

# РАЗДЕЛ 1

## ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

МАТРИЦЫ. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ.

## § 1. МАТРИЦЫ

### 1.1. Основные понятия

*Матрицей* называется прямоугольная таблица чисел, содержащая  $m$  строк одинаковой длины (или  $n$  столбцов одинаковой длины). Матрица записывается в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или, сокращенно,  $A = (a_{ij})$ , где  $i = \overline{1, m}$  (т. е.  $i = 1, 2, 3, \dots, m$ ) — номер строки,  $j = \overline{1, n}$  (т. е.  $j = 1, 2, 3, \dots, n$ ) — номер столбца.

Матрицу  $A$  называют матрицей размера  $m \times n$  и пишут  $A_{m \times n}$ . Числа  $a_{ij}$ , составляющие матрицу, называются ее *элементами*. Элементы, стоящие на диагонали, идущей из верхнего левого угла, образуют *главную диагональ*.

⇒ Матрицы *равны между собой*, если равны все соответствующие элементы этих матриц, т. е.

$$A = B, \quad \text{если } a_{ij} = b_{ij}, \quad \text{где } i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}.$$

Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называется *квадратной*. Квадратную матрицу размера  $n \times n$  называют матрицей  *$n$ -го порядка*.

Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется *диагональной*.

Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется *единичной*. Обозначается буквой  $E$ .

**Пример 1.1.**

$$E_{3 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

— единичная матрица 3-го порядка.

$$E_{n \times n} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}.$$

— единичная матрица  $n$ -го порядка.

5 Квадратная матрица называется **треугольной**, если все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю.

5 Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой**. Обозначается буквой  $O$ . Имеет вид

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

В матричном исчислении матрицы  $O$  и  $E$  играют роль чисел 0 и 1 в арифметике.

⇒ Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется **вектором** (или вектор-столбец, или вектор-строка соответственно). Их вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, \quad B = (b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n).$$

Матрица размера  $1 \times 1$ , состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом, т. е.  $(5)_{1 \times 1}$  есть 5.

⇒ Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется матрицей **транспонированной** к данной. Обозначается  $A^T$ .

Так, если  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ , то  $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ , если  $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ , то  $A^T = (1 \ 0)$ .

Транспонированная матрица обладает следующим свойством:  
 $(A^T)^T = A$ .

## 1.2. Действия над матрицами

### Сложение

Операция сложения матриц вводится только для матриц одинаковых размеров.

Суммой двух матриц  $A_{m \times n} = (a_{ij})$  и  $B_{m \times n} = (b_{ij})$  называется матрица  $C_{m \times n} = (c_{ij})$  такая, что  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$  ( $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ ). Записывают  $C = A + B$ .

*Пример 1.2.*

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Аналогично определяется *разность матриц*.

## Умножение на число

Произведением матрицы  $A_{m \times n} = (a_{ij})$  на число  $k$  называется матрица  $B_{m \times n} = (b_{ij})$  такая, что  $b_{ij} = k \cdot a_{ij}$  ( $i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}$ ). Записывают  $B = k \cdot A$ .

**Пример 1.3.**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, \quad k = 2, \quad A \cdot k = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ 6 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

Матрица  $-A = (-1) \cdot A$  называется *противоположной матрице*  $A$ .

Разность матриц  $A - B$  можно определить так:  $A - B = A + (-B)$ .

Операции сложения матриц и умножения матрицы на число обладают следующими свойствами:

1.  $A + B = B + A$ ;

5.  $1 \cdot A = A$ ;

2.  $A + (B + C) = (A + B) + C$ ;

6.  $\alpha \cdot (A + B) = \alpha A + \alpha B$ ,

3.  $A + O = A$ ;

7.  $(\alpha + \beta) \cdot A = \alpha A + \beta A$ ;

4.  $A - A = O$ ;

8.  $\alpha \cdot (\beta A) = (\alpha\beta) \cdot A$ ,

где  $A, B, C$  — матрицы,  $\alpha$  и  $\beta$  — числа.

