Преобразуем выражение, стоящее под знаком предела, поделив числитель и знаменатель на старшую степень  $n$ , т. е. на  $n^2$ :

$$\frac{3n^2 - n + 2}{5n^2 + 2} = \frac{3 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{5 + \frac{2}{n^2}}.$$

Отсюда, используя теорему о действиях над пределами, получим:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 - n + 2}{5n^2 + 2} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{5 + \frac{2}{n^2}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(5 + \frac{2}{n^2}\right)} = \\ &= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2}}{\lim_{n \rightarrow \infty} 5 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n^2}} = \frac{3 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}}{5 + 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2}} = \\ &= \frac{3 - 0 + 0}{5 + 0} = \frac{3}{5}.\end{aligned}$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1});$$

2) Домножим и разделим выражение под знаком предела на сопряженное к нему, после чего воспользуемся формулой разности квадратов:

$$\begin{aligned} \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1} &= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \\ &= \frac{(\sqrt{n+1})^2 - (\sqrt{n-1})^2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \frac{(n+1) - (n-1)}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}.\end{aligned}$$

Поскольку последовательность  $\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}$  — бесконечно большая, то последовательность  $\frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}}$  — бес-

конечно малая. Отсюда  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}} = 0$ , а значит, и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}) = 0.$$



## 7. Предел функции в точке

Пусть функция  $y = f(x)$  определена в некоторой окрестности точки  $x_0$ , кроме, быть может, самой точки  $x_0$ .

⇒ **Определение 1** (на «языке последовательностей», или по Гейне). Число  $A$  называется **пределом функции**  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  (или при  $x \rightarrow x_0$ ), если для любой последовательности допустимых значений аргумента  $x_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  ( $x_n \neq x_0$ ), сходящейся к  $x_0$  (т. е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ ), последовательность соответствующих значений функции  $f(x_n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , сходится к числу  $A$  (т. е.  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ ).



## 7. Предел функции в точке

**⇒** **Определение 2** (на «языке  $\varepsilon$ - $\delta$ », или по Коши). Число  $A$  называется **пределом функции в точке  $x_0$**  (или при  $x \rightarrow x_0$ ), если для любого положительного  $\varepsilon$  найдется такое положительное число  $\delta$ , что для всех  $x \neq x_0$ , удовлетворяющих неравенству  $|x - x_0| < \delta$ , выполняется неравенство  $|f(x) - A| < \varepsilon$ .

$$\left( \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x : \underbrace{|x - x_0| < \delta, x \neq x_0}_{\text{или } 0 < |x - x_0| < \delta} \implies |f(x) - A| < \varepsilon \right) \iff$$
$$\iff \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

