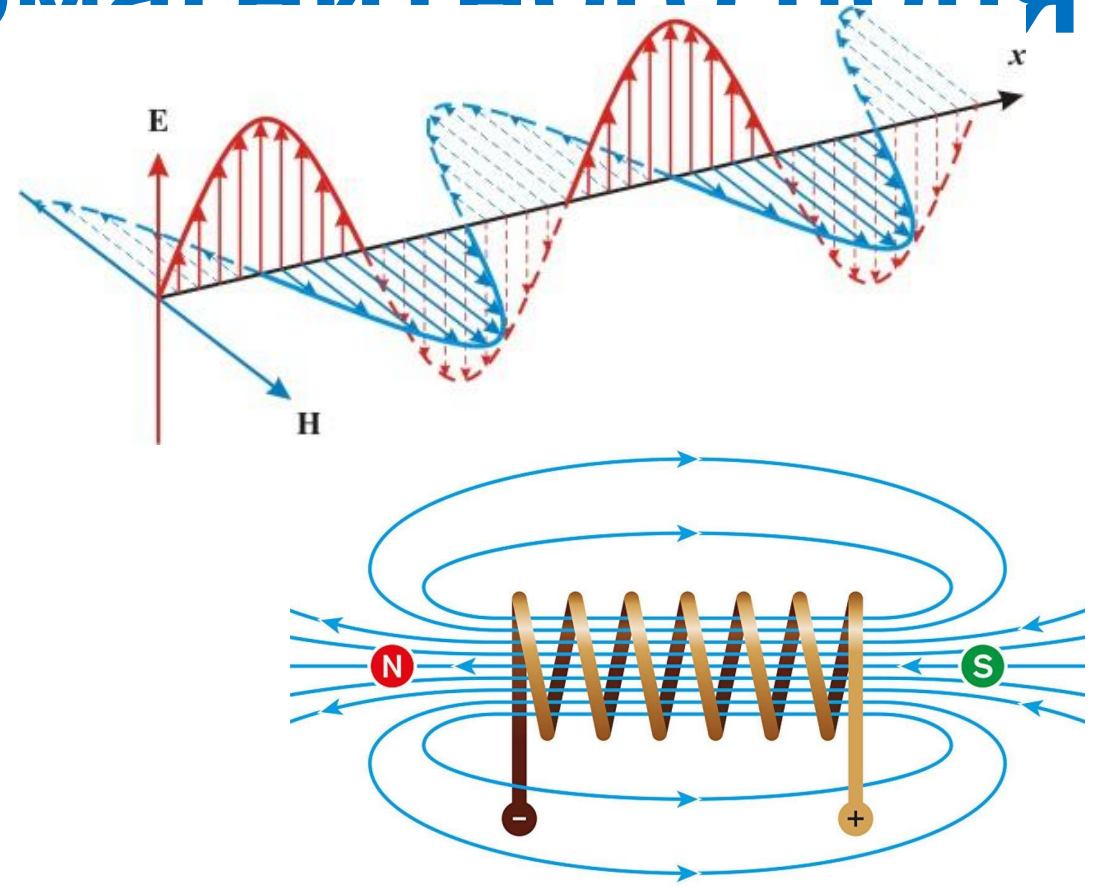


# Теоретические основы электротехники

## Теория электромагнитного поля



# **Применение функций комплексного переменного для описания плоскопараллельных полей**

# Функция

## потока

Линии равного потенциала в плоскости  $xOy$  определяются уравнением:

$$U(x, y) = const$$

$$\Delta U = const$$

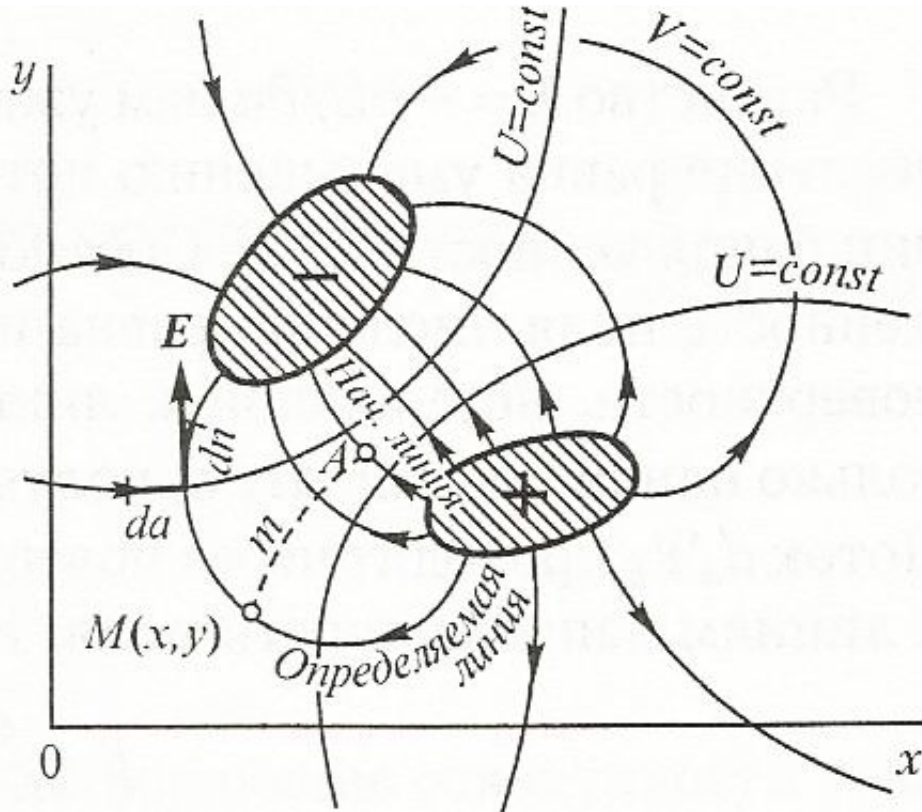
$\Psi_E$  - поток вектора  $\vec{E}$  сквозь поверхность, которую описал бы отрезок  $MmA$ , перемещаясь параллельно самому себе в направлении оси  $Ox$  и проходя путь  $l$  проводов

