

ВОЛГОГРАДСКАЯ АКАДЕМИЯ МВД РОССИИ

Кафедра информатики и математики
Мультимедиа-поддержка лекции (2 часа)
на тему

Интегральное исчисление

Автор: доцент, к.ф.-м.н.
Бакулин В.М.



Волгоград 2020

Интегральное исчисление

Учебные вопросы:

1. Понятие первообразной функции.
2. Понятие неопределённого интеграла.
3. Основные методы интегрирования.
4. Определенный интеграл.

1. Понятие первообразной функции

Определение.

Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на некотором промежутке X , если $\forall x \in X$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Пример 1.

Функция $F(x) = \sin x$ является первообразной для функции $f(x) = \cos x$ на всей числовой прямой, поскольку $(\sin x)' = \cos x$, $\forall x \in R$.

Пример 2.

Функция $F(x) = x^3$ есть первообразная для функции $f(x) = 3x^2$ на всей числовой прямой, так как $(x^3)' = 3x^2$, $\forall x \in R$.

1. Понятие первообразной функции

Теорема 1. Если $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ на некотором промежутке X , то любая другая первообразная для $f(x)$ на том же промежутке может быть представлена в виде $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная величина ($C \in R$).

Доказательство:

Пусть задана $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ на некотором промежутке X , то есть $F'(x) = f(x)$. Если $\Phi(x)$ – другая первообразная для $f(x)$ на X , то и $\Phi'(x) = f(x)$. Тогда $\forall x \in X$ справедливо, что $\Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$. Следуя Лемме 1, это означает, что разность функций $\Phi(x) - F(x)$ есть постоянная величина, то есть $\Phi(x) - F(x) = C$, где C – некоторое число. Следовательно, $\Phi(x) = F(x) + C$, что и требовалось доказать.

2. Понятие неопределённого интеграла

Определение.

Если функция $F(x)$ – первообразная для $f(x)$ на промежутке X , то множество функций $F(x) + C$, где C – произвольная постоянная, называется *неопределённым интегралом* от функции $f(x)$ на этом промежутке, и обозначается символом:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

При этом используются следующие выражения: $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, $f(x)dx$ – *подынтегральным выражением*, а переменная x – *переменной интегрирования*.

2. Понятие неопределённого интеграла

Основные свойства неопределённого интеграла.

Свойство 1. Производная неопределённого интеграла равна подынтегральной функции; дифференциал от неопределённого интеграла равен подынтегральному выражению:

$$\frac{d}{dx} \int f(x) dx = f(x);$$

$$\int f'(x) dx = f(x) + C$$

2. Понятие неопределённого интеграла

Основные свойства неопределённого интеграла.

Свойство 2. Неопределённый интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной:

$$\int f'(x) dx = f(x) + C$$

Свойство 3. Постоянный множитель можно выносить из-под знака интеграла, то есть при заданном числовом множителе $k \neq 0$ имеет место равенство:

$$\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$$

2. Понятие неопределённого интеграла

Основные свойства неопределённого интеграла.

Свойство 4. Неопределённый интеграл от алгебраической суммы двух функций равен алгебраической сумме интегралов от этих функций в отдельности.

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

Аналогичное равенство верно для любого числа слагаемых подынтегральных функций.

Свойство 5. Если известна $F(x)$ – первообразная для некоей функции $f(x)$, то верно:

$$\int f(x) dx + \int g(x) dx = \int (f(x) + g(x)) dx + C + C$$

2. Понятие неопределённого интеграла

Таблица неопределённых интегралов

1. Вначале отметим, что первообразная для нулевой функции есть величина постоянная

$$\int 0 \, dx = C,$$

поскольку производная $C' = 0$.

