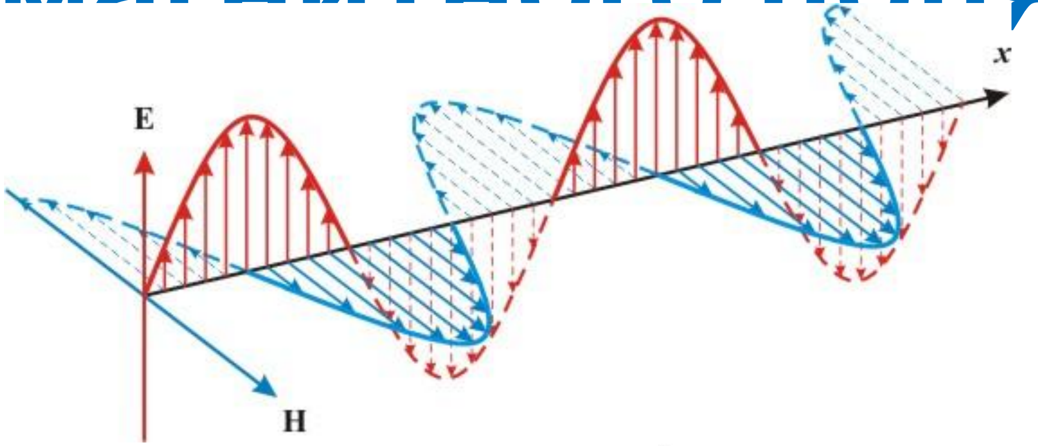
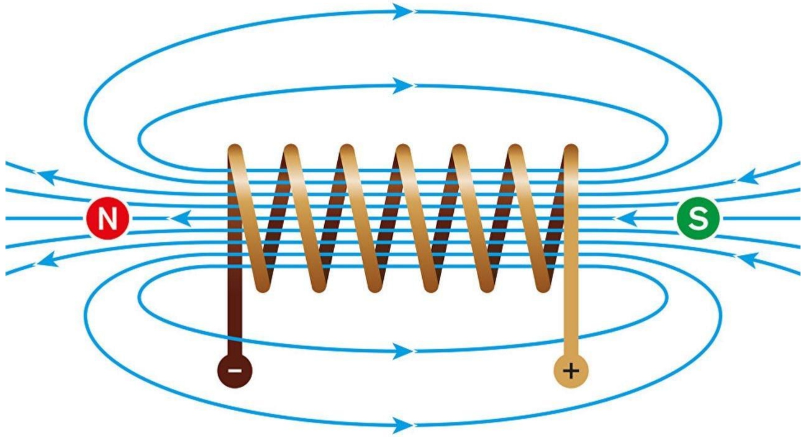
Теоретические основы электротехники

Теория электромагнитного поля



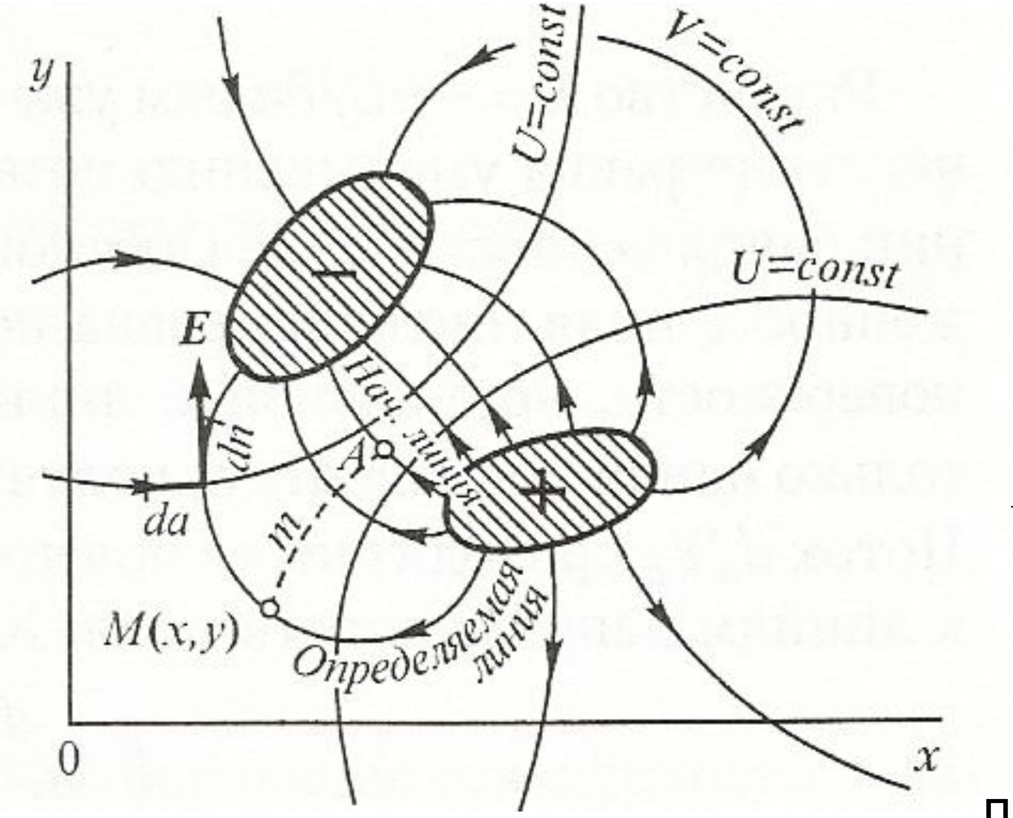


ВШВЭ, проф. Л. И. Сахно
2020

Применение функций комплексного переменного для описания плоскопараллельных полей