## 8. Односторонние пределы

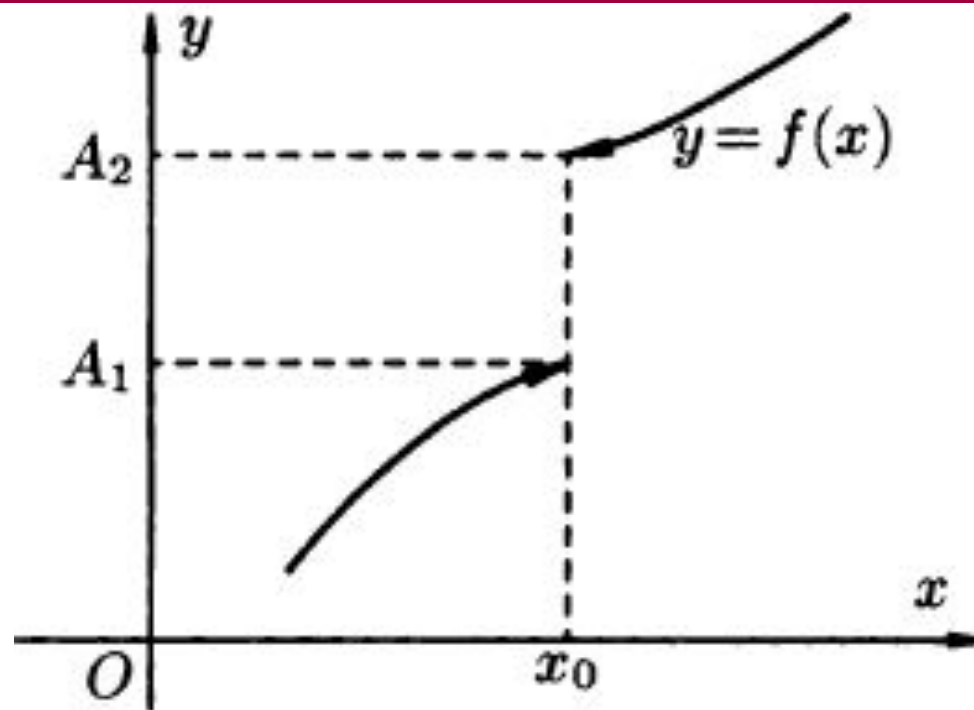
☞ Число  $A_1$  называется *пределом функции  $y = f(x)$  слева* в точке  $x_0$ , если для любого числа  $\varepsilon > 0$  существует число  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  такое, что при  $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ , выполняется неравенство  $|f(x) - A_1| < \varepsilon$ . Предел слева записывают так:  $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A_1$  или коротко:  $f(x_0 - 0) = A_1$  (обозначение Дирихле).

Аналогично определяется *предел функции справа*, запишем его с помощью символов:

$$\left( \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \forall x \in (x_0; x_0 + \delta) \implies |f(x) - A_2| < \varepsilon \right) \iff$$
$$\iff \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A_2.$$

## 8. Односторонние пределы

☞ Пределы функции слева и справа называются *односторонними* пределами. Очевидно, если существует  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ , то существуют и оба односторонних предела, причем  $A = A_1 = A_2$ .



## 9. Основные теоремы о пределах

**Теорема 1**      Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \pm \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x).$$

**Следствие 1**      Функция может иметь только один предел при  $x \rightarrow x_0$ .

## 9. Основные теоремы о пределах

**Теорема 2.** Предел произведения двух функций равен произведению их пределов:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x).$$

## 9. Основные теоремы о пределах

**Следствие 2.** Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

**Следствие 3.** Предел степени с натуральным показателем равен той же степени предела:  $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^n = \left( \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^n$ . В частности,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = x_0^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$



## 9. Основные теоремы о пределах

**Теорема 3.** Предел дроби равен пределу числителя, деленному на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x)} \quad \left( \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) \neq 0 \right).$$

**Пример 1.** Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 2x + 7)$ .

○ Решение:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 2x + 7) &= \lim_{x \rightarrow 1} 3x^2 - \lim_{x \rightarrow 1} 2x + \lim_{x \rightarrow 1} 7 = \\ &= 3 \left( \lim_{x \rightarrow 1} x \right)^2 - 2 \lim_{x \rightarrow 1} x + 7 = 3 \cdot 1 - 2 + 7 = 8. \quad \bullet \end{aligned}$$





**Пример 2.** Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 14x - 32}{x^2 - 6x + 8}$ .

○ Решение:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 14x - 32}{x^2 - 6x + 8} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 16)}{(x - 2)(x - 4)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + 16}{x - 4} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x + 16)}{\lim_{x \rightarrow 2} (x - 4)} = \frac{2 + 16}{2 - 4} = -9. \quad \bullet \end{aligned}$$


## 10. Бесконечно большая функция (б.б.ф.)

☞ Функция  $y = f(x)$  называется *бесконечно большой при  $x \rightarrow x_0$* , если для любого числа  $M > 0$  существует число  $\delta = \delta(M) > 0$ , что для всех  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $0 < |x - x_0| < \delta$ , выполняется неравенство  $|f(x)| > M$ .

Например, функция  $y = \frac{1}{x - 2}$  есть б.б.ф. при  $x \rightarrow 2$ .