$V(x, y) = const$  - если все точки  $M(x, y)$  лежат на одной и той же линии напряженности поля

$V(x, y)$  - многозначная функция потока

Линии равной функции потока совпадают с линиями напряженности

Одна из линий напряженности выбирается в качестве линии нулевого потока. Выбор может быть сделан произвольно



# Выражение для напряженности через функцию потока

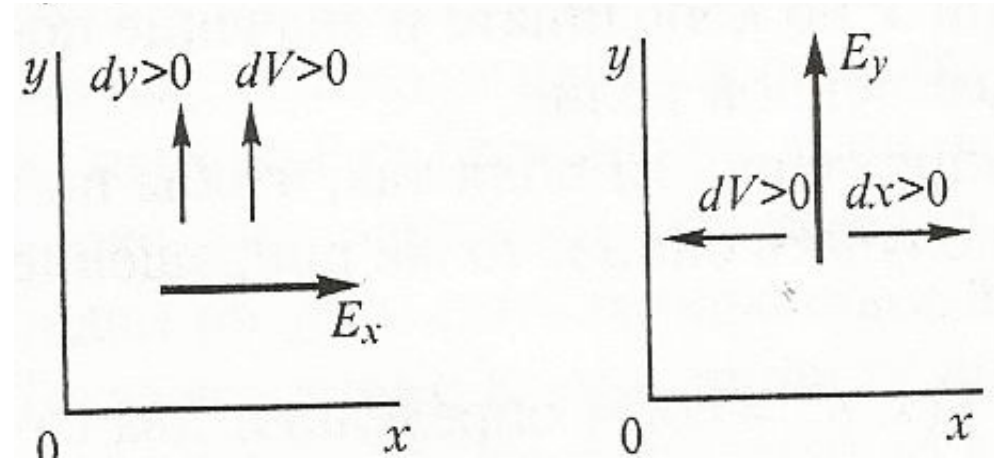
Условимся считать функцию потока, возрастающей влево от вектора для наблюдателя, расположившегося так, чтобы для него вектор направлен снизу вверх

$$E = -\frac{\partial U}{\partial n} = +\frac{\partial V}{\partial a}$$

Для декартовой системы координат:

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = +\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$E_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$



# Уравнения Лапласа для функций потенциала и потока

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial U}{\partial x} = +\frac{\partial V}{\partial y} \\ E_y &= -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x} \end{aligned} \quad (1)$$

Продифференцируем первое уравнение по  $x$ , а второе по  $y$

$$-\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \quad -\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

Продифференцируем первое уравнение по  $y$ , а второе по  $x$ :

$$-\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \quad -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

Таким образом функции  $U$  и  $V$  удовлетворяют уравнению Лапласа

# Функция комплексного переменного

Плоскость комплексного переменного  $z = x + jy = r \cdot e^{j\theta}$

Рассмотрим комплексную  $\zeta = \xi + j\eta$

величину:

$\xi(x, y)$   $\eta(x, y)$  - функции **x** и

$\zeta(x, y)$  - регулярная аналитическая функция комплексного

переменного  $\zeta$  однозначна, непрерывна и имеет непрерывную производную во всех точках области

Условия Коши-Римана для функции комплексного

переменного  $\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\partial \xi}{\partial y}$   $\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial x}$

При этих условиях производная функции  $\zeta$  не зависит от направления дифференцирования

Сравнение условий Коши-Римана и выражений для напряженности поля:

$$\frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\partial \xi}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = +\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$E_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$\zeta = \xi + j\eta = V + jU = f(z) \text{ - комплексный потенциал поля}$$

Составляющие напряженности поля :

$$E_x = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial \eta}{\partial x}$$

$$E_y = -\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial \eta}{\partial y}$$

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1),  
получаем:

$$E = \sqrt{\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2} = \left| \frac{d\zeta}{dz} \right|$$

Задача расчета поля решена, если найдена аналитическая функция  $f(z)$ , удовлетворяющая граничным условиям на поверхности провода

