ВОЛГОГРАДСКАЯ АКАДЕМИЯ МВД РОССИИ

Кафедра информатики и математики

Мультимедиа-поддержка лекции (2 часа)

на тему

Интегральное исчисление

Автор: доцент, к.ф.-м.н.

Бакулин В.М.

Волгоград 2020

Интегральное исчисление

Учебные вопросы:

1. Понятие первообразной функции.
2. Понятие неопределённого интеграла.
3. Основные методы интегрирования.
4. Определенный интеграл.

1. Понятие первообразной функции

Определение.

Функция $F(x)$ называется <u>первообразной</u> для функции $f(x)$ на некотором промежутке X, если $\forall x \in X$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Пример 1.

Функция $F(x) = \sin x$ является первообразной для функции $f(x) = \cos x$ на всей числовой прямой, поскольку $(\sin x)' = \cos x$, $\forall x \in R$.

Пример 2.

Функция $F(x) = x^3$ есть первообразная для функции $f(x) = 3x^2$ на всей числовой прямой, так как $(x^3)' = 3x^2$, $\forall x \in R$.

1. Понятие первообразной функции

<u>Теорема 1</u>. Если $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ на некотором промежутке X, то любая другая первообразная для $f(x)$ на том же промежутке может быть представлена в виде $F(x)+C$, где C – произвольная постоянная величина $(C \in R)$.

<u>Доказательство:</u>

Пусть задана $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ на некотором промежутке X, то есть $F'(x) = f(x)$. Если $\Phi'(x)$ – другая первообразная для $f(x)$ на X, то и $\Phi'(x) = f(x)$. Тогда $\forall x \in X$ справедливо, что $(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Следуя Лемме 1, это означает, что разность функций $\Phi(x) - F(x)$ есть постоянная величина, то есть $\Phi(x) - F(x) = C$, где C – некоторое число. Следовательно, $\Phi(x) = F(x) + C$, что и требовалось доказать.

2. Понятие неопределённого интеграла

Определение.

Если функция $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на промежутке X, то множество функций $F(x)+C$, где C – произвольная постоянная, называется *неопределённым интегралом* от функции $f(x)$ на этом промежутке, и обозначается символом:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

При этом используются следующие выражения: $f(x)$ называется подынтегральной функцией, $f(x)dx$ – подынтегральным выражением, а переменная x – переменной интегрирования.

2. Понятие неопределённого интеграла

Основные свойства неопределённого интеграла.

Свойство 1. Производная неопределённого интеграла равна подынтегральной функции; дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению:

$$\left(\int f(x)\,dx\right)' = f(x);$$

$$d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx$$

2. Понятие неопределённого интеграла

Основные свойства неопределённого интеграла.

Свойство 2. Неопределённый интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

[illegible] = [illegible] + [illegible]

Свойство 3. Постоянный множитель можно выносить из-под знака интеграла, то есть при заданном числовом множителе $k \neq 0$ имеет место равенство :

[illegible] = [illegible]

2. Понятие неопределённого интеграла

Основные свойства неопределённого интеграла.

Свойство 4. Неопределённый интеграл от алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций в отдельности.

$$\int \left[f(x) \pm g(x) \right] dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

Аналогичное равенство верно для любого числа слагаемых подынтегральных функций.

Свойство 5. Если известна *F(x)* – первообразная для некоей функции *f(x)*, то верно:

$\int$ [illegible] + [illegible] = [illegible] + [illegible] + [illegible]

2. Понятие неопределённного интеграла

Таблица неопределённных интегралов

1. Вначале отметим, что первообразная для нулевой функции есть величина постоянная

$$\int 0\,dx = C,$$

поскольку производная $C' = 0$.

2. Понятие неопределённого интеграла

Таблица неопределённых интегралов

2. Рассмотрим интегрирование *степенной функции* $f(x) = x^{\alpha}$, где показатель степени $\alpha \neq 1$

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha + 1}}{\alpha + 1} + C$$

Это общая формула интегрирования функции с вещественным показателем. В частности, $\int dx = x + C$, поскольку $x^{0} = 1$, а $\int x^{0} dx = x + C$.