2. Понятие неопределённого интеграла

Таблица неопределённых интегралов

2. Рассмотрим интегрирование *степенной функции* $f(x) = x^\alpha$, где показатель степени $\alpha \neq 1$

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$$

Это общая формула интегрирования функции с вещественным показателем. В частности, $\int x dx = \frac{x^2}{2} + C$, поскольку $x^0 = 1$, а $\int x^0 dx = \frac{x^1}{1} + C$

2. Понятие неопределённого интеграла

Таблица неопределённых интегралов

Особо выделим случай степени с дробным показателем $x^{\alpha} = \frac{m}{n}$, в виду ее специфичности:

$$\int x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{x^{\frac{m}{n} + 1}}{\frac{m}{n} + 1},$$

$$\int \frac{x^{\frac{m}{n}}}{x^2} dx = \frac{x^{\frac{m}{n} - 1}}{\frac{m}{n} - 1} + C$$

Для степени с отрицательным показателем $\alpha < -1$ зададим $k = -\alpha$, тогда

$$\int \frac{x^{\alpha}}{x^k} dx = -\frac{1}{\alpha - k + 1} x^{\alpha - k + 1} + C$$

2. Понятие неопределённого интеграла

Таблица неопределённых интегралов

3. Выделим случай, когда показатель степени $\alpha = -1$, подынтегральная

функция $\frac{1}{x}$

$$\int \frac{1}{x} = \ln|x| + C, \text{ при } x \neq 0$$

Вместо степенной функции, при интегрировании получили функцию *натуральный логарифм*.

2. Понятие неопределённого интеграла

Таблица неопределённых интегралов

4. Интеграл от показательной функции с произвольным основанием a

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \text{ при } 0 < a \neq 1$$

В случае функции e^x (экспонента), первообразная повторяет подынтегральную функцию

$$\int e^x dx = e^x + C$$

2. Понятие неопределённого интеграла

Таблица неопределённых интегралов

интегрирование основных тригонометрических функций.

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

2. Понятие неопределённого интеграла

Таблица неопределённых интегралов

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 + a^2}} = \ln \left| \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{a}{x} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \text{ при } a \neq 0$$

$$\int \frac{dx}{x \sqrt{x^2 - a^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{a}{x} + C, \text{ при } a \neq 0$$

$$\int \operatorname{tg} x \, dx = -\ln |\cos x| + C$$

$$\int \operatorname{ctg} x \, dx = \ln |\sin x| + C$$

3. Основные методы интегрирования

Непосредственное интегрирование.

Для интегрирования простейших функций используются основные свойства неопределённых интегралов, а также приведенная выше таблица. В качестве примеров вычислим ряд интегралов.

Пример 1.

$$\begin{aligned} & \int \left(5 \cos x + 2 - 3x^2 + \frac{1}{x} - \frac{4}{x^2 + 1} \right) dx = \\ & = 5 \int \cos x dx + 2 \int dx - 3 \int x^2 dx + \int \frac{dx}{x} - 4 \int \frac{dx}{x^2 + 1} = \\ & = 5 \sin x + 2x - x^3 + \ln|x| - 4 \operatorname{arctg} + C. \end{aligned}$$

3. Основные методы интегрирования

Непосредственное интегрирование.

Пример 2.

$$\int \left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} \right)^2 dx = \int \left(\sin^2 \frac{x}{2} + 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} + \cos^2 \frac{x}{2} \right) dx = \\ = \int (1 + \sin x) dx = \int dx + \int \sin x dx = x - \cos x + C.$$

Пример 3.

$$\int \operatorname{tg}^2 x \cdot dx = \int (1 / \cos^2 x - 1) \cdot dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

второй способ

$$\int \operatorname{tg}^2 x \cdot dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

3. Основные методы интегрирования

Метод подстановки.

Замена переменной интегрирования во многих случаях позволяет свести нахождение исходного интеграла к отысканию новой подынтегральной функции, позволяющей осуществить “табличное” интегрирование. Этот метод называется *методом подстановки* или методом замены переменной. Он основан на правиле дифференцирования сложной функции

$$\int f(u) u' dx = \int f(u) du$$

Интеграл, стоящий в *правой* части равенства, может оказаться проще интеграла стоящего в *левой* части этого равенства, или даже табличным.