Исследуя различные аналитические функции комплексного переменного можно найти соответствующие им поля и получить таким образом решения для ряда конкретных случаев



# Метод заданного комплексного потенциала.

Этот метод расчета плоскопараллельных полей заключается в предварительном задании некоторой комплексной функции на плоскости – **комплексного потенциала**  $W(z)$  и последующего определения, какой геометрической области предложенная функция  $W(z)$  соответствует. Координаты точки на плоскости могут быть заданы в декартовой или полярной системе:  $z = x + jy = r \cdot e^{j\theta}$

**I. Пусть комплексный потенциал задан в виде:**

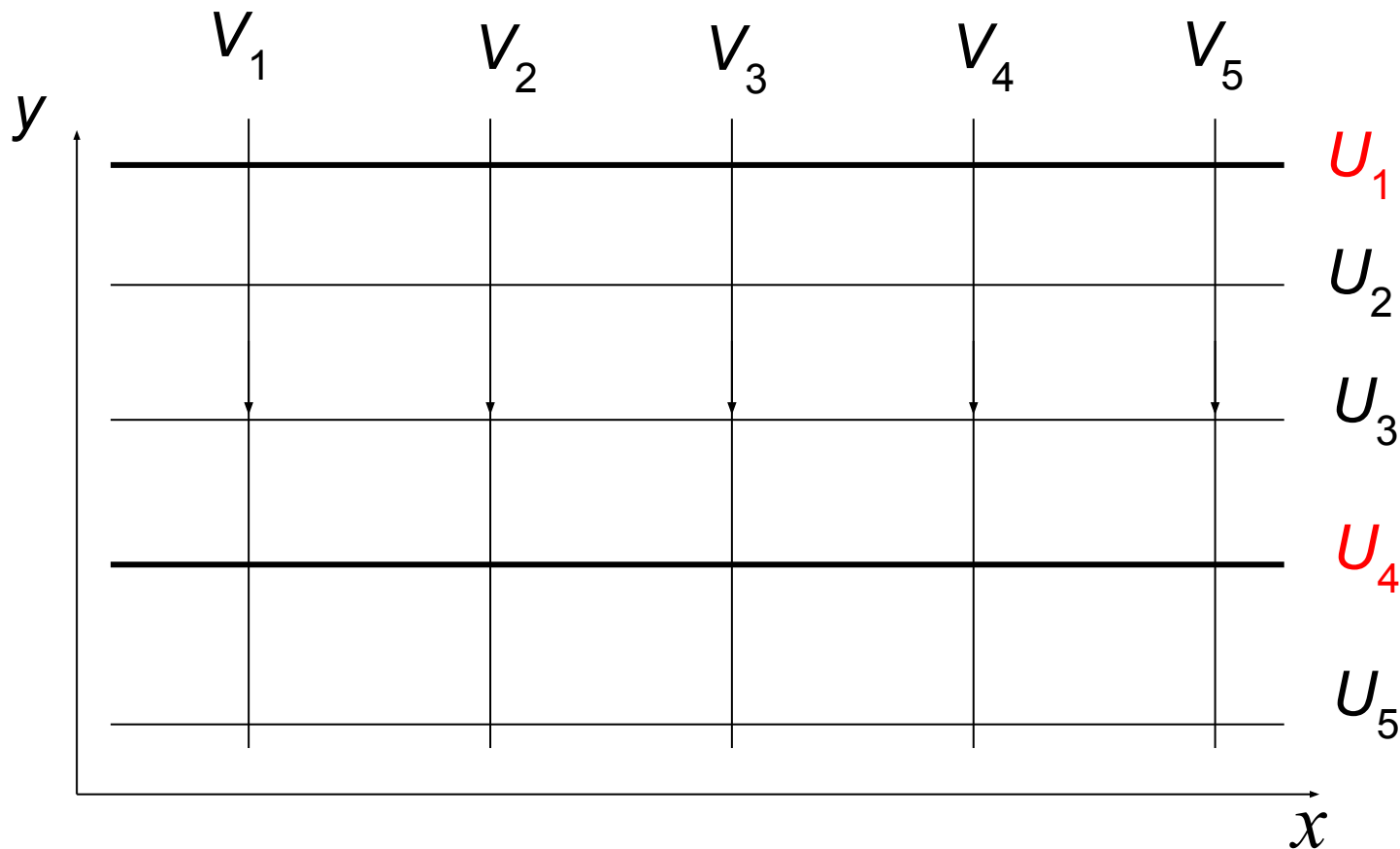
$$W(z) = az + b = (ax + b) + jay = V + jU ,$$

тогда:

$V = ax + b = \text{const}$  - уравнение **линии напряженности**, т.е.  $x = \text{const}$   
вертикальные линии, а

$U = ay = \text{const}$  - уравнение **линии равного потенциала** т.е.  $y = \text{const}$   
горизонтальные линии.