## Элементарные преобразования матриц

*Элементарными преобразованиями матриц* являются:

- перестановка местами двух параллельных рядов матрицы;
- умножение всех элементов ряда матрицы на число, отличное от нуля;
- прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на одно и то же число.

☞ Две матрицы  $A$  и  $B$  называются *эквивалентными*, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований. Записывается  $A \sim B$ .

При помощи элементарных преобразований любую матрицу можно привести к матрице, у которой в начале главной диагонали стоят подряд несколько единиц, а все остальные элементы равны нулю. Такую матрицу называют *канонической*, например

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Пример 1.4.** Привести к каноническому виду матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

○ Решение: Выполняя элементарные преобразования, получаем

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} &\sim \begin{matrix} \boxed{-5} \\ \boxed{1} \\ \boxed{-4} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} \boxed{-2} \\ \boxed{-3} \\ \boxed{3} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -15 & -6 & -9 \end{pmatrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & -15 & -6 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} \boxed{3} \\ \boxed{5} \\ \boxed{2} \\ \boxed{3} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \end{pmatrix} \sim \\ &\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{matrix} \boxed{-1} \\ \boxed{1} \\ \boxed{1} \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

## Произведение матриц

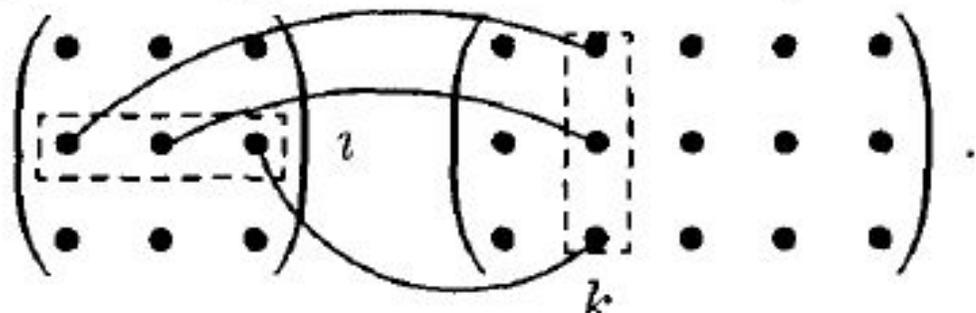
☉ Операция умножения двух матриц вводится только для случая, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

Произведением матрицы  $A_{m \times n} = (a_{ij})$  на матрицу  $B_{n \times p} = (b_{jk})$  называется матрица  $C_{m \times p} = (c_{ik})$  такая, что

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \dots + a_{in} \cdot b_{nk}, \quad \text{где } i = \overline{1, m}, k = \overline{1, p},$$

т. е. элемент  $i$ -й строки и  $k$ -го столбца матрицы произведения  $C$  равен сумме произведений элементов  $i$ -й строки матрицы  $A$  на соответствующие элементы  $k$ -го столбца матрицы  $B$ .

Получение элемента  $c_{ik}$  схематично изображается так:



Если матрицы  $A$  и  $B$  квадратные одного размера, то произведения  $AB$  и  $BA$  всегда существуют. Легко показать, что  $A \cdot E = E \cdot A = A$ , где  $A$  — квадратная матрица,  $E$  — единичная матрица того же размера.

**Пример 1.5.**

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}_{2 \times 3} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}_{3 \times 2} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \end{pmatrix}_{2 \times 2}.$$

**Пример 1.6.**  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ . Тогда произведение  $A \cdot B$  не определено, так как число столбцов матрицы  $A$  (3) не совпадает с числом строк матрицы  $B$  (2). При этом определено произведение  $B \times A$ , которое считают следующим образом:

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+9 & 2+3 & 1+0 \\ 1+6 & 2+2 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 1 \\ 7 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы  $A$  и  $B$  называются *перестановочными*, если  $AB = BA$ .  
Умножение матриц обладает следующими свойствами:

$$1. A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C;$$

$$3. (A + B) \cdot C = AC + BC;$$

$$2. A \cdot (B + C) = AB + AC;$$

$$4. \alpha(AB) = (\alpha A)B,$$

если, конечно, написанные суммы и произведения матриц имеют смысл.

