

# Лекция №6

## Энергетический спектр стационарного случайного процесса.

- 
- $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \quad (1)$
- где  $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (2)$
- называется спектральной функцией процесса  $x(t)$ .
- Можно записать :
- $X(j\omega) = X(\omega) e^{j\varphi(\omega)}, \quad (3)$
- где  $X(\omega)$  называют амплитудным спектром, а  $\varphi(\omega)$  - фазовым спектром функции  $x(t)$ .

- Умножая левую и правую части (2) на  $x(t)$  и интегрируя в бесконечных пределах, получим

- $$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \right] dt$$

.

- Изменим порядок интегрирования:

- $$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j\omega t} dt \right] d\omega$$

,

- Поскольку  $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{j\omega t} dt = X(j\omega)$ ,

- То

- $$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) X(j\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} [X(j\omega)]^2 d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X^2(\omega) d\omega \quad (4)$$

- Рассмотрим теперь отрезок функции  $x(t)$  на интервале времени  $[-T, T]$ , обозначив его  $x_{2T}(t)$ .

- Для данного отрезка справедливо соотношение (4):

- $$\int_{-T}^T x_{2T}^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X_{2T}^2(\omega) d\omega. \quad (5)$$

- Поделив правую и левую части (1.105) на  $2T$  и устремляя  $T$  к бесконечности, получим

- $$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_{2T}^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{X_{2T}^2(\omega)}{2T} d\omega \quad (6)$$

- Обозначим

- $$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{X_{2T}^2(\omega)}{2T} = S_x(\omega)$$

- и перепишем (1.106) в виде

- $$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x_{2T}^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(\omega) d\omega. \quad (7)$$

- (7)

- Для этой реализации можно найти энергетический спектр, как для детерминированного колебания:

- $$S_x^{(K)}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} |X^K(j\omega)|^2. \quad (8)$$

- Энергетический спектр стационарного случайного процесса найдем как среднее по ансамблю энергетических спектров реализаций

- $$s_{\hat{x}}(\omega) = s_x^{(K)}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_{2T}^{(K)}(j\omega)|^2}{2T}. \quad (9)$$

- Перепишем выражение (9) в следующем виде:

- $$s_{\hat{x}}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} X_{2T}^{(K)}(j\omega) X_{2T}^{(K)}(j\omega) =$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \hat{x}(t) e^{-j\omega t} dt \int_{-T}^T \hat{x}(t) e^{j\omega t} dt =$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-T}^T x(t_1) x(t_2) e^{-j\omega(t_2 - t_1)} dt_1 dt_2 =$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt_2 \int_{-T}^T x(t_1) x(t_2) e^{-j\omega(t_2 - t_1)} dt_1 \quad (10)$$

- В полученном выражении

- $$x(t_1)x(t_2) = B_{\hat{x}}(t_1, t_2) = B_{\hat{x}}(\tau). \quad (11)$$

- Заменяя во внутреннем интеграле формулы (10) переменную интегрирования по формуле  $t_2 - t_1 = \tau$  и учитывая (11), получаем

- $$s_{\hat{x}}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} B_{\hat{x}}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (12)$$

- $B_{\hat{x}}(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} s_{\hat{x}}(\omega) e^{-j\omega\tau} d\omega \quad (13)$

- Выражение (1.112) можно переписать следующим образом:

- $s_{\hat{x}}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} B_{\hat{x}}(\tau) \cos \omega\tau d\tau + j \int_{-\infty}^{+\infty} B_{\hat{x}}(\tau) \sin \omega\tau d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} B_{\hat{x}}(\tau) \cos \omega\tau d\tau =$   
 $= 2 \int_0^{\infty} B_{\hat{x}}(\tau) \cos \omega\tau d\tau, \quad (14)$

- так как  $B_{\hat{x}}(\tau)$  - четная функция аргумента  $\tau$ . Следовательно, из (13) можно заключить, что  $s_{\hat{x}}(\omega)$  является четной функцией частоты.

- Кроме понятия энергетического спектра стационарного случайного процесса существует понятие взаимного энергетического спектра двух процессов:

- $s_{\hat{x}\hat{y}}(j\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{X_{2T}(j\omega)Y_{2T}(j\omega)}{2T}$

- Нетрудно доказать, что взаимный энергетический спектр и взаимная ковариационная функция случайных процессов связаны преобразованием Фурье:

- $$s_{\hat{x}\hat{y}}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B_{\hat{x}\hat{y}}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau, \quad (15)$$

- $$s_{\hat{x}\hat{y}}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} B_{\hat{y}\hat{x}}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (16)$$

- Поскольку

- $$B_{\hat{x}\hat{y}}(\tau) = B_{\hat{y}\hat{x}}(-\tau),$$

- то

- $$\int_{-\infty}^{+\infty} B_{\hat{x}\hat{y}}(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} B_{\hat{y}\hat{x}}(-\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} B_{\hat{y}\hat{x}}(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau.$$

- Следовательно,

- $$s_{\hat{x}\hat{y}}(j\omega) = s_{\hat{x}\hat{y}}^*(j\omega). \quad (17)$$

- $B_{\hat{s}}(\tau) = \overline{[\hat{x}(t) + \hat{y}(t)][\hat{x}(t + \tau) + \hat{y}(t + \tau)]} =$
- $= B_{\hat{x}}(\tau) + B_{\hat{y}}(\tau) + B_{\hat{x}\hat{y}}(\tau) + B_{\hat{y}\hat{x}}(\tau).$

$$(18)$$

- Применяя к (18) преобразование Фурье, находим энергетический спектр смеси

- $S_{\hat{s}}(\omega) = S_{\hat{x}}(\omega) + S_{\hat{y}}(\omega) + S_{\hat{x}\hat{y}}(j\omega) + S_{\hat{y}\hat{x}}(j\omega).$



- Если процессы  $\hat{x}(t)$  и  $\hat{y}(t)$  статистически независимы, то  $B_{\hat{x}\hat{y}}(\tau) = B_{\hat{y}\hat{x}}(\tau) = 0$  и  $s_{\hat{x}\hat{y}}(j\omega) = s(j\omega) = 0$ .
- Применяя формулу (1.118), получаем, что средняя мощность процесса равна сумме средних мощностей слагаемых:
- $$\frac{\overline{s^2(t)}}{y^2(t)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s_{\hat{x}}(\omega) d\omega + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} s_{\hat{y}}(\omega) d\omega = \overline{x^2(t)} + y^2(t).$$
- Если процессы коррелированы, то в силу (17)
- $$s_{\hat{x}\hat{y}}(j\omega) + s_{\hat{y}\hat{x}}(j\omega) = 2R_e s_{\hat{y}\hat{x}}(j\omega)$$
- и
- $$s_{\hat{s}}(\omega) = s_{\hat{x}}(\omega) + s_{\hat{y}}(\omega) + 2R_e s_{\hat{y}\hat{x}}(j\omega).$$
- Следовательно
- $$\overline{s^2(t)} = \overline{x^2(t)} + \overline{y^2(t)} + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} R_e s_{\hat{y}\hat{x}}(j\omega) d\omega$$