При  $a > 0$  с ростом  $x$  и  $y$  растут соответственно  $V$  и  $U$ . Принимая постоянным приращения потенциала и функции потока ( $\Delta V = \text{const}$  и  $\Delta U = \text{const}$ ), получаем постоянство приращения координат при переходе от линии к линии ( $\Delta x = \text{const}$  и  $\Delta y = \text{const}$ )



Совместив поверхности двух проводников с двумя линиями равного потенциала ( $U_1$  и  $U_4$ ), получаем картину поля между двумя плоскими проводящими пластинами (внутри плоского конденсатора). Таким образом, мы установили, какой геометрической области соответствует принятый комплексный потенциал.

## II. Пусть комплексный потенциал задан в виде:

$$W(z) = jA \ln z = jA \ln(r \cdot e^{j\theta}) = jA (\ln r + j\theta) = -A\theta + jA \ln r = V + jU,$$

тогда:

$V = -A\theta = \text{const}$  уравнение линии напряженности, т.е.  $\theta = \text{const}$ . Эти линии представляют собой лучи, исходящие из начала координат;

$U = A \ln r = \text{const}$  уравнение линии равного потенциала, т.е.  $r = \text{const}$ . Эти линии представляют собой концентрические окружности с центром в начале координат.

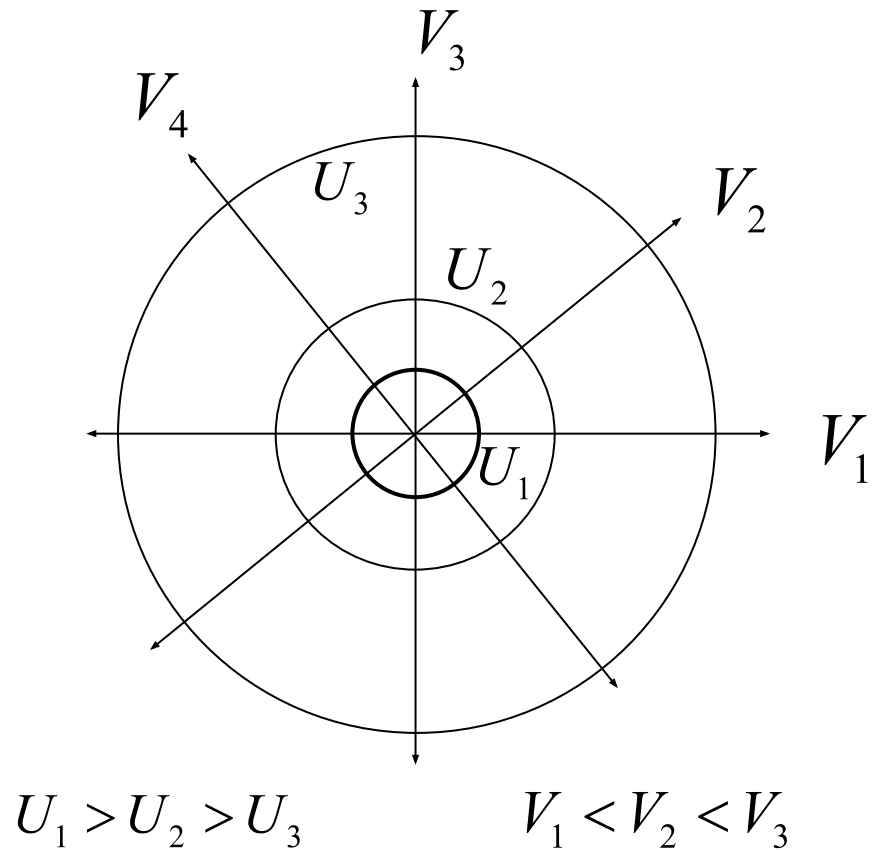
Принимая постоянным приращения потенциала и функции потока ( $\Delta V = \text{const}$  и  $\Delta U = \text{const}$ ), получаем постоянство приращения координаты  $\Delta\theta = \text{const}$  при переходе от одной к другой линии напряженности и постоянство отношений

радиусов соседних линий равного потенциала

$$\frac{r_{k+1}}{r_k} = \text{const}$$

# Поле уединенного заряженного кругового цилиндра

При  $\theta = 2\pi$  получаем поверхность, охватывающую весь проводник с полным зарядом