3. Основные методы интегрирования

Метод подстановки.

Правило интегрирования способом подстановки состоит в следующем:

1. Определяют, к какому табличному интегралу приводится данный интеграл (предварительно преобразовав подынтегральное выражение, если нужно).
2. Определяют, какую часть подынтегральной функции заменить новой переменной, и записывают эту замену.
3. Находят дифференциалы обеих частей записи и выражают дифференциал старой переменной (или выражение, содержащее этот дифференциал) через дифференциал новой переменной.
4. Производят замену под интегралом.
5. Находят полученный интеграл.
6. В результате производят обратную замену, то есть переходят к старой переменной. Результат полезно проверить дифференцированием.

3. Основные методы интегрирования

Метод подстановки.

Пример 1.

Вычислить $\int \frac{x^3}{(x-1)^2} dx$.

Введем новую переменную t с помощью подстановки:

$t = x - 1$,
 $x = t + 1$,
обычно стараются выразить “старую” переменную x через новую:
теперь удобно выразить и дифференциал dx через dt :

$dx = dt$ и следуя формуле (1), где $f[\varphi(t)] = \frac{(t+1)^3}{t^2}$, $\varphi'(t) = 1$, получаем цепочку равенств:

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^2} dx = \int \frac{(t+1)^3}{t^2} dt = \int \left(t + 3 + \frac{3}{t} + \frac{1}{t^2}\right) dt = \frac{1}{2}t^2 + 3t + 3\ln|t| - \frac{1}{t} + C.$$

Возвращаясь к исходной переменной x , получаем окончательный результат:

$$\int \frac{x^3 dx}{(x-1)^2} = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 3(x-1) + 3\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C.$$

3. Основные методы интегрирования

Метод подстановки.

Пример 2.

Вычислить $\int \frac{x^4 dx}{x^5 + 7}$

Положим $t = x^5 + 7$, здесь сразу же выразим $dt = 5x^4 dx \Rightarrow dx = \frac{dt}{5x^4}$. Тогда

$$\int \frac{x^4 dx}{x^5 + 7} = \int \frac{\cancel{x^4} dt}{t \cdot 5\cancel{x^4}} = \frac{1}{5} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{5} \ln|t| + C, \quad \text{и после возвращения к переменной } x, \text{ получаем:}$$

$$\int \frac{x^4 dx}{x^5 + 7} = \frac{1}{5} \ln|x^5 + 7| + C.$$

Заметим, что удачный выбор подстановки сделать подчас нелегко: необходим опыт в технике дифференцирования и хорошие знания таблицы интегралов. Так, в последнем примере числитель x^4 совпадает, с точностью до числового коэффициента, с производной знаменателя $(x^5 + 7)'$, то есть в числителе стоит практически дифференциал выражения стоящего в знаменателе, отсюда логичен и выбор новой переменной t .

3. Основные методы интегрирования

Метод интегрирования по частям.

Метод основан на использовании формулы дифференцирования произведения двух функций. Он весьма эффективен, если вычисляется

$$\int u \cdot v' dx = u \cdot v - \int u' \cdot v dx$$

и подынтегральные функции являют различные между собой классы элементарных функций: многочлены, тригонометрические, показательные и логарифмические функции.

3. Основные методы интегрирования

Метод интегрирования по частям.

Теорема.

Пусть функции $U(x)$ и $V(x)$ определены и дифференцируемы на множестве X и пусть функция $[U'(x) \cdot V(x)]$ имеет первообразную на этом промежутке. Тогда функция $[U(x) \cdot V'(x)]$ также имеет первообразную и справедлива формула:

$$\int U'(x) \cdot V(x) dx = U(x) \cdot V(x) - \int U(x) \cdot V'(x) dx$$

Поскольку $U'dx = dU$ и $V'dx = dV$, можно использовать дифференциалы dU и dV :

$$\int U' \cdot V = U \cdot V - \int U \cdot V'$$

Эти формулы называются *формулами интегрирования по частям* в неопределённом интеграле.