2. Понятие неопределённого интеграла

Таблица неопределённых интегралов

Особо выделим случай степени с дробным показателем $\alpha = \frac{m}{n}$, в виду ее специфичности:

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m},$$

$$\int \sqrt[n]{x^m}\,dx = \frac{n x \sqrt[n]{x^m}}{m+n} + C$$

Для степени с отрицательным показателем $\alpha < -1$ зададим $k = -\alpha$, тогда

$$\int \frac{dx}{x^k} = -\frac{1}{(k-1)x^{k-1}} + C$$

2. Понятие неопределённого интеграла

Таблица неопределённых интегралов

3. Выделим случай, когда показатель степени $\alpha = -1$, подынтегральная функция $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C, \text{ при } x \neq 0$$

Вместо степенной функции, при интегрировании получили функцию *натуральный логарифм.*

2. Понятие неопределённого интеграла

Таблица неопределённых интегралов

4. Интеграл от показательной функции с произвольным основанием a

$$\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + C, \text{ при } 0 < a \neq 1$$

В случае функции e^x *(экспонента)* , первообразная повторяет подынтегральную функцию

$$\int e^{x}dx = e^{x} + C$$

2. Понятие неопределённого интеграла

Таблица неопределённых интегралов

интегрирование основных тригонометрических функций.

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C$$

$$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

2. Понятие неопределённого интеграла

Таблица неопределённых интегралов

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \text{ при } a \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \text{ при } a \neq 0$$

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln \left| \cos x \right| + C$$

$$\int \operatorname{ctg} x \, dx = -\ln \left| \sin x \right| + C$$

3. Основные методы интегрирования

Непосредственное интегрирование.

Для интегрирования простейших функций используются основные свойства неопределённых интегралов, а также приведенная выше таблица. В качестве примеров вычислим ряд интегралов.

Пример 1.

$$\int\left(5\cos x+2-3x^2+\frac{1}{x}-\frac{4}{x^2+1}\right)dx=$$

$$=5\int\cos x dx+2\int dx-3\int x^2dx+\int\frac{dx}{x}-4\int\frac{dx}{x^2+1}=$$

$$=5\sin x+2x-x^3+\ln|x|-4arctg+C.$$

3. Основные методы интегрирования

Непосредственное интегрирование.

Пример 2.

$$\int\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2 dx=\int\left(\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)dx=$$
$$=\int(1+\sin x)dx=\int dx+\int\sin x dx=x-\cos x+C.$$

Пример 3.

$$\int tg^2x\cdot dx=\int(1/\cos^2x-1)\cdot dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}-\int dx=tgx-x+C.$$

второй способ

$$\int tg^2x\cdot dx=\int\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{dx}{\cos^2 x}+\int dx=tgx-x+C.$$

3. Основные методы интегрирования

Метод подстановки.

Замена переменной интегрирования во многих случаях позволяет свести нахождение исходного интеграла к отысканию новой подынтегральной функции, позволяющей осуществить “табличное” интегрирование. Этот метод называется *методом подстановки* или методом замены переменной. Он основан на правиле дифференцирования сложной функции

$$\int f(x)\,dx = \int f[\varphi(t)]\,\varphi'(t)\,dt$$

Интеграл, стоящий в *правой* части равенства, может оказаться проще интеграла стоящего в *левой* части этого равенства, или даже табличным.

3. Основные методы интегрирования

Метод подстановки.

Правило интегрирования способом подстановки состоит в следующем:

1. Определяют, к какому табличному интегралу приводится данный интеграл (предварительно преобразовав подынтегральное выражение, если нужно).

2. Определяют, какую часть подынтегральной функции заменить новой переменной, и записывают эту замену.

3. Находят дифференциалы обеих частей записи и выражают дифференциал старой переменной (или выражение, содержащее этот дифференциал) через дифференциал новой переменной.

4. Производят замену под интегралом.

5. Находят полученный интеграл.

6. В результате производят обратную замену, то есть переходят к старой переменной. Результат полезно проверить дифференцированием.

3. Основные методы интегрирования

Метод подстановки.

Пример 1.

Вычислить $\int \frac{x^3}{(x-1)^2}\,dx$.

Введем новую переменную t с помощью подстановки:

$t = x - 1$, обычно стараются выразить “старую” переменную x через новую:

$x = t + 1$, теперь удобно выразить и дифференциал dx через dt:

$dx = dt$ и следуя формуле (1), где $f[\varphi(t)] = \frac{(t+1)^3}{t^2}$, $\varphi'(t) = 1$, получаем цепочку равенств:

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^2}\,dx = \int \frac{(t+1)^3}{t^2}\,dt = \int \left(t + 3 + \frac{3}{t} + \frac{1}{t^2}\right)dt = \frac{1}{2}t^2 + 3t + 3\ln|t| - \frac{1}{t} + C.$$

Возвращаясь к исходной переменной x, получаем окончательный результат:

$$\int \frac{x^3\,dx}{(x-1)^2} = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 3(x-1) + 3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C.$$

3. Основные методы интегрирования

Метод подстановки.

Пример 2.

Вычислить $\int \frac{x^4 dx}{x^5 + 7}$

Положим $t = x^5 + 7$, здесь сразу же выразим $dt = 5x^4 dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{5x^4}$. Тогда

$\int \frac{x^4 dx}{x^5 + 7} = \int \frac{\cancel{x^4} dt}{t \cdot 5\cancel{x^4}} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{5}\ln|t| + C$, и после возвращения к переменной x, получаем:

$\int \frac{x^4 dx}{x^5 + 7} = \frac{1}{5} ln|x^5 + 7| + C$.