$$\Psi_E = \frac{q}{\varepsilon}$$

$$V = \frac{q}{l\varepsilon} = \frac{\tau}{\varepsilon}$$

$$V = -A \cdot 2\pi = \frac{\tau}{\varepsilon}$$

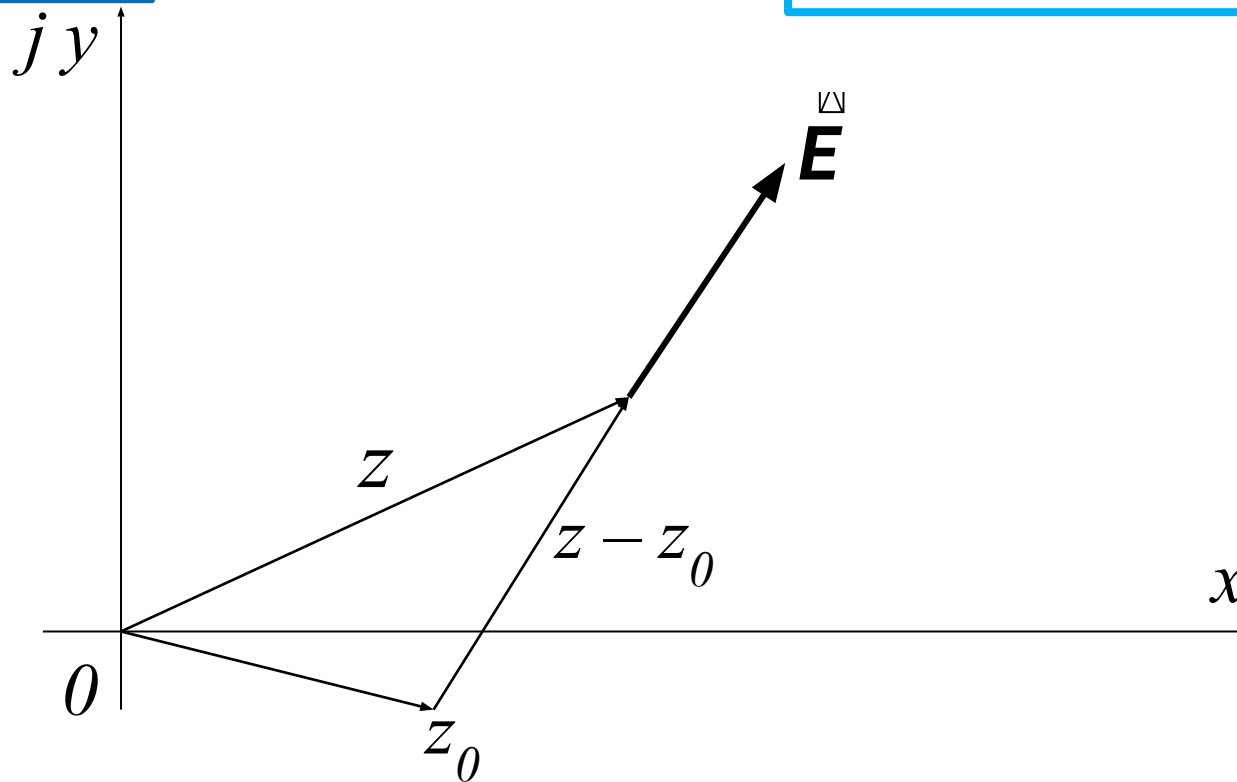
$$A = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon}$$

$$V = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \theta \quad U = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \ln r$$

Поле создается тонкой заряженной нитью, расположенной  
в точке с координатой  $z = z_0$

$$W(z) = jA \ln z$$

$$W = jA \ln(z - z_0)$$



### III. Поле двух тонких заряженных

**нитей**

Для двух заряженных нитей с зарядами  $\tau_1$  и  $\tau_2$ , расположенных в точках с координатами  $z_{10}$  и  $z_{20}$  запишем выражение для комплексного потенциала, воспользовавшись принципом наложения:

$$W(z) = jA_1 \ln(z - z_{10}) + jA_2 \ln(z - z_{20}) + C_1 + jC_2.$$

$C_1$  и  $C_2$  – произвольные постоянные, зависящие от выбора места расположения начальных (нулевых) линий функции потока и потенциал

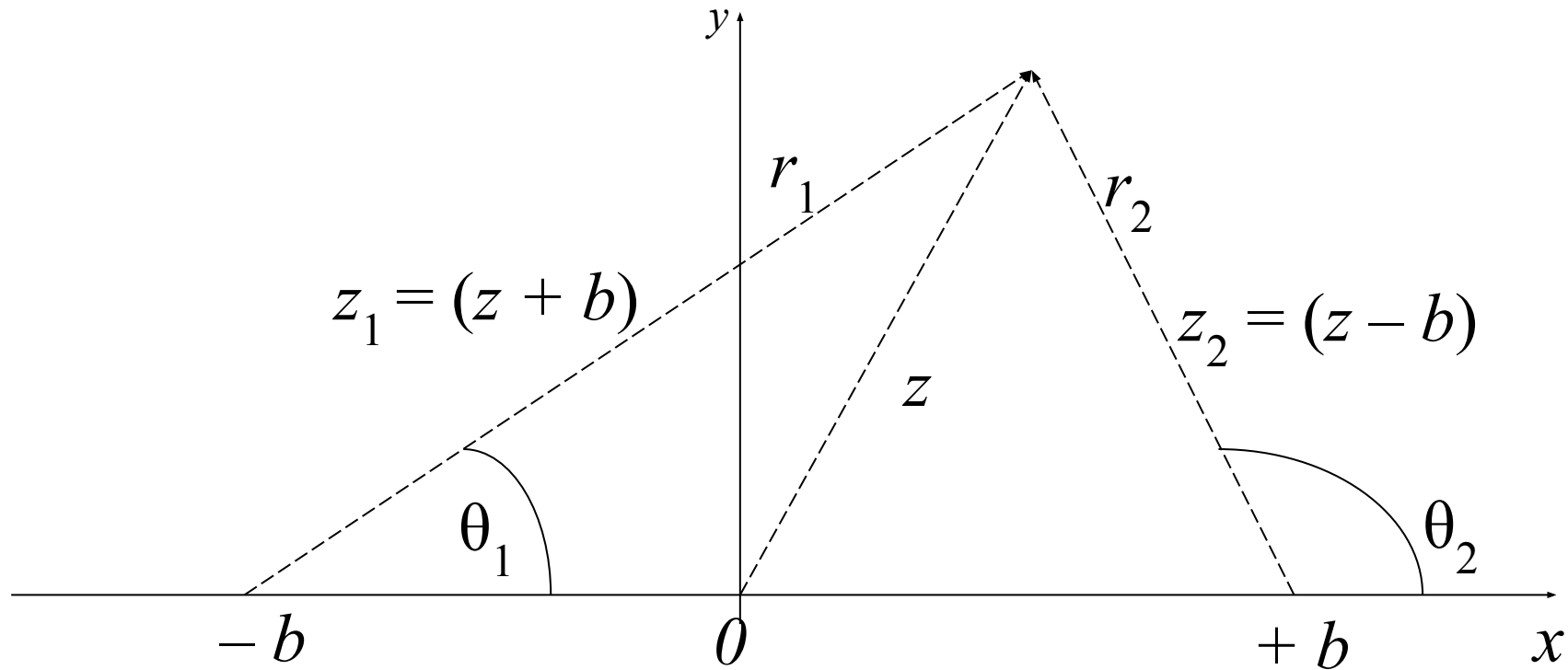
$$A_1 = -\frac{\tau_1}{2\pi\epsilon} \quad A_2 = -\frac{\tau_2}{2\pi\epsilon} \quad \tau_1 = -\tau_2 = \tau$$

