РАЗДЕЛ 1

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

МАТРИЦЫ. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ.

§ 1. МАТРИЦЫ

1.1. Основные понятия

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк одинаковой длины (или n столбцов одинаковой длины). Матрица записывается в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или, сокращенно, $A = (a_{ij})$, где $i = \overline{1, m}$ (т. е. $i = 1, 2, 3, \ldots, m$) — номер строки, $j = \overline{1, n}$ (т. е. $j = 1, 2, 3, \ldots, n$) — номер столбца.

Матрицу A называют матрицей *размера* $m \times n$ и пишут $A_{m \times n}$. Числа a_{ij}, составляющие матрицу, называются ее *элементами*. Элементы, стоящие на диагонали, идущей из верхнего левого угла, образуют *главную диагональ*.

Матрицы ***равны между собой***, если равны все соответствующие элементы этих матриц, т. е.

$$A = B, \quad \text{если } a_{ij} = b_{ij}, \quad \text{где } i = \overline{1, m},\ j = \overline{1, n}.$$

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называется ***квадратной***. Квадратную матрицу размера $n \times n$ называют матрицей ***n-го порядка***.

Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется ***диагональной***.

Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется ***единичной***. Обозначается буквой E.

Пример 1.1.

$$E_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— единичная матрица 3-го порядка.

$$E_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & & & \text{\Large 0} \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & 1 \end{pmatrix}.$$

— единичная матрица n-го порядка.

Квадратная матрица называется ***треугольной***, если все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется ***нулевой***. Обозначается буквой O. Имеет вид

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

В матричном исчислении матрицы O и E играют роль чисел 0 и 1 в арифметике.

Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется ***вектором*** (или вектор-столбец, или вектор-строка соответственно). Их вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, \quad B = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n).$$

Матрица размера 1×1, состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом, т. е. $(5)_{1\times 1}$ есть 5.

Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется матрицей ***транспонированной*** к данной. Обозначается A^T.

Так, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, то $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, если $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, то $A^T = (1 \ 0)$.

Транспонированная матрица обладает следующим свойством: $(A^T)^T = A$.

1.2. Действия над матрицами

Сложение

Операция сложения матриц вводится только для матриц одинаковых размеров.

Суммой двух матриц $A_{m\times n}=(a_{ij})$ и $B_{m\times n}=(b_{ij})$ называется матрица $C_{m\times n}=(c_{ij})$ такая, что $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ $(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$. Записывают $C=A+B$.

Пример 1.2.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Аналогично определяется *разность матриц*.

Умножение на число

Произведением матрицы $A_{m\times n} = (a_{ij})$ *на число* k называется матрица $B_{m\times n} = (b_{ij})$ такая, что $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$ $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$ Записывают $B = k \cdot A$.

Пример 1.3.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix},\ k = 2,\ A \cdot k = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

Матрица $-A = (-1) \cdot A$ называется *противоположной матрице* A.

Разность матриц $A - B$ можно определить так: $A - B = A + (-B)$.

Операции сложения матриц и умножения матрицы на число обладают следующими *свойствами:*

1. $A + B = B + A$;
2. $A + (B + C) = (A + B) + C$;
3. $A + O = A$;
4. $A - A = O$;
5. $1 \cdot A = A$;
6. $\alpha \cdot (A + B) = \alpha A + \alpha B$,
7. $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha A + \beta A$;
8. $\alpha \cdot (\beta A) = (\alpha\beta) \cdot A$,

где A, B, C — матрицы, α и β — числа.

Элементарные преобразования матриц

Элементарными преобразованиями матриц являются:

- перестановка местами двух параллельных рядов матрицы;
- умножение всех элементов ряда матрицы на число, отличное от нуля;
- прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на одно и то же число.

Две матрицы A и B называются ***эквивалентными***, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований. Записывается $A \sim B$.