Функция потока

Линии равного потенциала в плоскости ***xOy*** определяются уравнением:



$$U(x,y) = const$$

$$\Delta U = const$$

Ψ_E - поток вектора $\vec{E}$ сквозь поверхность, которую описал бы отрезок ***MmA***, перемещаясь параллельно самому себе в направлении оси ***Oz*** и проходя путь ***l***

$$V = \Psi_E / l$$ - поток на единицу длины проводов

$$V(x,y) = const$$ - если все точки ***M (x,y)*** лежат на одной и той же линии напряженности поля

$$V(x,y)$$ - многозначная функция потока

Линии равной функции потока совпадают с линиями напряженности

Одна из линий напряженности выбирается в качестве линии нулевого потока. Выбор может быть сделан произвольно

Выражение для напряженности через функцию потока

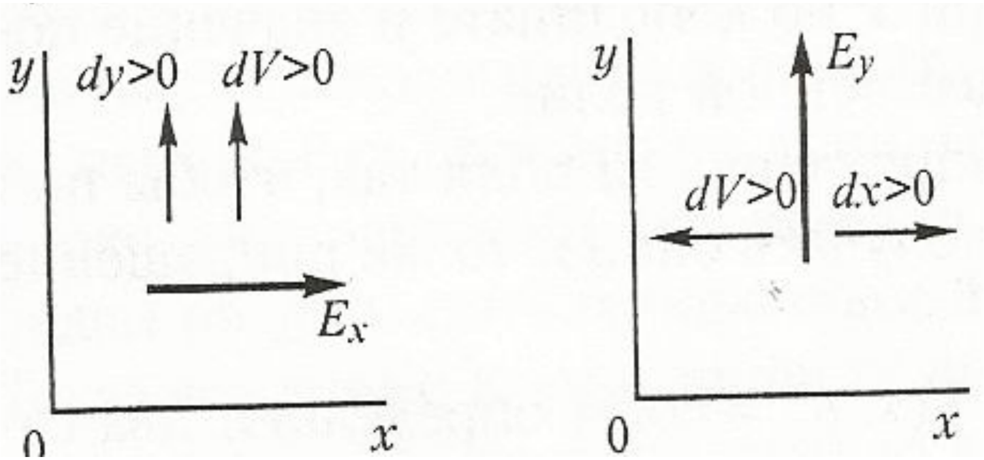
Условимся считать функцию потока, возрастающей влево от вектора для наблюдателя, расположившегося так, чтобы для него вектор направлен снизу вверх

$$E = -\frac{\partial U}{\partial n} = +\frac{\partial V}{\partial a}$$

Для декартовой системы координат:

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = +\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$E_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$



Уравнения Лапласа для функций потенциала и потока

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = +\frac{\partial V}{\partial y}$$
$$E_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x} \qquad (1)$$

Продифференцируем первое уравнение по x, а второе по y

$$-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \qquad -\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

Продифференцируем первое уравнение по y, а второе по x:

$$-\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \qquad -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

Таким образом функции U и V удовлетворяют уравнению Лапласа

Функция комплексного переменного

Плоскость комплексного переменного $z = x + jy = r \cdot e^{j\theta}$

Рассмотрим комплексную величину: $\varsigma = \xi + j\eta$

$\xi(x, y)$ $\eta(x, y)$ - функции x и y

$\varsigma(x, y)$ - регулярная аналитическая функция комплексного переменного

Функция ς однозначна, непрерывна и имеет непрерывную производную во всех точках области

Условия Коши-Римана для функции комплексного переменного:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\partial \xi}{\partial y} \qquad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

При этих условиях производная функции ς не зависит от направления дифференцирования

Сравнение условий Коши-Римана и выражений для напряженности поля:

$$\frac{\partial\eta}{\partial x} = -\frac{\partial\xi}{\partial y} \qquad E_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = +\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial y} = \frac{\partial\xi}{\partial x} \qquad E_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$\varsigma = \xi + j\eta = V + jU = f(z)$$ - комплексный потенциал поля

Составляющие напряженности поля :

$$E_X = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial\eta}{\partial x} \qquad E_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial\eta}{\partial y}$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \qquad (2)$$

Подставляя (2) в (1) ,
получаем:

$$E = \sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2} = \left|\frac{d\varsigma}{dz}\right|$$

Задача расчета поля решена, если найдена аналитическая функция $\varsigma = f(z)$
, удовлетворяющая граничным условиям на поверхности провода

Исследуя различные аналитические функции комплексного переменного можно найти соответствующие им поля и получить таким образом решения для ряда конкретных случаев

Метод заданного комплексного потенциала.