Например,  $y = 2^x$  есть б.б.ф. при  $x \rightarrow \infty$ .

## 10. Бесконечно малая функция (б.м.ф.)

 Функция  $y = f(x)$  называется *бесконечно малой* при  $x \rightarrow x_0$ ,  
если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0.$$

Примерами б.м.ф. служат функции  $y = x^2$  при  $x \rightarrow 0$ ;  $y = x - 2$  при  $x \rightarrow 2$ ;  $y = \sin x$  при  $x \rightarrow \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ .

## 11. Эквивалентные бесконечно малые функции

Среди бесконечно малых функций одного порядка особую роль играют так называемые эквивалентные бесконечно малые.

⇒ Если  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha}{\beta} = 1$ , то  $\alpha$  и  $\beta$  называются *эквивалентными бесконечно малыми* (при  $x \rightarrow x_0$ ); это обозначается так:  $\alpha \sim \beta$ .

Например,  $\sin x \sim x$  при  $x \rightarrow 0$ , т. к.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ;  $\operatorname{tg} x \sim x$  при  $x \rightarrow 0$ , т. к.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$ .

## 11. Эквивалентные бесконечно малые функции

Ниже приведены *важнейшие эквивалентности*, которые используются при вычислении пределов:

1.  $\sin x \sim x$  при  $x \rightarrow 0$ ;

2.  $\operatorname{tg} x \sim x$  ( $x \rightarrow 0$ );

3.  $\arcsin x \sim x$  ( $x \rightarrow 0$ );

4.  $\operatorname{arctg} x \sim x$  ( $x \rightarrow 0$ );

5.  $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$  ( $x \rightarrow 0$ );

6.  $e^x - 1 \sim x$  ( $x \rightarrow 0$ );

7.  $a^x - 1 \sim x \cdot \ln a$  ( $x \rightarrow 0$ );

8.  $\ln(1 + x) \sim x$  ( $x \rightarrow 0$ );

9.  $\log_a(1 + x) \sim x \cdot \log_a e$  ( $x \rightarrow 0$ );

10.  $(1 + x)^k - 1 \sim k \cdot x$ ,  $k > 0$  ( $x \rightarrow 0$ );

в частности,  $\sqrt{1 + x} - 1 \sim \frac{x}{2}$ .

**Пример 3** Найти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x}$ .

○ Решение: Так как  $\operatorname{tg} 2x \sim 2x$ ,  $\sin 3x \sim 3x$  при  $x \rightarrow 0$ , то

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3}.$$

## 12. Первый замечательный предел

При вычислении пределов выражений, содержащих тригонометрические функции, часто используют предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

называемый *первым замечательным пределом*.



**Пример 4.** Найти  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x}$ .

○ Решение: Имеем неопределенность вида  $\frac{0}{0}$ . Теорема о пределе дроби неприменима. Обозначим  $3x = t$ ; тогда при  $x \rightarrow 0$  и  $t \rightarrow 0$ , поэтому

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{2 \cdot \frac{t}{3}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3}{2} \cdot \frac{\sin t}{t} = \frac{3}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2}. \quad \bullet$$

## 12. Второй замечательный предел

Как известно, предел числовой последовательности  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , имеет предел, равный  $e$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Поэтому

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

или

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

называются *вторым замечательным пределом*.



**Пример 5.** Найти  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$ .

○ Решение: Обозначим  $x = 2t$ , очевидно,  $t \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow \infty$ . Имеем

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{2t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \cdot \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t = e \cdot e = e^2. \quad \bullet \end{aligned}$$



Государственное бюджетное  
образовательное учреждение  
высшего образования  
«Нижегородский государственный  
инженерно-экономический университет»

## **ЛЕКЦИЯ 1.**

**Модуль 1. Анализ функции одной переменной**  
**Модульная единица 1. Предел. Непрерывность**  
**Тема: Предел числовой последовательности.**  
**Предел функции (2ч.)**

Черемухин Артем Дмитриевич  
доцент кафедры  
«Математика и вычислительная техника»