При помощи элементарных преобразований любую матрицу можно привести к матрице, у которой в начале главной диагонали стоят подряд несколько единиц, а все остальные элементы равны нулю. Такую матрицу называют *канонической*, например

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пример 1.4. Привести к каноническому виду матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение: Выполняя элементарные преобразования, получаем

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c} -5 \\ 1 \\ \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{array}{cccc} & -3 & -2 & \\ \hline \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -15 & -6 & -9 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -15 & -6 & -9 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} & 5 & 2 & 3 \end{array} \end{array} \sim \begin{array}{c} \\ \\ 3 \end{array}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} & & -1 & \end{array} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Произведение матриц

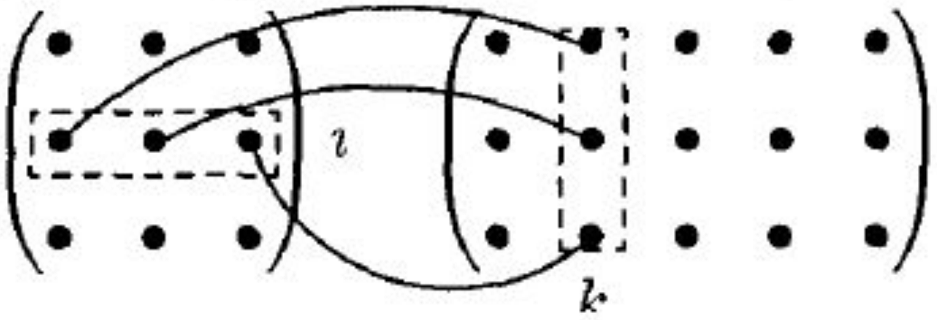
Операция умножения двух матриц вводится только для случая, когда *число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.*

Произведением матрицы $A_{m\times n} = (a_{ij})$ *на матрицу* $B_{n\times p} = (b_{jk})$ называется матрица $C_{m\times p} = (c_{ik})$ такая, что

$$c_{ik} = a_{i1}\cdot b_{1k} + a_{i2}\cdot b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk}, \quad \text{где } i = \overline{1,m},\ k = \overline{1,p},$$

т. е. элемент i-й строки и k-го столбца матрицы произведения C равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы k-го столбца матрицы B.

Получение элемента c_{ik} схематично изображается так:



Если матрицы A и B квадратные одного размера, то произведения AB и BA всегда существуют Легко показать, что $A \cdot E = E\ A = A$, где A — квадратная матрица, E — единичная матрица того же размера.

Пример 1.5. $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}_{2\times 3} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}_{3\times 2} =$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}_{2\times 2}.$$

Пример 1.6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Тогда произведение $A \cdot B$ не определено, так как число столбцов матрицы A (3) не совпадает с числом строк матрицы B (2). При этом определено произведение $B \times A$, которое считают следующим образом:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+9 & 2+3 & 1+0 \\ 1+6 & 2+2 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы A и B называются *перестановочными*, если $AB = BA$. Умножение матриц обладает следующими свойствами:

1. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$;
2. $A \cdot (B + C) = AB + AC$;
3. $(A + B) \cdot C = AC + BC$;
4. $\alpha(AB) = (\alpha A)B$,

если, конечно, написанные суммы и произведения матриц имеют смысл.

Для операции транспонирования верны свойства:

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$;
2. $(AB)^T = B^T \cdot A^T$.

§ 2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

2.1. Основные понятия

Квадратной матрице A порядка n можно сопоставить число $\det A$ (или $|A|$, или Δ), называемое ее *определителем*, следующим образом:

1. $n = 1$. $A = (a_1)$; $\det A = a_1$.

2. $n = 2$. $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$; $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$.

3. $n = 3$, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$; $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Определитель матрицы A также называют ее *детерминантом*.

Вычисление определителя 2-го порядка иллюстрируется схемой:

Пример 2.1. Найти определители матриц

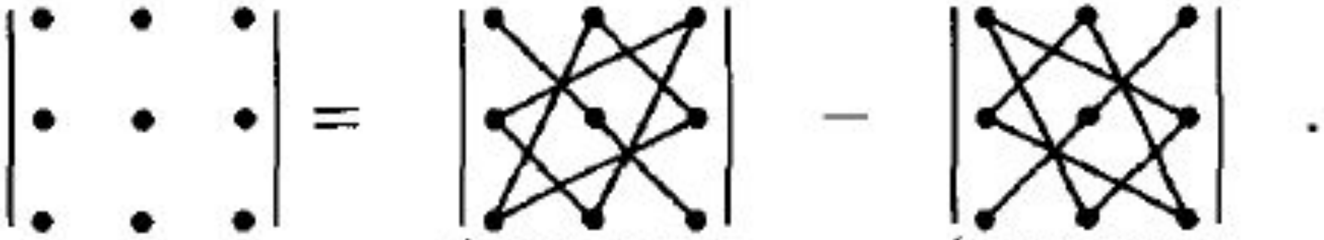
$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