Этот метод расчета плоскопараллельных полей заключается в предварительном задании некоторой комплексной функции на плоскости – комплексного потенциала $W(z)$ и последующего определения, какой геометрической области предложенная функция $W(z)$ соответствует. Координаты точки на плоскости могут быть заданы в декартовой или полярной системе: $z = x + jy = r \cdot e^{j\theta}$

I. Пусть комплексный потенциал задан в виде:

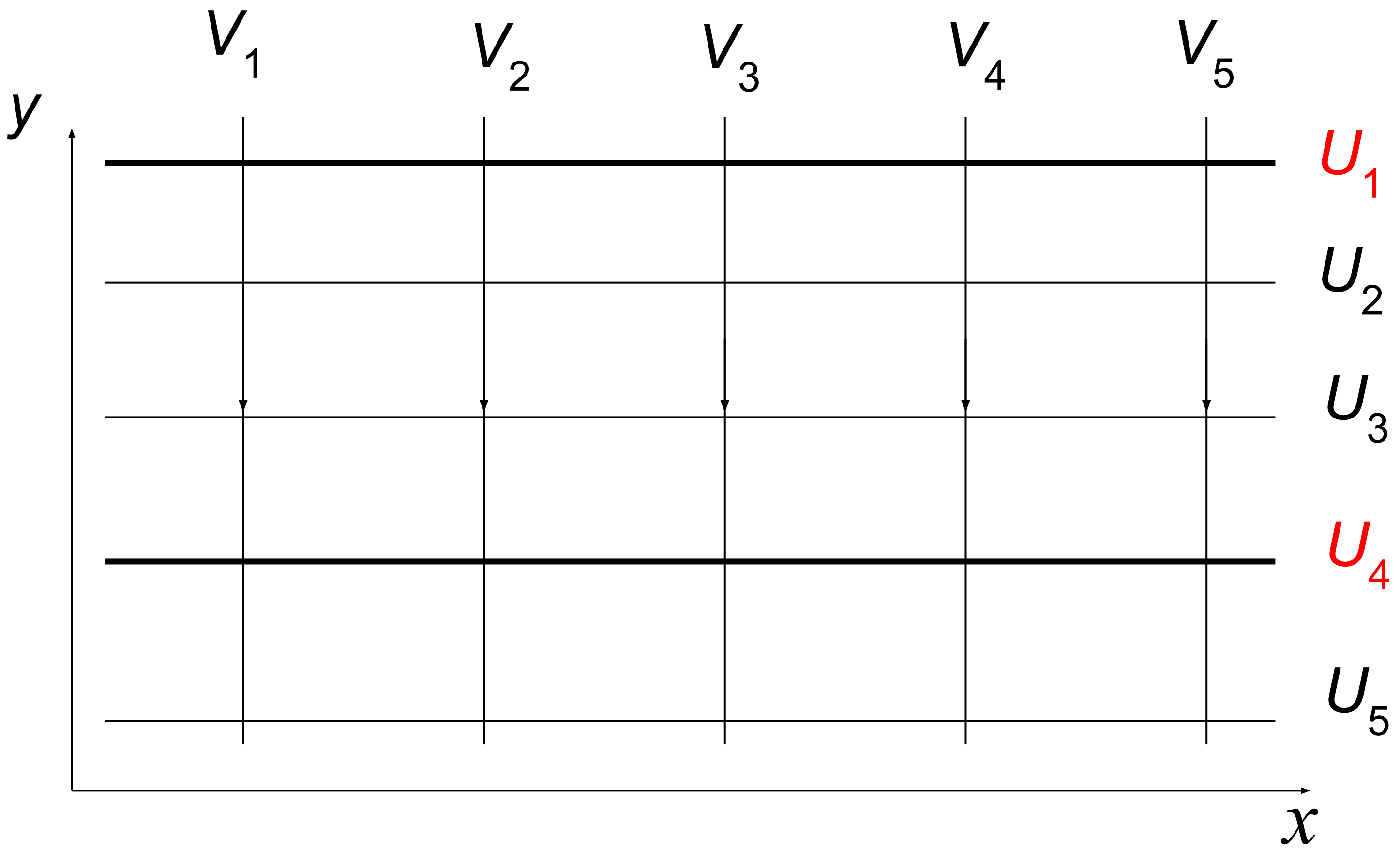
$W(z) = az + b = (ax + b) + jay = V + jU$,

тогда:

$V = ax + b = \mathrm{const}$ - уравнение линии напряженности, т.е. $x = \mathrm{const}$ вертикальные линии, а

$U = ay = \mathrm{const}$ - уравнение линии равного потенциала т.е. $y = \mathrm{const}$ горизонтальные линии.