**Комплексный потенциал в произвольной точке имеет вид:**

$$W = -j \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{z - z_{10}}{z - z_{20}} + C_1 + jC_2$$

$$W = -j \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{z - z_{10}}{z - z_{20}} + C_1 + jC_2$$

$$z_{10} = -b; \quad z_{20} = +b$$



$$W = -j \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{z + b}{z - b} + C_1 + jC_2$$

$$z_1 = z + b = r_1 e^{j\theta_1}$$

$$z_2 = z - b = r_2 e^{j\theta_2}$$

$$W = -j \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{z+b}{z-b} + C_1 + jC_2$$

$$W = -j \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)} + C_1 + jC_2$$

$$W = +j \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_2}{r_1} + jC_2 + \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} (\theta_1 - \theta_2) + C_1 = V + jU$$

Положим  $C_2=0$ , тогда получим  $U=0$  при  $r_1=r_2$ , то есть линия нулевого потенциала – это ось ординат

$$U = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_2}{r_1} + C_2$$

$$V = -\frac{\tau}{2\pi\varepsilon} (\theta_2 - \theta_1) + C_1$$

$$U = \frac{\tau}{2\pi\varepsilon} \ln \frac{r_2}{r_1} + C_2 = \text{const}$$

$$\frac{r_2}{r_1} = \text{const}$$



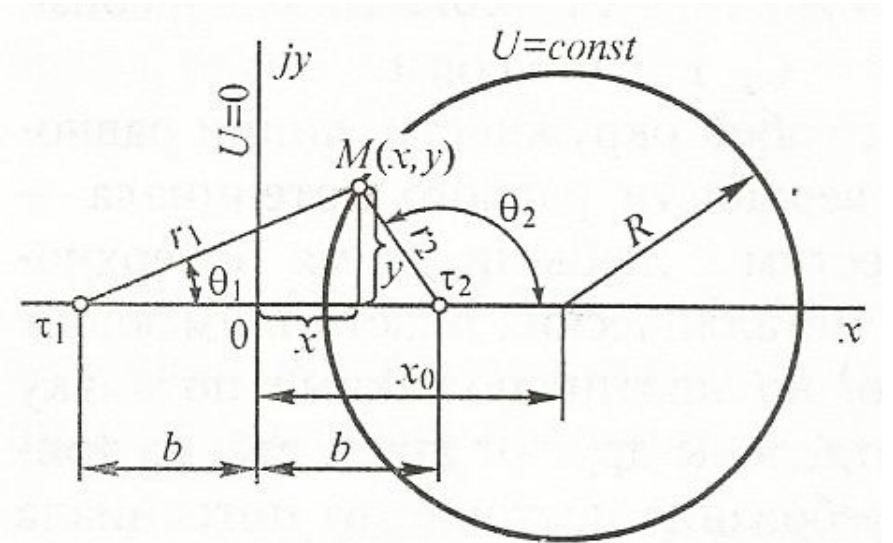
# Линии равного потенциала в системе двух заряженных проводов

Линии равного потенциала – это окружности с центрами на оси OX с координатами центра:

$$\frac{r_2}{r_1} = k = const \quad x_0 = \frac{1+k^2}{1-k^2}b \quad y_0 = 0$$

и радиусом:

$$R = \frac{2k}{|1-k^2|}b$$



Чтобы приращение потенциала при переходе от любой линии равного потенциала к соседней