❍ Решение:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot 6 - 5\cdot(-3) = 12 - (-15) = 27;$$

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$$

При вычислении определителя 3-го порядка удобно пользоваться *правилом треугольников* (или Саррюса), которое символически можно записать так:



(основания равнобедренных треугольников параллельны главной диагонали)

(основания треугольников параллельны побочной диагонали)

Пример 2.2. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix}.$$

Решение:

$$\det A =$$
$$= 5\cdot 1\cdot(-3) + (-2)\cdot(-4)\cdot 6 + 3\cdot 0\cdot 1 - 6\cdot 1\cdot 1 - 3\cdot(-2)\cdot(-3) - 0\cdot(-4)\cdot 5 =$$
$$= -15 + 48 - 6 - 18 = 48 - 39 = 9.$$

2.2. Свойства определителей

Сформулируем основные свойства определителей, присущие определителям всех порядков. Некоторые из этих свойств поясним на определителях 3-го порядка.

Свойство 1 («Равноправность строк и столбцов»). Определитель не изменится, если его строки заменить столбцами, и наоборот.

Иными словами,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

В дальнейшем строки и столбцы будем просто называть *рядами определителя*.

Свойство 2. При перестановке двух параллельных рядов определитель меняет знак.

Свойство 3. Определитель, имеющий два одинаковых ряда, равен нулю.

Свойство 4. Общий множитель элементов какого-либо ряда определителя можно вынести за знак определителя.

Из свойств 3 и 4 следует, что *если все элементы некоторого ряда пропорциональны соответствующим элементам параллельного ряда, то такой определитель равен нулю.*

❑ Действительно,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & k \cdot a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot 0 = 0. \quad \blacksquare$$

Свойство 5. Если элементы какого-либо ряда определителя представляют собой суммы двух слагаемых, то определитель может быть разложен на сумму двух соответствующих определителей.

Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+b \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+c \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b \\ a_{21} & a_{22} & c \\ a_{31} & a_{32} & d \end{vmatrix}.$$

Свойство 6 («Элементарные преобразования определителя»). Определитель не изменится, если к элементам одного ряда прибавить соответствующие элементы параллельного ряда, умноженные на любое число.

Пример 2.3. Доказать, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + k \cdot a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + k \cdot a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + k \cdot a_{32} \end{vmatrix}.$$

❍ Решение: Действительно, используя свойства 5, 4 и 3, получим

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + k \cdot a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + k \cdot a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + k \cdot a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{vmatrix} = \Delta + k \cdot 0 = \Delta. \quad ●$$

Дальнейшие свойства определителей связаны с понятиями минора и алгебраического дополнения.

Минором некоторого элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель $n-1$-го порядка, полученный из исходного путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент. Обозначается m_{ij}.

Так, если

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \text{то} \quad m_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad m_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя называется его минор, взятый со знаком «плюс», если сумма $i+j$ – четное число, и со знаком «минус», если эта сумма нечетная. Обозначается A_{ij}: $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot m_{ij}$.

Так, $A_{11} = +m_{11}$, $A_{32} = -m_{32}$.

Свойство 7 («Разложение определителя по элементам некоторого ряда»). Определитель равен сумме произведений элементов некоторого ряда на соответствующие им алгебраические дополнения.

Проиллюстрируем и одновременно докажем свойство 7 на примере определителя 3-его порядка. В этом случае свойство 7 означает, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}.$$

❑ В самом деле, имеем

$$
\begin{aligned}
&a_{11}\cdot A_{11}+a_{12}\cdot A_{12}+a_{13}\cdot A_{13}=\\
&\qquad=a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{12}\cdot\left(-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}\right)+a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}=\\
&=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})=\\
&=a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+\\
&\qquad\qquad+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}=\Delta. \quad\blacksquare
\end{aligned}
$$

Свойство 7 содержит в себе способ вычисления определителей высоких порядков.

Пример 2.4. Вычислите определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение: Для разложения определителя обычно выбирают тот ряд, где есть нулевые элементы, т. к. соответствующие им слагаемые в разложении будут равны нулю.