При $a > 0$ с ростом x и y растут соответственно V и U. Принимая постоянным приращения потенциала и функции потока ($\Delta V = \text{const}$ и $\Delta U = \text{const}$), получаем постоянство приращения координат при переходе от линии к линии ($\Delta x = \text{const}$ и $\Delta y = \text{const}$)



Совместив поверхности двух проводников с двумя линиями равного потенциала (**U_1 и U_4**), получаем картину поля между двумя плоскими проводящими пластинами (внутри плоского конденсатора). Таким образом, мы установили, какой геометрической области соответствует принятый комплексный потенциал.

II. Пусть комплексный потенциал задан в виде:

$$W(z) = jA \ln z = jA \ln(r \cdot e^{j\theta}) = jA\,(\ln r + j\theta) = -A\theta + jA \ln r = V + jU,$$

тогда:

$V = -A\theta = \mathrm{const}$ уравнение линии напряженности, т.е. $\theta = const$. Эти линии представляют собой лучи, исходящие из начала координат;

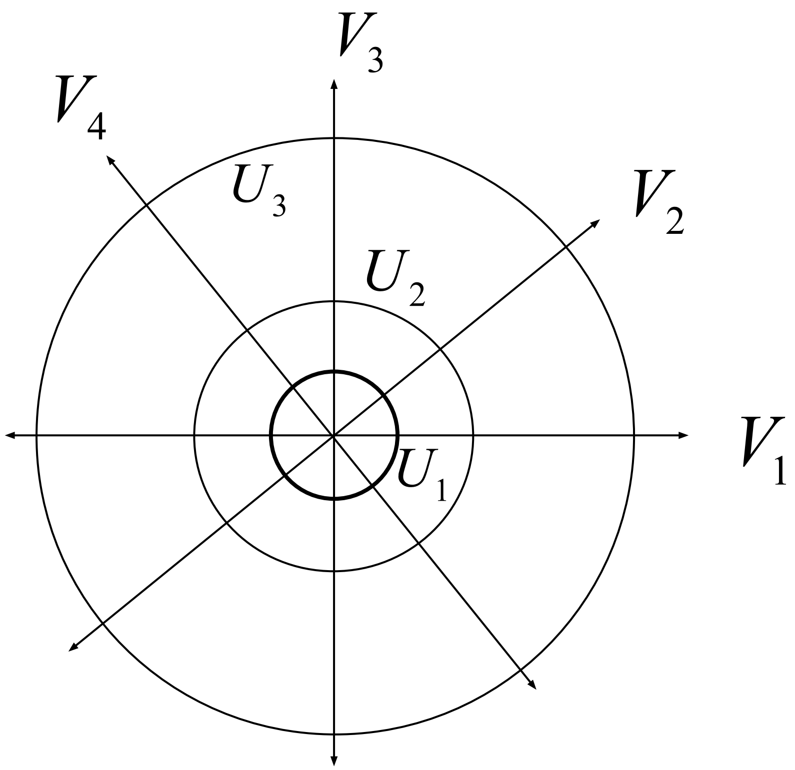
$U = A \ln r = \mathrm{const}$ уравнение линии равного потенциала, т.е. $\boldsymbol{r = \mathrm{const}}$ **.** Эти линии представляют собой концентрические окружности с центром в начале координат.

Принимая постоянным приращения потенциала и функции потока ($\Delta V = \mathrm{const}$ и $\Delta U = \mathrm{const}$), получаем постоянство приращения координаты $\Delta\theta = \mathrm{const}$ при переходе от одной к другой линии напряженности и постоянство отношений

радиусов соседних линий равного потенциала $\boxed{\dfrac{r_{k+1}}{r_k} = \mathrm{const}}$

Поле уединенного заряженного кругового цилиндра

При **θ =2π** получаем поверхность, охватывающую весь проводник с полным зарядом



$U_1 > U_2 > U_3$ $\quad$ $V_1 < V_2 < V_3$

$$\psi_E = \frac{q}{\varepsilon} \qquad V = \frac{q}{l\varepsilon} = \frac{\tau}{\varepsilon}$$