Заметим, что удачный выбор подстановки сделать подчас нелегко: необходим опыт в технике дифференцирования и хорошие знания таблицы интегралов. Так, в последнем примере числитель x^4 совпадает, с точностью до числового коэффициента, с производной знаменателя $(x^5+7)'$, то есть в числителе стоит практически дифференциал выражения стоящего в знаменателе, отсюда логичен и выбор новой переменной t.

3. Основные методы интегрирования

Метод интегрирования по частям.

Метод основан на использовании формулы дифференцирования произведения двух функций. Он весьма эффективен, если вычисляется

[illegible]

и подынтегральные функции являют различные между собой классы элементарных функций: многочлены, тригонометрические, показательные и логарифмические функции.

3. Основные методы интегрирования

Метод интегрирования по частям.

Теорема.

Пусть функции $U(x)$ и $V(x)$ определены и дифференцируемы на множестве X и пусть функция $[U'(x) \cdot V(x)]$ имеет первообразную на этом промежутке. Тогда функция $[U(x) \cdot V'(x)]$ также имеет первообразную и справедлива формула:

$$\int U(x)V'(x)dx = U(x)V(x) - \int U'(x)V(x)dx$$

Поскольку $U'dx = dU$ и $V'dx = dV$, можно использовать дифференциалы dU и dV:

$$\int U dV = UV - \int V dU$$

Эти формулы называются *формулами интегрирования по частям* в неопределённом интеграле.

3. Основные методы интегрирования

Метод интегрирования по частям.

Пример 1. Вычислить интеграл, где исходная функция не имеет табличной первообразной:

$$\int arctgx\,dx = \left\| \begin{matrix} u = arctgx \\ du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx \\ \int dv = \int dx \\ v = x \end{matrix} \right\| = x \cdot arctgx - \int \frac{xdx}{1+x^2} = x \cdot arctgx - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = x \cdot arctgx - \frac{\ln(1+x^2)}{2} + C\,.$$

3. Основные методы интегрирования

Метод интегрирования по частям.

Пример 2. Вычислить интеграл, где “убирается” одна из подынтегральных функций:

$$\int x \cdot e^x dx = \left\| \begin{array}{l} u = x \\ du = dx \\ dv = e^x dx \\ \int dv = \int e^x dx \\ v = e^x \end{array} \right\| = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C .$$

3. Основные методы интегрирования

Метод интегрирования по частям.

Пример 3. Пример требует двукратного применения метода "по частям" для многочлена $x^2 + 3$:

$$\int (x^2+3)\cdot\cos x\cdot dx = \left\|\begin{matrix} u = x^2+3 \\ du = 2x\cdot dx \\ dv = \cos x\cdot dx \\ v = \sin x \end{matrix}\right\| = (x^2+3)\cdot\sin x - 2\int x\cdot\sin x\cdot dx = \left\|\begin{matrix} u = x \\ du = dx \\ dv = \sin x\cdot dx \\ v = -\cos x \end{matrix}\right\| =$$

$$= (x^2+3)\cdot\sin x + 2x\cdot\cos x - 2\int\cos x\cdot dx = (x^2+3)\cdot\sin x + 2x\cdot\cos x - 2\sin x + C\,.$$

4. Определенный интеграл

Пусть $y = f(x)$ определена на отрезке $[a;b]$, разобьем его на "n" произвольных частей точками: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots x_n = b$.

x_i – точки разбиения (где $0 \le i \le n$). В каждом из полученных частичных отрезков $[x_{i-1}; x_i]$ выберем произвольную точку ξ_i $(x_{i-1} \le \xi_i \le x_i)$. Через Δx_i обозначим разность $x_i - x_{i-1}$, которую условимся называть длиной частичного отрезка $[x_{i-1}; x_i]$.

Образуем сумму $\sigma = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n$, или

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

которую назовём <u>интегральной суммой</u> для $f(x)$ на $[a, b]$, соответствующей данному разбиению $[a, b]$ на частичные отрезки и данному выбору промежуточных точек ξ_i

4. Определенный интеграл

Геометрический смысл интегральной суммы σ очевиден: это сумма площадей прямоугольников с основаниями $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ и высотами $f(\xi_1)$, $f(\xi_2), \dots, f(\xi_n)$, (если $f(x) \geq 0$).