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (7 \cdot 3 \cdot 4 + (-1) \cdot 0 \cdot 2 + 5 \cdot 7 \cdot 1 - (-1) \cdot 3 \cdot 1 - 7 \cdot 7 \cdot 2 - 5 \cdot 0 \cdot 4) +$$
$$+ (5 \cdot 3 \cdot 4 + (-1) \cdot 7 \cdot 2 + 5 \cdot 7 \cdot 8 - (-1) \cdot 3 \cdot 8 - 5 \cdot 7 \cdot 4 - 5 \cdot 7 \cdot 2) -$$
$$- (5 \cdot 0 \cdot 2 + 7 \cdot 1 \cdot 5 + 7 \cdot 3 \cdot 8 - 5 \cdot 0 \cdot 8 - 3 \cdot 1 \cdot 5 - 7 \cdot 7 \cdot 2) = 122.$$

Свойство 8. Сумма произведений элементов какого-либо ряда определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов параллельного ряда равна нулю.

Так, например, $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0$.

Методы вычисления определителей

Определитель n-го порядка задается равенством:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum(\pm a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot \ldots \cdot a_{ni_n}).$$

Указанная сумма состоит из $n!$ слагаемых, каждое из которых представляет собой произведение n сомножителей — элементов матрицы A, по одному из каждой строки и каждого столбца. Одна половина слагаемых берется со знаком «+», другая — со знаком «−». Правило, по которому выбираются эти знаки, в настоящем издании не используется и здесь не приводится. Методы вычисления определителей n-го порядка приведены ниже.

1. ***Правило «треугольников»*** (правило Саррюса) вычисления определителей 3-го порядка: первое из трех слагаемых, входящих в сумму

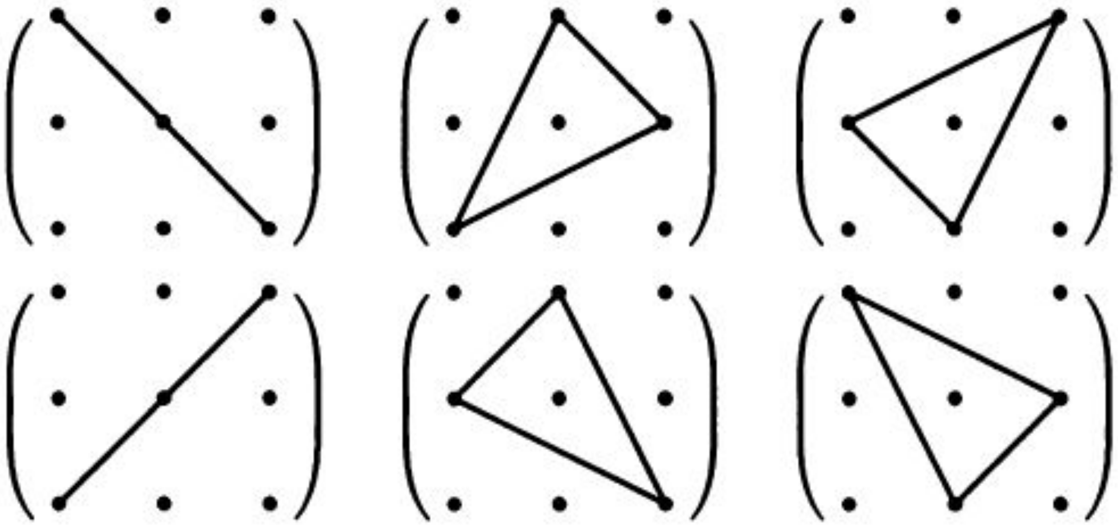
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} +$$

$$+ (-a_{13}a_{22}a_{31}) + (-a_{12}a_{21}a_{33}) + (-a_{11}a_{23}a_{32}).$$

со знаком «+», есть произведение элементов главной диагонали, второе и третье — произведения элементов, находящихся в вершинах двух треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали. Три слагаемых, входящих в сумму (2.1) со знаком «−», определяются аналогично, но относительно второй (побочной) диагонали:

«+»

«−»



2. *Разложение определителя 3-го порядка по первой строке:*

$$\det A = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

При таком способе вычисления определителя каждый из трех элементов a_{1j} первой строки умножается на определитель 2-го порядка, составленный из элементов матрицы А, оставшихся после вычеркивания 1-й строки и j-го столбца. При этом слагаемое с множителем a_{1j} умножается на число $(-1)^{1+j}$:

$$\det A = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ \cancel{a_{21}} & a_{22} & a_{23} \\ \cancel{a_{31}} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & \cancel{a_{22}} & a_{23} \\ a_{31} & \cancel{a_{32}} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+3} \cdot a_{13} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & \cancel{a_{23}} \\ a_{31} & a_{32} & \cancel{a_{33}} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, вычисление определителя 3-го порядка сводится к вычислению 3-х определителей 2-го порядка. В общем случае можно вычислять определитель n-го порядка квадратной матрицы A, сводя его к вычислению n определителей $(n-1)$-го порядка.