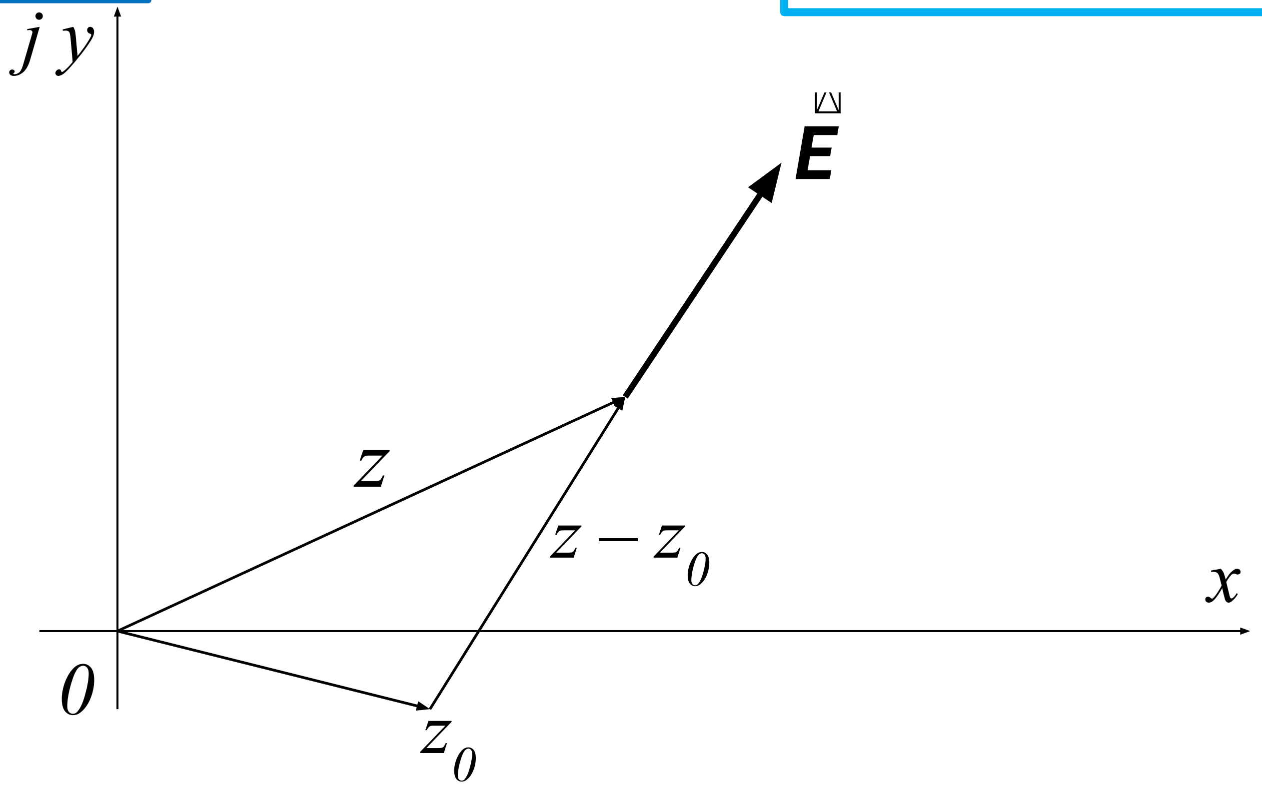
$$V = -A \cdot 2\pi = \frac{\tau}{\varepsilon} \qquad A = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}$$

$$\boxed{V = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\theta \qquad U = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln r}$$

Поле создается тонкой заряженной нитью, расположенной в точке с координатой $z = z_0$

$$W(z) = jA \ln z$$

$$W = j\,A \ln(z - z_0)$$



III. Поле двух тонких заряженных нитей

Для двух заряженных нитей с зарядами τ_1 и τ_2, расположенных в точках с координатами z_{10} и z_{20} запишем выражение для комплексного потенциала, воспользовавшись принципом наложения:

$$W(z) = jA_1 \ln(z - z_{10}) + jA_2 \ln(z - z_{20}) + C_1 + j\,C_2.$$

C_1 и C_2 – произвольные постоянные, зависящие от выбора места расположения начальных (нулевых) линий функции потока и потенциал

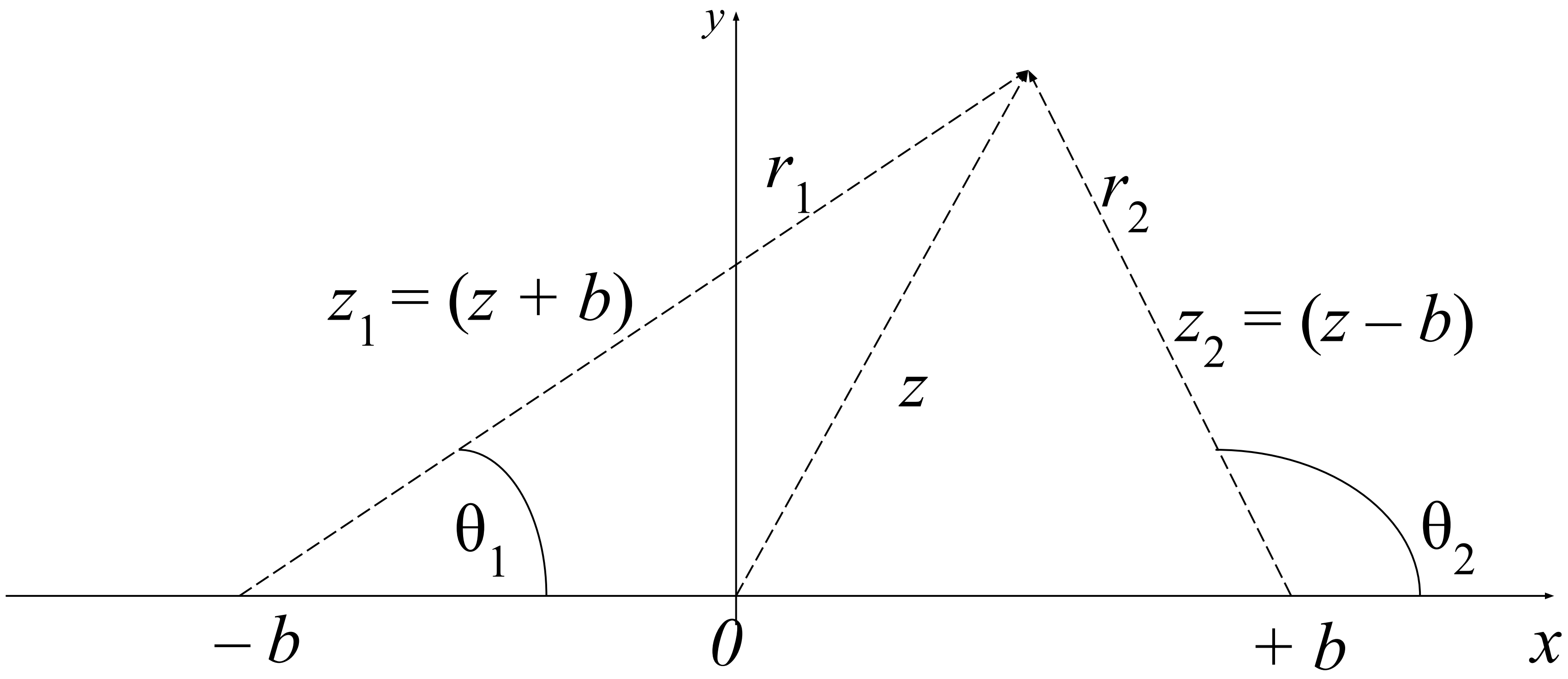
$$A_1 = -\frac{\tau_1}{2\pi\varepsilon} \qquad A_2 = -\frac{\tau_2}{2\pi\varepsilon} \qquad \tau_1 = -\tau_2 = \tau$$