оставалась постоянным, должно быть соблюдено условие:

$$\Delta U = U_{v+1} - U_v = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \left( \ln \frac{r_{2,v+1}}{r_{1,v+1}} - \ln \frac{r_{2,v}}{r_{1,v}} \right) = \frac{\tau}{2\pi\epsilon} \ln \frac{k_{v+1}}{k_v} = const \quad \frac{k_{v+1}}{k_v} = B = const$$

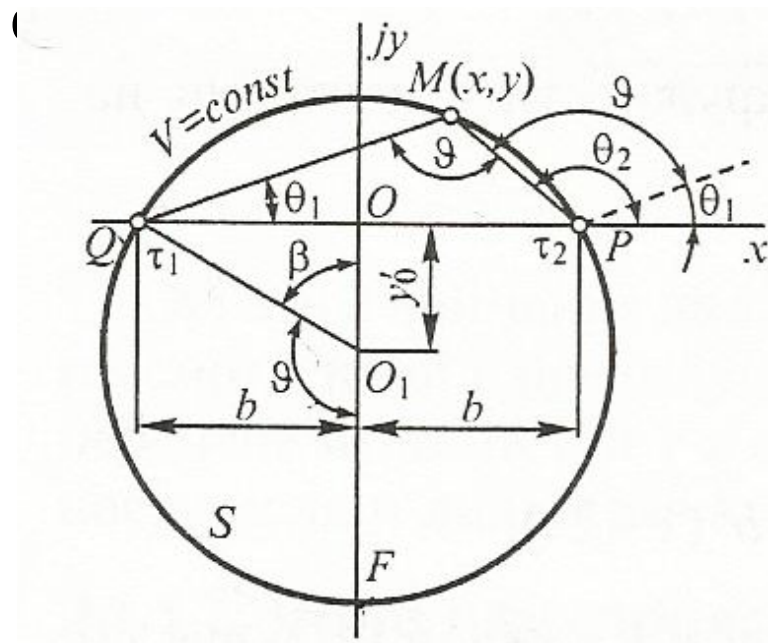
# Линии равной напряженности поля в системе двух заряженных проводов

Положив в выражении для функции потока  $C_1=0$ , получим  $V=0$   $\theta_2 = \theta_1$

при

$$V = -\frac{\tau}{2\pi\epsilon}(\theta_2 - \theta_1) = const \quad \theta_2 - \theta_1 = \vartheta = const$$

Линия напряженности поля является уравнением дуги окружности, пересекающейся



Координаты центров

окружностей:

$$x'_0 = 0 \quad y'_0 = -bctg\beta$$

$$y'_0 = -bctg(\pi - \vartheta) = bctg\vartheta$$

$$\Delta V = V_{v+1} - V_v \quad \Delta \vartheta = const$$

# Картина поля двух линейных проводов и реальной линии передачи

## Формулы для определения положения линейных проводов (электрических осей), эквивалентным двум проводам круглого сечения

Формулы для определения положения линейных проводов (электрических осей), эквивалентным двум проводам круглого сечения

$h = |x_0|$  - координата центра окружности равного потенциала

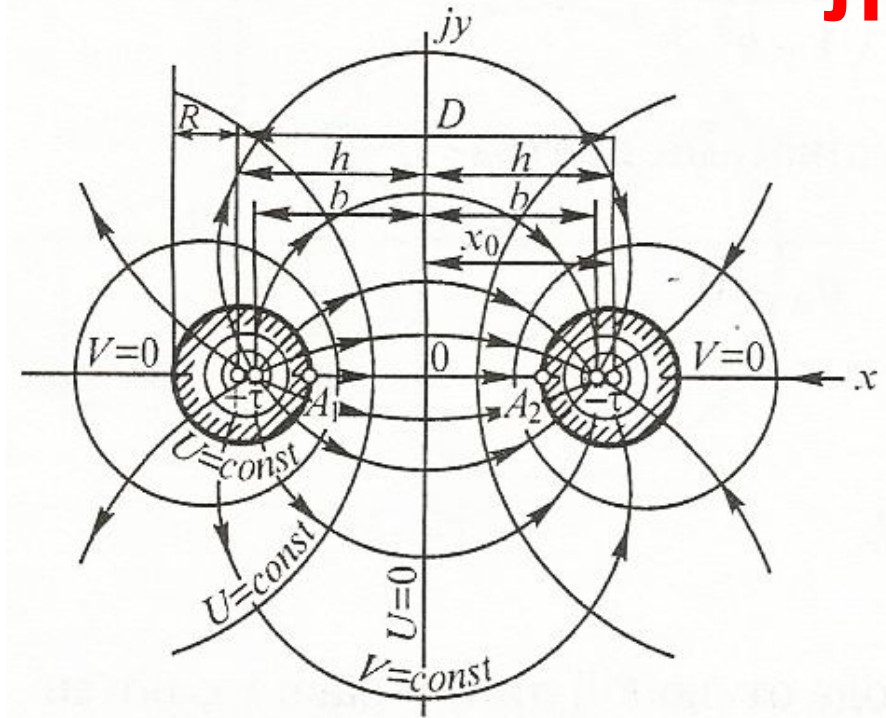
$$h = \frac{1 + k^2}{|1 - k^2|} b \quad R = \frac{2k}{|1 - k^2|} b$$