4. Определенный интеграл

Обозначим через λ длину наибольшего частичного отрезка разбиения $[a,\ b]$

$$\lambda = \max_{1 \le k \le n} \{\Delta x_k\}$$

<u>Определение</u>: Если существует конечный предел I интегральной суммы σ при $\lambda \to 0$, то этот предел называется ОПРЕДЕЛЕННЫМ ИНТЕГРАЛОМ (ОИ) от функции $f(x)$ по отрезку $[a,\ b]$ и обозначается следующим образом:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx,$$

или

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\,\Delta x_k.$$

4. Определенный интеграл

Основные свойства определения интеграла

1. Пусть $b = a$. Тогда по определению:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

При $b < a$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

(точки x_i пробегают значения от x_n до x_0).

4. Определенный интеграл

Основные свойства определения интеграла

2. Для любых a, b и c имеет место равенство

[illegible] = [illegible] + [illegible]

При этом полагаем,

а) Что интегралы существуют!

б) точка “c” может быть вне $[a, b]$.

4. Определенный интеграл

Основные свойства определения интеграла

3. Постоянный множитель можно выносить за знак ОИ

4. ОИ от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме их интегралов, т.е.

4. Определенный интеграл

Определенный интеграл с переменным верхним пределом

Пусть дан

[illegible], [illegible] ≤ [illegible] ≤ [illegible]

тогда его величина

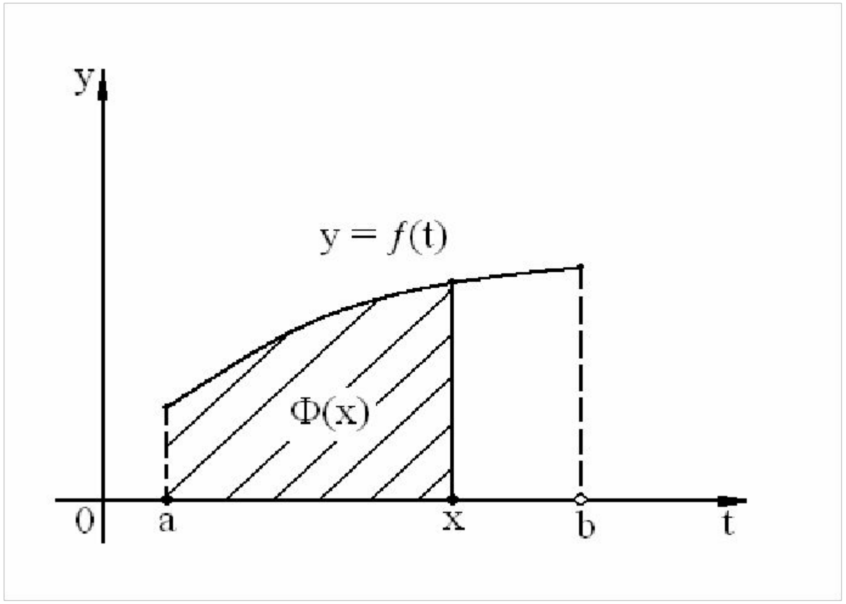
[illegible] = [illegible]

есть функция верхнего предела “*x*”. Её называют интегралом с переменным верхним пределом.

4. Определенный интеграл

Определенный интеграл с переменным верхним пределом

Геометрически $\Phi(x)$ есть площадь заштрихованной криволинейной трапеции, если $f(x)>0$.



4. Определенный интеграл

<u>Определенный интеграл с переменным верхним пределом</u>

<u>Теорема:</u> производная интеграла от непрерывной функции по переменному верхнему пределу существует и равна значению подынтегральной функции в точке, равной верхнему пределу.

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)\,dt \right)' = f(x)$$

Отсюда следует:

$$\int f(x)\,dx = \int_a^x f(t)\,dt + C,$$

где C- произвольная постоянная

4. Определенный интеграл

Формула Ньютона – Лейбница.

Пусть функция $f(x)$ определена и интегрируема на отрезке $[a,\ b]$ и имеет первообразную $F(x)$. Тогда определенный интеграл на отрезке $[a,\ b]$ может быть вычислен по следующей формуле:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Это и есть так называемая формула Ньютона-Лейбница.

4. Определенный интеграл

Формула Ньютона – Лейбница.

Разность [illegible] − [illegible] может быть записана в виде

[illegible] − [illegible] = [illegible]

[illegible] − [illegible] = [illegible]

Тогда

[illegible] = [illegible]

В этой формуле в качестве *F(x)* можно взять любую первообразную для *f (x)* на [*a*, *b*].

4. Определенный интеграл

Формула Ньютона – Лейбница.

ПРИМЕРЫ.

1. $$\int_a^b \sin x\, dx = -\cos x\Big|_a^b = \cos a - \cos b\ .$$

2. $$\int_0^2 \left(3x^2 - 1\right)dx = \left[x^3 - x\right]_0^2 = \left[\left(2^3 - 2\right) - \left(0^3 - 0\right)\right] = 6$$

3. $$\int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$