Комплексный потенциал в произвольной точке имеет вид:

$$W = -j\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{z - z_{10}}{z - z_{20}} + C_1 + jC_2$$

$$W = -j\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{z - z_{10}}{z - z_{20}} + C_1 + jC_2$$

$$z_{10} = -b\ ; \quad z_{20} = +b$$



$$W = -j\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{z + b}{z - b} + C_1 + jC_2$$

$$z_1 = z + b = r_1 e^{j\theta_1} \qquad z_2 = z - b = r_2 \; e^{j\theta_2}$$

$$W = -j\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{z+b}{z-b} + C_1 + jC_2 \qquad W = -j\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_1}{r_2}e^{j(\theta_1-\theta_2)} + C_1 + jC_2$$

$$W = +j\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_2}{r_1} + jC_2 + \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}(\theta_1 - \theta_2) + C_1 = V + j\,U$$

Положим $C_2=0$, тогда получим $U=0$ при $r_1=r_2$, то есть линия нулевого потенциала – это ось ординат

$$U = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_2}{r_1} + C_2 \qquad V = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}(\theta_2 - \theta_1) + C_1$$

$$U = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{r_2}{r_1} + C_2 = \mathrm{const} \qquad \frac{r_2}{r_1} = \mathrm{const}$$

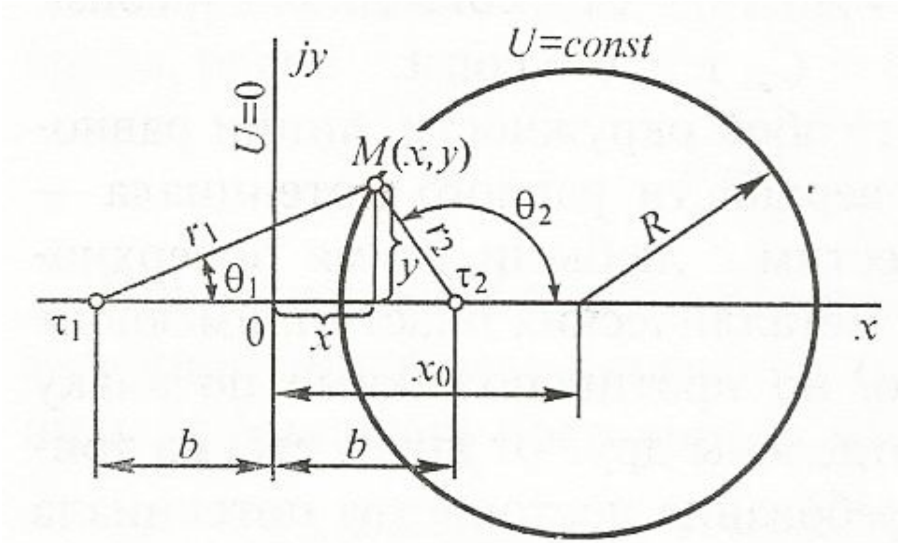
Линии равного потенциала в системе двух заряженных проводов

Линии равного потенциала – это окружности с центрами на оси ОХ с координатами центра:

$$\frac{r_2}{r_1} = k = const \qquad x_0 = \frac{1+k^2}{1-k^2}b \qquad y_0 = 0$$

и радиусом:

$$R = \frac{2k}{\left|1-k^2\right|}b$$



Чтобы приращение потенциала при переходе от любой линии равного потенциала к соседней
оставалась постоянным, должно быть соблюдено условие:

$$\Delta U = U_{\nu+1} - U_{\nu} = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\left(\ln\frac{r_{2,\nu+1}}{r_{1,\nu+1}} - \ln\frac{r_{2,\nu}}{r_{1,\nu}}\right) = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon}\ln\frac{k_{\nu+1}}{k_{\nu}} = const \qquad \frac{k_{\nu+1}}{k_{\nu}} = B = const$$

