Лекция №6

Энергетический спектр стационарного случайного процесса.

Дисциплина: “Статистическая теория радиотехнических систем”

-
- $x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t} d\omega,$ (1)
- где $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt$ (2)
- называется спектральной функцией процесса *x(t)* $x(t)$.
- Можно записать :
- $X(j\omega) = X(\omega) e^{j\varphi(\omega)},$ (3)
- где $X(\omega)$ называют амплитудным спектром, а $\varphi(\omega)$ - фазовым спектром функции $x(t)$.

- Умножая левую и правую части (2) на $x(t)$ и интегрируя в бесконечных пределах, получим
- $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t} d\omega\right]$
.
- Изменим порядок интегрирования:
- $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{j\omega t} dt\right] d$
,
- Поскольку $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{j\omega t} dt = X(j\omega),$
- То

- $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)\, X(j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [X(j\omega)]^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X^2(\omega)\, d\omega$ (4)

- Рассмотрим теперь отрезок функции $x(t)$ на интервале времени [-T, T], обозначив его $x_{2T}(t)$.
- Для данного отрезка справедливо соотношение (4):
- $\int_{-T}^{T} x_{2T}^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X^2{}_{2T}(\omega)\, d\omega.$ (5)
- Поделив правую и левую части (1.105) на *2T* и устремляя *T* к бесконечности, получим
- $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x_{2T}^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \lim\limits_{T\to\infty} \frac{X^2{}_{2T}(\omega)}{2T} d\omega$ (6)
- Обозначим
- $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{X^2{}_{2T}(\omega)}{2T} = s_x(\omega)$
- и перепишем (1.106) в виде
- $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x_{2T}^2(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} s_x(\omega)d\omega.$ (7)
- (7)
- Для этой реализации можно найти энергетический спектр, как для детерминированного колебания:
- $s_x^{(K)}(\omega) = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T}|X^K(j\omega)|^2.$ (8)

- Энергетический спектр стационарного случайного процесса найдем как среднее по ансамблю энергетических спектров реализаций
- $s_{\hat{x}}(\omega) = s_x^{(K)}(\omega) = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{\left|X_{2T}^{(K)}(j\omega)\right|^2}{2T}$. (9)
- Перепишем выражение (9) в следующем виде:
- $s_{\hat{x}}(\omega) = \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T} X_{2T}^{(K)}(j\omega)\, X_{2T}^{(K)}(j\omega) =$
  $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \hat{x}\,(t) e^{-j\omega t} dt \int_{-T}^{T} \hat{x}(t) e^{j\omega t} dt =$
- $= \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \int_{-T}^{T} x(t_1) x(t_2) e^{-j\omega(t_2 - t_1)} dt_1 dt_2 =$
- $= \lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} dt_2 \int_{-T}^{T} x(t_1) x(t_2) e^{-j\omega(t_2 - t_1)} dt_1$ (10)
- В полученном выражении
- $x(t_1)x(t_2) = B_{\hat{x}}(t_1, t_2) = B_{\hat{x}}(\tau)$. (11)
- Заменяя во внутреннем интеграле формулы (10) переменную интегрирования по формуле $t_2 - t_1 = \tau$ и учитывая (11), получаем
- $s_{\hat{x}}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} B_{\hat{x}}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$. (12)

- $B_{\hat{x}}(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} s_{\hat{x}}(\omega)e^{-j\omega\tau}d\omega$ (13)
- Выражение (1.112) можно переписать следующим образом:
- $s_{\hat{x}}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} B_{\hat{x}}(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau + j\int_{-\infty}^{+\infty} B_{\hat{x}}(\tau)\sin\omega\tau d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} B_{\hat{x}}(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau =$
- $=2\int_{0}^{\infty} B_{\hat{x}}(\tau)\cos\omega\tau\, d\tau,$ (14)
- так как $B_{\hat{x}}(\tau)$ - четная функция аргумента τ. Следовательно, из (13) можно заключить, что $s_{\hat{x}}(\omega)$ является четной функцией частоты.
- Кроме понятия энергетического спектра стационарного случайного процесса существует понятие взаимного энергетического спектра двух процессов:
- $s_{\hat{x}\hat{y}}(j\omega) = \lim_{T\to\infty}\frac{X_{2T}(j\omega)Y_{2T}(j\omega)}{2T}$

- Нетрудно доказать, что взаимный энергетический спектр и взаимная ковариационная функция случайных процессов связаны преобразованием Фурье:
- $s_{\hat{x}\hat{y}}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B_{\hat{x}\hat{y}}(\tau)\, e^{-j\omega\tau} d\tau,$ (15)
- $s_{\hat{x}\hat{y}}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B_{\hat{y}\hat{x}}(\tau)\, e^{-j\omega\tau} d\tau.$ (16)

- Поскольку
- $B_{\hat{x}\hat{y}}(\tau) = B_{\hat{y}\hat{x}}(-\tau),$
- то
- $\int_{-\infty}^{+\infty} B_{\hat{x}\hat{y}}(\tau)\, e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} B_{\hat{y}\hat{x}}(-\tau)\, e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} B_{\hat{y}\hat{x}}(\tau)\, e^{j\omega\tau} d\tau.$
- Следовательно,
- $s_{\hat{x}\hat{y}}(j\omega) = s^{*}{}_{\hat{x}\hat{y}}(j\omega).$ (17)

- $B_{\hat{s}}(\tau) = \overline{[\hat{x}(t) + \hat{y}(t)][\hat{x}(t+\tau) + \hat{y}(t+\tau)]} =$
- $= B_{\hat{x}}\ (\tau) + B_{\hat{y}}(\tau) + B_{\hat{x}\hat{y}}(\tau) + B_{\hat{y}\hat{x}}(\tau).$ (18)
- Применяя к (18) преобразование Фурье, находим энергетический спектр смеси
- $s_{\hat{s}}(\omega) = s_{\hat{x}}(\omega) + s_{\hat{y}}(\omega) + s_{\hat{x}\hat{y}}(j\omega) + s_{\hat{y}\hat{x}}(j\omega).$

- Если процессы $\hat{x}(t)$ и $\hat{y}(t)$ статистически независимы, то $B_{\hat{x}\hat{y}}(\tau) = B_{\hat{y}\hat{x}}(\tau) = 0$ и $s_{\hat{x}\hat{y}}(j\omega) = s(j\omega) = 0$.
- Применяя формулу (1.118), получаем, что средняя мощность процесса равна сумме средних мощностей слагаемых:
- $\overline{s^2(t)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s_{\hat{x}}(\omega)d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} s_{\hat{y}}(\omega)d\omega = \overline{x^2(t)} + \overline{y^2(t)}$.
- Если процессы коррелированы, то в силу (17)
- $s_{\hat{x}\hat{y}}(j\omega) + s_{\hat{y}\hat{x}}(j\omega) = 2R_e s_{\hat{y}\hat{x}}(j\omega)$
- и
- $s_{\hat{s}}(\omega) = s_{\hat{x}}(\omega) + s_{\hat{y}}(\omega) + 2R_e s_{\hat{y}\hat{x}}(j\omega)$.
- Следовательно
- $\overline{s^2(t)} = \overline{x^2(t)} + \overline{y^2(t)} + \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} R_e s_{\hat{y}\hat{x}}(j\omega)d\omega$