$$b = \sqrt{h^2 - R^2}$$

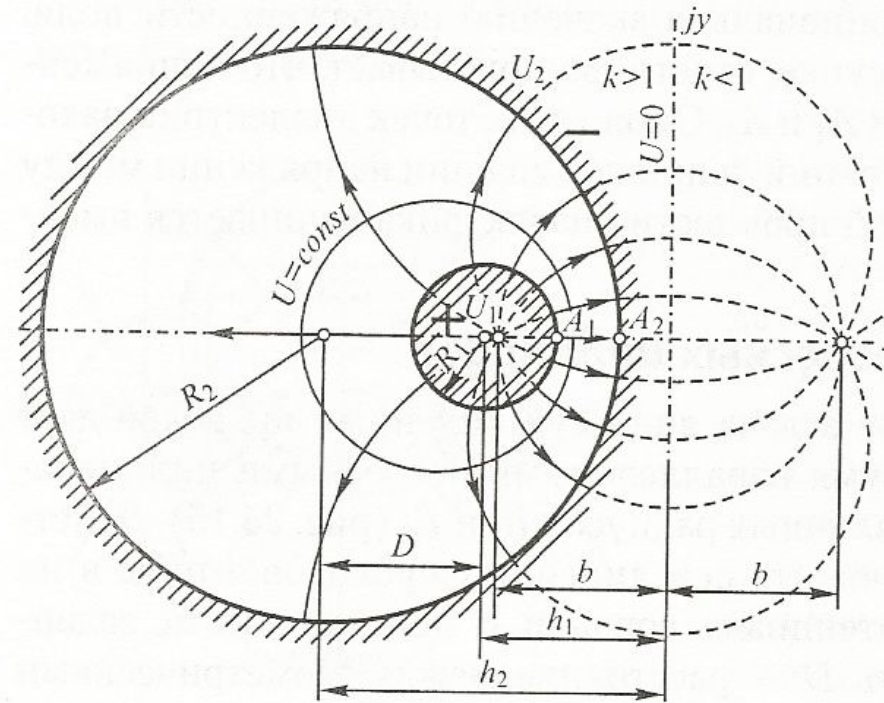
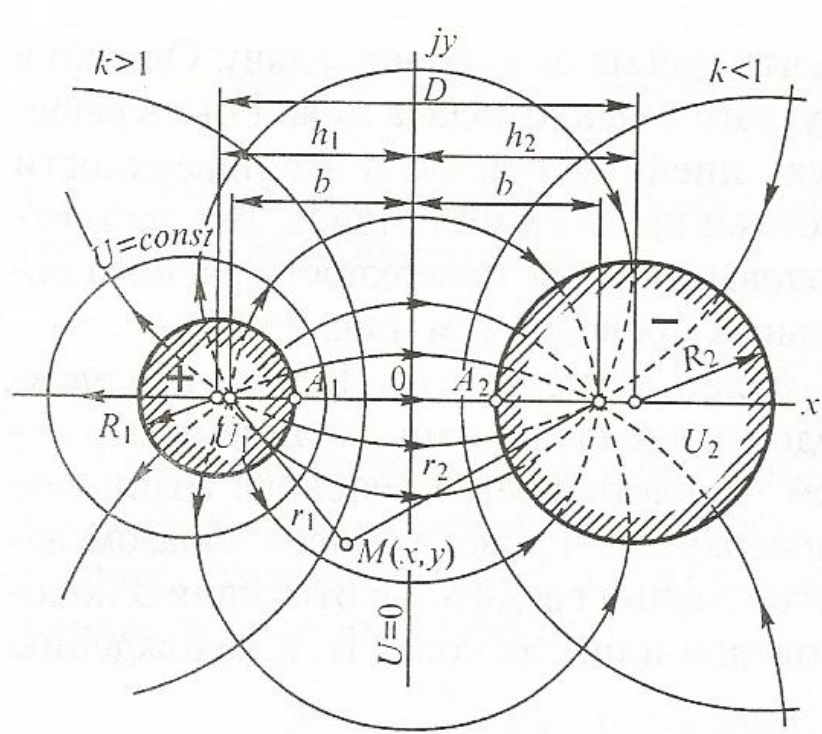
$$B = \sqrt{3}$$

$$\Delta \vartheta = \pi / 6$$

На рисунке заштрихованы сечения проводов около контуров сечений



# Поле параллельных несоосных цилиндров



Положение плоскости нулевого

потенциала:

$$h_1 = -\frac{D^2 + R_1^2 - R_2^2}{2D}$$

$$h_2 = \frac{D^2 + R_2^2 - R_1^2}{2D}$$

$$h_1 = -\frac{D^2 + R_1^2 - R_2^2}{2D}$$

$$h_2 = \frac{D^2 + R_2^2 - R_1^2}{2D}$$

$$b = \sqrt{h_1^2 - R_1^2} = \sqrt{h_2^2 - R_2^2}$$

- положение электрических осей