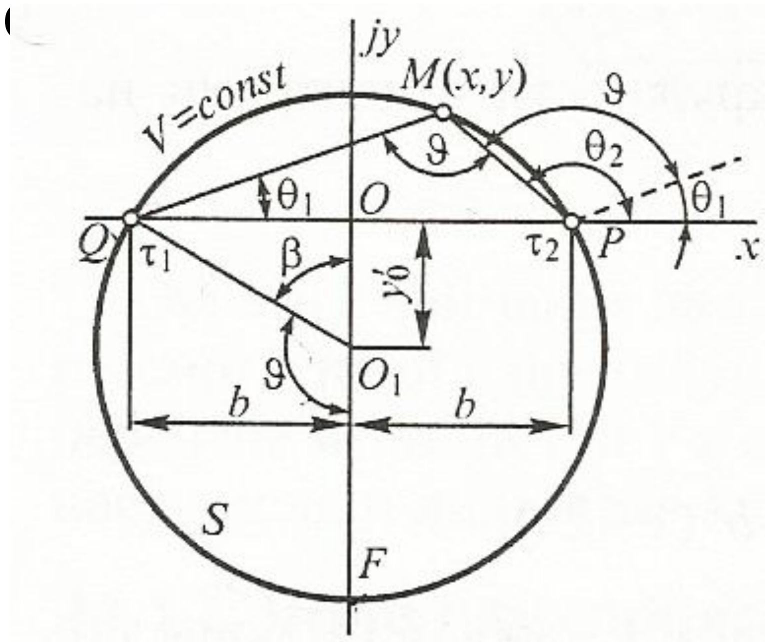
Линии равной напряженности поля в системе двух заряженных проводов

Положив в выражении для функции потока $C_1=0$, получим $V=0$ $\theta_2=\theta_1$

при

$$V=-\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}(\theta_2-\theta_1)=const \qquad \theta_2-\theta_1=\vartheta=const$$

Линия напряженности поля является уравнением дуги окружности, пересекающейся



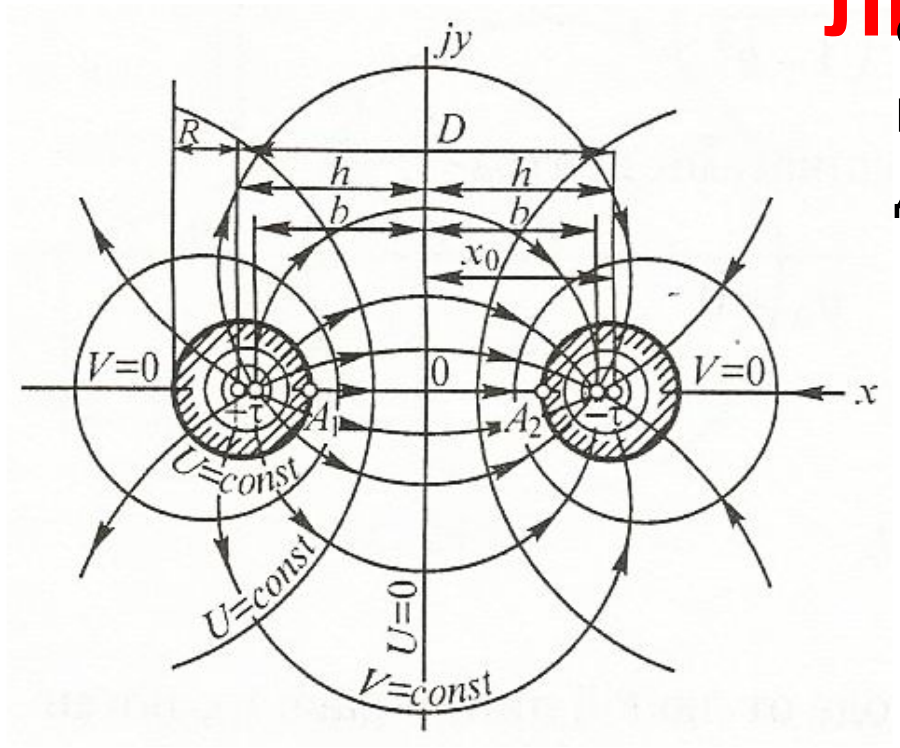
Координаты центров окружностей:

$$x_0'=0 \qquad y_0'=-bctg\beta$$

$$y_0'=-bctg(\pi-\vartheta)=bctg\vartheta$$

$$\Delta V=V_{v+1}-V_v \qquad \Delta\vartheta=const$$

Картина поля двух линейных проводов и реальной линии передачи



Формулы для определения положения линейных проводов (электрических осей), эквивалентным двум проводам круглого сечения