3. Основные методы интегрирования

Метод интегрирования по частям.

Пример 1. Вычислить интеграл, где исходная функция не имеет табличной первообразной:

$$\int \operatorname{arctg} x \, dx = \left. \begin{array}{l} u = \operatorname{arctg} x \\ du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx \\ \int dv = \int dx \\ v = x \end{array} \right\} = x \cdot \operatorname{arctg} x - \int \frac{x dx}{1+x^2} = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = x \cdot \operatorname{arctg} x - \frac{\ln(1+x^2)}{2} + C.$$

3. Основные методы интегрирования

Метод интегрирования по частям.

Пример 2. Вычислить интеграл, где “убирается” одна из подынтегральных функций:

$$\int x \cdot e^x dx = \left. \begin{array}{l} u = x \\ du = dx \\ dv = e^x dx \\ \int dv = \int e^x dx \\ v = e^x \end{array} \right| = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C.$$

3. Основные методы интегрирования

Метод интегрирования по частям.

Пример 3. Пример требует двукратного применения метода “по частям” для многочлена $x^2 + 3$:

$$\int (x^2 + 3) \cdot \cos x \cdot dx = \left\| \begin{array}{l} u = x^2 + 3 \\ du = 2x \cdot dx \\ dv = \cos x \cdot dx \\ v = \sin x \end{array} \right\| = (x^2 + 3) \cdot \sin x - 2 \int x \cdot \sin x \cdot dx = \left\| \begin{array}{l} u = x \\ du = dx \\ dv = \sin x \cdot dx \\ v = -\cos x \end{array} \right\| =$$

$$= (x^2 + 3) \cdot \sin x + 2x \cdot \cos x - 2 \int \cos x \cdot dx = (x^2 + 3) \cdot \sin x + 2x \cdot \cos x - 2 \sin x + C .$$

4. Определенный интеграл

Пусть $y = f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$, разобьем его на “ n ” произвольных частей точками: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$.

x_i – точки разбиения (где $0 \leq i \leq n$). В каждом из полученных частичных отрезков $[x_{i-1}; x_i]$ выберем произвольную точку ξ_i ($x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$). Через Δx_i обозначим разность $x_i - x_{i-1}$, которую условимся называть длиной частичного отрезка $[x_{i-1}; x_i]$.

Образуем сумму $\sigma = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta x_n$, или

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i,$$

которую назовём интегральной суммой для $f(x)$ на $[a, b]$, соответствующей данному разбиению $[a, b]$ на частичные отрезки и данному выбору промежуточных точек ξ_i

4. Определенный интеграл

Геометрический смысл интегральной суммы σ очевиден: это сумма площадей прямоугольников с основаниями $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ и высотами $f(\xi_1), f(\xi_2), \dots, f(\xi_n)$, (если $f(x) \geq 0$).

4. Определенный интеграл

Обозначим через λ длину наибольшего частичного отрезка разбиения $[a, b]$

$$\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k$$

Определение: Если существует конечный предел I интегральной суммы σ при $\lambda \rightarrow 0$, то этот предел называется **ОПРЕДЕЛЕННЫМ ИНТЕГРАЛОМ (ОИ)** от функции $f(x)$ по отрезку $[a, b]$ и обозначается следующим образом:

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

ИЛИ

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k$$

4. Определенный интеграл

Основные свойства определения интеграла

1. Пусть $b = a$. Тогда по определению:

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

При $b < a$:

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

(точки x_i пробегают значения от x_n до x_0).

4. Определенный интеграл

Основные свойства определения интеграла

2. Для любых a , b и c имеет место равенство

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

При этом полагаем,

а) Что интегралы существуют!

б) точка “ c ” может быть вне $[a, b]$.

4. Определенный интеграл

Основные свойства определения интеграла

3. Постоянный множитель можно выносить за знак ОИ

$$\int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$$

4. ОИ от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме их интегралов, т.е.