Для операции транспонирования верны свойства:

$$1. (A + B)^T = A^T + B^T;$$

$$2. (AB)^T = B^T \cdot A^T.$$

## § 2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

### 2.1. Основные понятия

Квадратной матрице  $A$  порядка  $n$  можно сопоставить число  $\det A$  (или  $|A|$ , или  $\Delta$ ), называемое ее *определителем*, следующим образом:

1.  $n = 1$ .  $A = (a_1)$ ;  $\det A = a_1$ .

2.  $n = 2$ .  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ ;  $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ .

3.  $n = 3$ ,  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ ;  $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Определитель матрицы  $A$  также называют ее *детерминантом*.

Вычисление определителя 2-го порядка иллюстрируется схемой:

$$\begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{vmatrix}$$

**Пример 2.1.** Найти определители матриц

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

○ Решение:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 5 \cdot (-3) = 12 - (-15) = 27;$$

$$\begin{vmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix} = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

При вычислении определителя 3-го порядка удобно пользоваться *правилом треугольников* (или Саррюса), которое символически можно записать так:

$$\begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix} .$$

(основания  
равнобедренных  
треугольников  
параллельны  
главной  
диагонали)

(основания  
треугольников  
параллельны  
побочной  
диагонали)

**Пример 2.2.** Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{vmatrix} 5 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & -3 \end{vmatrix}.$$

○ Решение:

$$\begin{aligned} \det A &= \\ &= 5 \cdot 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot (-4) \cdot 6 + 3 \cdot 0 \cdot 1 - 6 \cdot 1 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) \cdot (-3) - 0 \cdot (-4) \cdot 5 = \\ &= -15 + 48 - 6 - 18 = 48 - 39 = 9. \quad \bullet \end{aligned}$$

## 2.2. Свойства определителей

Сформулируем основные свойства определителей, присущие определителям всех порядков. Некоторые из этих свойств поясним на определителях 3-го порядка.

*Свойство 1* («Равноправность строк и столбцов»). Определитель не изменится, если его строки заменить столбцами, и наоборот.

Иными словами,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

В дальнейшем строки и столбцы будем просто называть *рядами определителя*.

*Свойство 2.* При перестановке двух параллельных рядов определитель меняет знак.

*Свойство 3.* Определитель, имеющий два одинаковых ряда, равен нулю.

*Свойство 4.* Общий множитель элементов какого-либо ряда определителя можно вынести за знак определителя.

Из свойств 3 и 4 следует, что если все элементы некоторого ряда пропорциональны соответствующим элементам параллельного ряда, то такой определитель равен нулю.

□ Действительно,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} & k \cdot a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = k \cdot 0 = 0. \quad \blacksquare$$

*Свойство 5.* Если элементы какого-либо ряда определителя представляют собой суммы двух слагаемых, то определитель может быть разложен на сумму двух соответствующих определителей.

Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + b \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + c \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b \\ a_{21} & a_{22} & c \\ a_{31} & a_{32} & d \end{vmatrix}.$$

*Свойство 6* («Элементарные преобразования определителя»).  
 Определитель не изменится, если к элементам одного ряда прибавить соответствующие элементы параллельного ряда, умноженные на любое число.

**Пример 2.3.** Доказать, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + k \cdot a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + k \cdot a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + k \cdot a_{32} \end{vmatrix}.$$

○ Решение: Действительно, используя свойства 5, 4 и 3, получим

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} + k \cdot a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} + k \cdot a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} + k \cdot a_{32} \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + k \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{32} \end{vmatrix} = \Delta + k \cdot 0 = \Delta. \quad \bullet$$

Дальнейшие свойства определителей связаны с понятиями минора и алгебраического дополнения.