$$h = |x_0|$$ - координата центра окружности равного потенциала

$$h = \frac{1+k^2}{|1-k^2|} b \qquad R = \frac{2k}{|1-k^2|} b$$

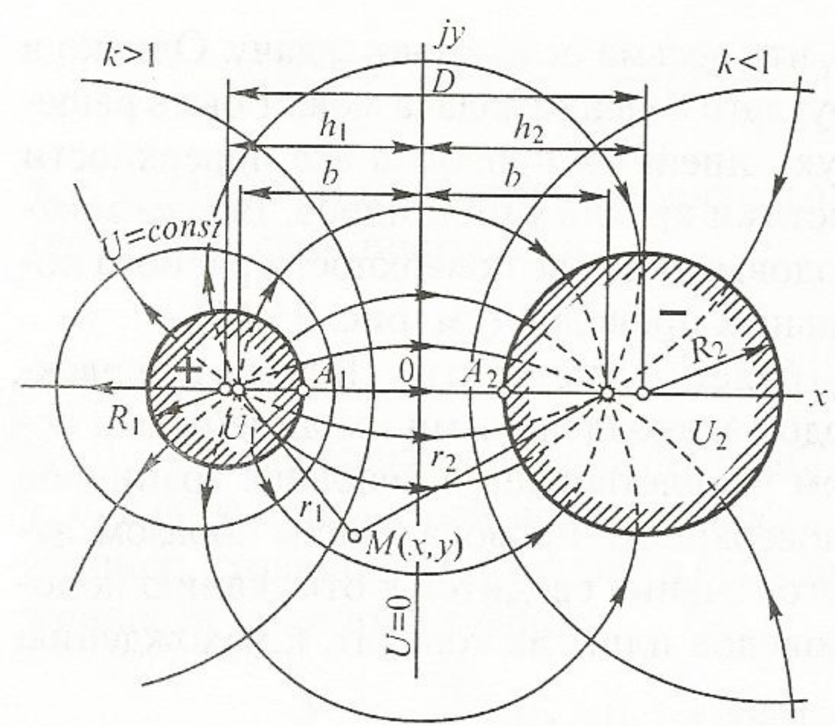
$$b = \sqrt{h^2 - R^2}$$

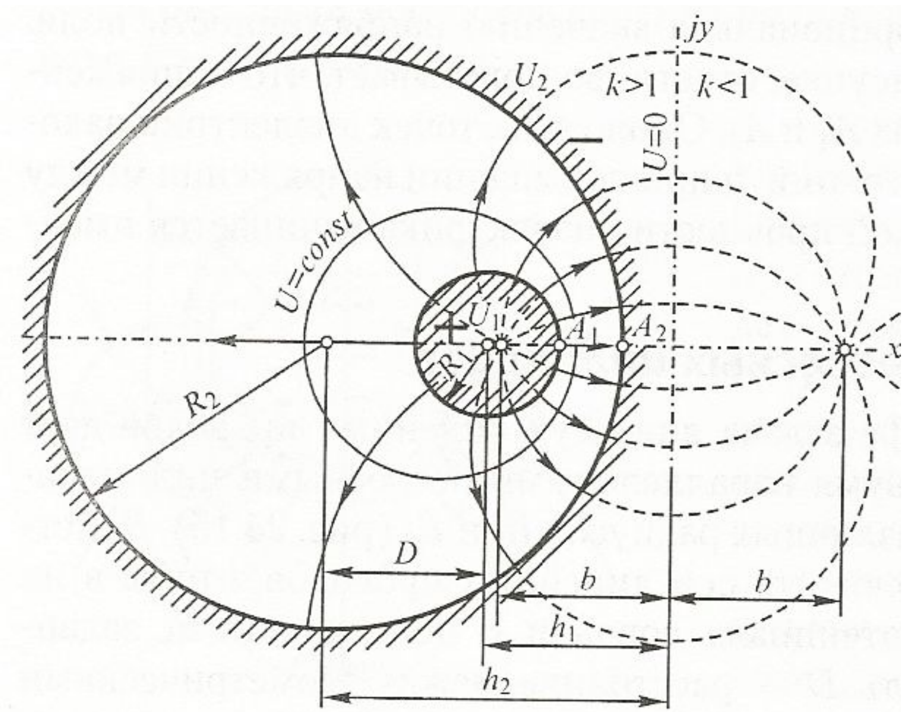
$$B = \sqrt{3}$$

$$\Delta\vartheta = \pi / 6$$

На рисунке заштрихованы сечения проводов около контуров сечений

Поле параллельных несоосных цилиндров





Положение плоскости нулевого потенциала:

$$h_1 = -\frac{D^2 + R_1^2 - R_2^2}{2D} \qquad h_2 = \frac{D^2 + R_1^2 - R_2^2}{2D}$$

$$h_1 = -\frac{D^2 + R_1^2 - R_2^2}{2D} \qquad h_2 = \frac{D^2 + R_2^2 - R_1^2}{2D}$$

$$b = \sqrt{h_1^2 - R_1^2} = \sqrt{h_2^2 - R_2^2}$$

- положение электрических осей