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$$

4. Определенный интеграл

Определенный интеграл с переменным верхним пределом

Пусть дан

$$\int_a^x f(x) dx, \quad a \leq x \leq b$$

тогда его величина

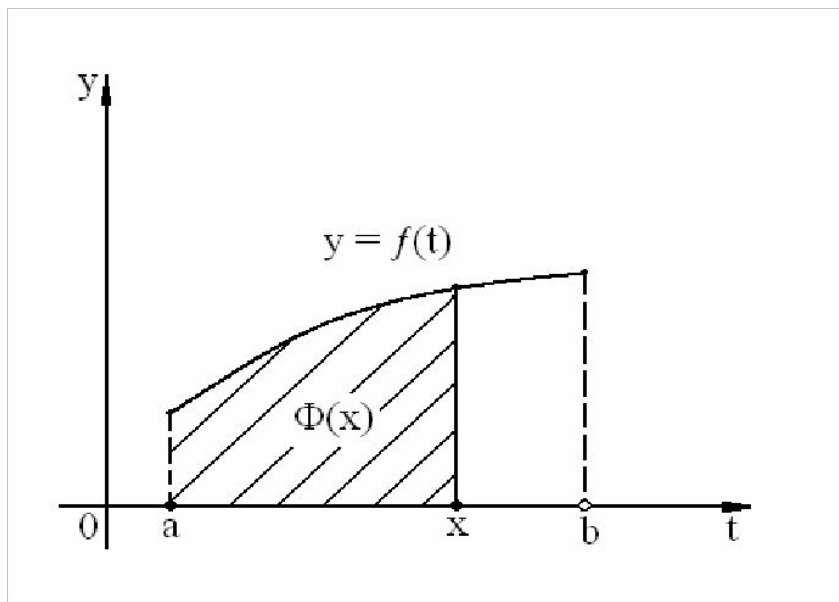
$$\int_a^x f(x) dx = \int_a^b f(x) dx - \int_x^b f(x) dx$$

есть функция верхнего предела “ x ”. Её называют интегралом с переменным верхним пределом.

4. Определенный интеграл

Определенный интеграл с переменным верхним пределом

Геометрически $\Phi(x)$ есть площадь заштрихованной криволинейной трапеции, если $f(x) > 0$.



4. Определенный интеграл

Определенный интеграл с переменным верхним пределом

Теорема: производная интеграла от непрерывной функции по переменному верхнему пределу существует и равна значению подынтегральной функции в точке, равной верхнему пределу.

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

Отсюда следует:

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) + C,$$

где C - произвольная постоянная

4. Определенный интеграл

Формула Ньютона – Лейбница.

Пусть функция $f(x)$ определена и интегрируема на отрезке $[a, b]$ и имеет первообразную $F(x)$. Тогда определенный интеграл на отрезке $[a, b]$ может быть вычислен по следующей формуле:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Это и есть так называемая формула Ньютона-Лейбница.

4. Определенный интеграл

Формула Ньютона – Лейбница.

Разность $\int_a^b f(x) dx - \int_a^c f(x) dx$ может быть записана в виде

$$\int_a^b f(x) dx - \int_a^c f(x) dx = \int_c^b f(x) dx$$

$$\int_a^c f(x) dx - \int_a^b f(x) dx = -\int_b^c f(x) dx$$

Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

В этой формуле в качестве $F(x)$ можно взять любую первообразную для $f(x)$ на $[a, b]$.

4. Определенный интеграл

Формула Ньютона – Лейбница.

ПРИМЕРЫ.

$$1. \int_a^b \sin x \, dx = -\cos x \Big|_a^b = \cos a - \cos b .$$

$$2. \int_0^2 (3x^2 - 1) \, dx = \left[x^3 - x \right]_0^2 = [(2^3 - 2) - (0^3 - 0)] = 6$$

$$3. \int_1^2 \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2 .$$