3. *Разложение определителя n-го порядка по первой строке.* Аналогично последней формуле, имеем

$$\det A = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+3} \cdot a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \ldots + (-1)^{1+n} \cdot a_{1n} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

т. е.

$$\det A = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} -$$

$$- a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n4} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - \dots$$

$$\dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} \end{vmatrix}.$$

Аналогично задаются другие способы вычисления определителя n-го порядка — «разложение» по произвольной строке или произвольному столбцу

4. *Разложение определителя n-го порядка по i-й строке*:

$$\det A = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \cdots + a_{in-1} \cdot A_{in-1} + a_{in} \cdot A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij},$$

$$\forall\, i = \overline{1, n}.$$

5. *Разложение определителя n-го порядка по j-му столбцу*:

$$\det A = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \cdots + a_{n-1j} \cdot A_{n-1j} + a_{nj} \cdot A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}$$

$$\forall\, j = \overline{1, n}.$$

6. *Метод приведения к треугольному виду* заключается в приведении определителя (с помощью элементарных преобразований) к такому виду, когда все элементы, расположенные по одну сторону одной из диагоналей, равны нулю.

7. *Метод рекуррентных соотношений* состоит в том, что определитель n-го порядка выражают через определители того же вида, но более низкого порядка, используя элементарные преобразования и разложение по строке или столбцу.

Вычислить определитель 4-го порядка разложением по строке или столбцу:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

❍ Удобнее пользоваться разложением по строке или столбцу, содержащим наибольшее количество нулей. Разложим определитель по первой строке:

$$\Delta = (-2)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} - (-3)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} -$$

$$- 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -2\cdot 9 + 3\cdot 31 + 0 - 2\cdot 6 = 63.$$

При вычислении определителей 4-го порядка разложением по строке или столбцу, знаки («+» или «−») перед слагаемым $a_{ij} \cdot M_{ij}$ проще всего запомнить в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}.$$

Аналогично, для вычисления определителя n-го порядка знаки расположены следующим образом (в «шахматном» порядке, слева вверху знак «+»):

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}. \quad \bullet$$

Вычислить определитель 4-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & b & 2 \\ 1 & c & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}.$$

❍ Разложим определитель по 4-ой строке:

$$\Delta = (+d) \cdot \begin{vmatrix} a & 0 & 3 \\ 0 & 0 & b \\ 1 & c & 2 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{разложим определитель} \\ \text{по 2-ой строке} \end{bmatrix} =$$

$$= d \cdot (-b) \cdot \begin{vmatrix} a & 0 \\ 1 & c \end{vmatrix} = -d \cdot b \cdot a \cdot c.$$

Вычислить определитель приведением к треугольному виду:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & n-1 \end{vmatrix}.$$

❍ Прибавляя к каждой строке определителя первую строку, получим:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \dots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \text{разложим по} \\ \text{первому столбцу} \end{bmatrix} =$$

$$= 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 0 & 0 & 4 & \dots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix}}_{n-1} = \left[\begin{array}{c}\text{повторяем разложение по} \\ \text{первому столбцу } n-2 \text{ раза}\end{array}\right] =$$

$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n = n! \quad \bullet$$

Вычислить определитель n-го порядка:

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

❍ Разложим определитель по первой строке:

$$D_n = (-1)^{n+1} \cdot (-1) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{n-1} = (-1)^{n+2} \cdot D_{n-1}.$$

Аналогично $D_{n-1} = (-1)^{n+1} \cdot D_{n-2}$ и т. д. Таким образом,

$$D_n = (-1)^{n+2} \cdot (-1)^{n+1} \cdot \ldots \cdot (-1)^{2+2} \cdot D_1.$$

Учитывая, что

$$(-1)^{n+2} = (-1)^n, \quad (-1)^{n+1} = (-1)^{n-1}, \quad \dots, \quad (-1)^{2+2} = (-1)^2;$$

$$D_1 = -1,$$

получим выражение для D_n:

$$D_n = (-1)^n \cdot (-1)^{n-1} \cdot \ldots \cdot (-1)^2 \cdot (-1)^1 =$$

$$= (-1)^{1+2+\ldots+(n-1)+n} = (-1)^{n \cdot \frac{n+1}{2}}. \quad \bullet$$