⇒ **Минором** некоторого элемента  $a_{ij}$  определителя  $n$ -го порядка называется определитель  $n - 1$ -го порядка, полученный из исходного путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент. Обозначается  $m_{ij}$ .

Так, если

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \text{то} \quad m_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad m_{32} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}.$$

 **Алгебраическим дополнением** элемента  $a_{ij}$  определителя называется его минор, взятый со знаком «плюс», если сумма  $i + j$  — четное число, и со знаком «минус», если эта сумма нечетная. Обозначается  $A_{ij}$ :  $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot m_{ij}$ .

Так,  $A_{11} = +m_{11}$ ,  $A_{32} = -m_{32}$ .

**Свойство 7** («Разложение определителя по элементам некоторого ряда»). Определитель равен сумме произведений элементов некоторого ряда на соответствующие им алгебраические дополнения.

Проиллюстрируем и одновременно докажем свойство 7 на примере определителя 3-его порядка. В этом случае свойство 7 означает, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} \overline{a_{11}} & \overline{a_{12}} & \overline{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}.$$

□ В самом деле, имеем

$$\begin{aligned} a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} &= \\ &= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot \left( - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \right) + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + \\ &\quad + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} = \Delta. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Свойство 7 содержит в себе способ вычисления определителей высоких порядков.

**Пример 2.4.** Вычислите определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

○ Решение: Для разложения определителя обычно выбирают тот ряд, где есть нулевые элементы, т. к. соответствующие им слагаемые в разложении будут равны нулю.

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} = \\ & = 3 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 & 8 \\ 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \\ & = 3 \cdot (7 \cdot 3 \cdot 4 + (-1) \cdot 0 \cdot 2 + 5 \cdot 7 \cdot 1 - (-1) \cdot 3 \cdot 1 - 7 \cdot 7 \cdot 2 - 5 \cdot 0 \cdot 4) + \\ & \quad + (5 \cdot 3 \cdot 4 + (-1) \cdot 7 \cdot 2 + 5 \cdot 7 \cdot 8 - (-1) \cdot 3 \cdot 8 - 5 \cdot 7 \cdot 4 - 5 \cdot 7 \cdot 2) - \\ & \quad - (5 \cdot 0 \cdot 2 + 7 \cdot 1 \cdot 5 + 7 \cdot 3 \cdot 8 - 5 \cdot 0 \cdot 8 - 3 \cdot 1 \cdot 5 - 7 \cdot 7 \cdot 2) = 122. \quad \bullet \end{aligned}$$

*Свойство 8.* Сумма произведений элементов какого-либо ряда определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов параллельного ряда равна нулю.

Так, например,  $a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0$ .

# Методы вычисления определителей

Определитель  $n$ -го порядка задается равенством:

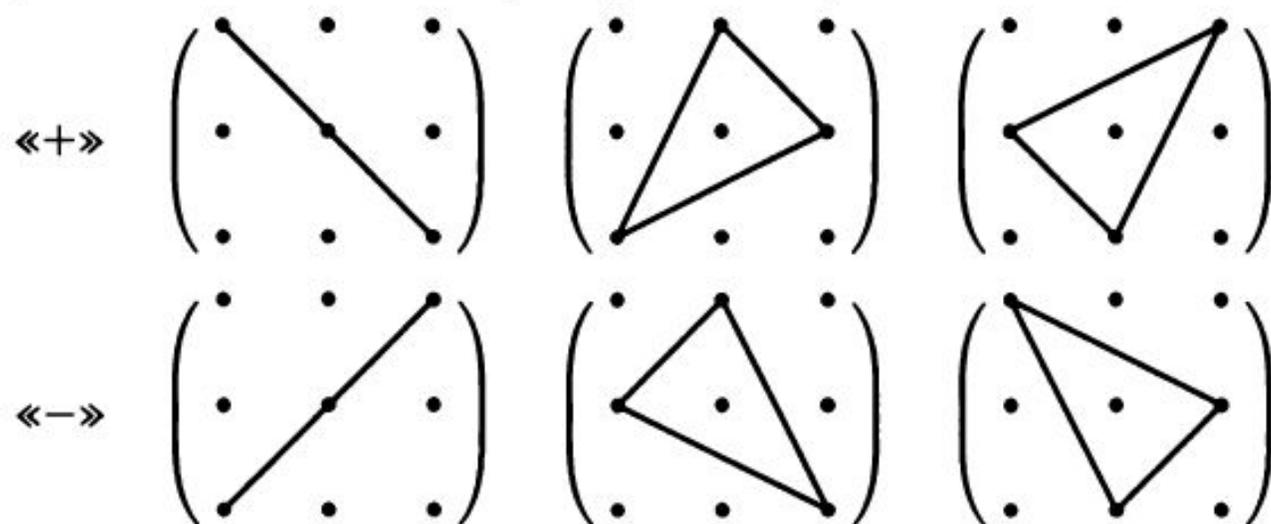
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (\pm a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot \dots \cdot a_{ni_n}).$$

Указанная сумма состоит из  $n!$  слагаемых, каждое из которых представляет собой произведение  $n$  сомножителей — элементов матрицы  $A$ , по одному из каждой строки и каждого столбца. Одна половина слагаемых берется со знаком «+», другая — со знаком «-». Правило, по которому выбираются эти знаки, в настоящем издании не используется и здесь не приводится. Методы вычисления определителей  $n$ -го порядка приведены ниже.

1. *Правило «треугольников»* (правило Саррюса) вычисления определителей 3-го порядка: первое из трех слагаемых, входящих в сумму

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} + \\ + (-a_{13}a_{22}a_{31}) + (-a_{12}a_{21}a_{33}) + (-a_{11}a_{23}a_{32}).$$

со знаком «+», есть произведение элементов главной диагонали, второе и третье — произведения элементов, находящихся в вершинах двух треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали. Три слагаемых, входящих в сумму (2.1) со знаком «-», определяются аналогично, но относительно второй (побочной) диагонали:



2. Разложение определителя 3-го порядка по первой строке:

$$\det A = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

При таком способе вычисления определителя каждый из трех элементов  $a_{1j}$  первой строки умножается на определитель 2-го порядка, составленный из элементов матрицы  $A$ , оставшихся после вычеркивания 1-й строки и  $j$ -го столбца. При этом слагаемое с множителем  $a_{1j}$  умножается на число  $(-1)^{1+j}$ :

$$\det A = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+3} \cdot a_{13} \cdot \begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & \cancel{a_{13}} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, вычисление определителя 3-го порядка сводится к вычислению 3-х определителей 2-го порядка. В общем случае можно вычислять определитель  $n$ -го порядка квадратной матрицы  $A$ , сводя его к вычислению  $n$  определителей  $(n - 1)$ -го порядка.

3. Разложение определителя  $n$ -го порядка по первой строке. Аналогично последней формуле, имеем

$$\det A = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+3} \cdot a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \dots + (-1)^{1+n} \cdot a_{1n} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

т. е.

$$\det A = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} -$$
$$- a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n4} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} - \dots$$
$$\dots + (-1)^{1+n} a_{1n} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n-1} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} \end{vmatrix}.$$

Аналогично задаются другие способы вычисления определителя  $n$ -го порядка — «разложение» по произвольной строке или произвольному столбцу

4. Разложение определителя  $n$ -го порядка по  $i$ -й строке:

$$\det A = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \cdots + a_{in-1} \cdot A_{in-1} + a_{in} \cdot A_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij},$$

$$\forall i = \overline{1, n}.$$

5. Разложение определителя  $n$ -го порядка по  $j$ -му столбцу:

$$\det A = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \cdots + a_{n-1j} \cdot A_{n-1j} + a_{nj} \cdot A_{nj} = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot A_{ij}$$

$$\forall j = \overline{1, n}.$$

6. Метод приведения к треугольному виду заключается в приведении определителя (с помощью элементарных преобразований) к такому виду, когда все элементы, расположенные по одну сторону одной из диагоналей, равны нулю.

7. Метод рекуррентных соотношений состоит в том, что определитель  $n$ -го порядка выражают через определители того же вида, но более низкого порядка, используя элементарные преобразования и разложение по строке или столбцу.

Вычислить определитель 4-го порядка разложением по строке или столбцу:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \end{vmatrix}.$$

○ Удобнее пользоваться разложением по строке или столбцу, содержащим наибольшее количество нулей. Разложим определитель по первой строке:

$$\begin{aligned} \Delta &= (-2) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & 4 & 1 \end{vmatrix} - (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 5 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} - \\ &\quad - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 0 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -2 \cdot 9 + 3 \cdot 31 + 0 - 2 \cdot 6 = 63. \end{aligned}$$

При вычислении определителей 4-го порядка разложением по строке или столбцу, знаки («+» или «-») перед слагаемым  $a_{ij} \cdot M_{ij}$  проще всего запомнить в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - \\ - & + & - & + \\ + & - & + & - \\ - & + & - & + \end{vmatrix}.$$

Аналогично, для вычисления определителя  $n$ -го порядка знаки расположены следующим образом (в «шахматном» порядке, слева вверху знак «+»):

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}.$$



Вычислить определитель 4-го порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & b & 2 \\ 1 & c & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}.$$

○ Разложим определитель по 4-ой строке:

$$\begin{aligned} \Delta &= (+d) \cdot \begin{vmatrix} a & 0 & 3 \\ 0 & 0 & b \\ 1 & c & 2 \end{vmatrix} = \left[ \begin{array}{c} \text{разложим определитель} \\ \text{по 2-ой строке} \end{array} \right] = \\ &= d \cdot (-b) \cdot \begin{vmatrix} a & 0 \\ 1 & c \end{vmatrix} = -d \cdot b \cdot a \cdot c. \end{aligned}$$

Вычислить определитель приведением к треугольному виду:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & \dots & 3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & -1 & \dots & n-1 \end{vmatrix}.$$

○ Прибавляя к каждой строке определителя первую строку, получим:

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \dots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix} = \left[ \begin{array}{l} \text{разложим по} \\ \text{первому столбцу} \end{array} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= 1 \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 3 & 3 & \dots & 3 \\ 0 & 0 & 4 & \dots & 4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n \end{vmatrix}}_{n-1} = \left[ \begin{array}{l} \text{повторяем разложение по} \\ \text{первому столбцу } n - 2 \text{ раза} \end{array} \right] = \\
&= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n - 1) \cdot n = n! \quad \bullet
\end{aligned}$$

Вычислить определитель  $n$ -го порядка:

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

○ Разложим определитель по первой строке:

$$D_n = (-1)^{n+1} \cdot (-1) \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{n-1} = (-1)^{n+2} \cdot D_{n-1}.$$

Аналогично  $D_{n-1} = (-1)^{n+1} \cdot D_{n-2}$  и т. д. Таким образом,

$$D_n = (-1)^{n+2} \cdot (-1)^{n+1} \cdot \dots \cdot (-1)^{2+2} \cdot D_1.$$

Учитывая, что

$$(-1)^{n+2} = (-1)^n, \quad (-1)^{n+1} = (-1)^{n-1}, \quad \dots, \quad (-1)^{2+2} = (-1)^2;$$
$$D_1 = -1,$$

получим выражение для  $D_n$ :

$$D_n = (-1)^n \cdot (-1)^{n-1} \cdot \dots \cdot (-1)^2 \cdot (-1)^1 =$$
$$= (-1)^{1+2+\dots+(n-1)+n} = (-1)^{n \cdot \frac{n+1}{2}}. \quad \bullet$$

