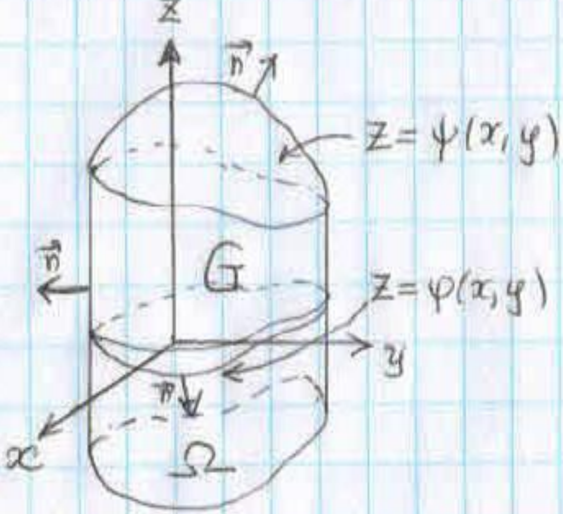
Формула Остроградского-Гаусса

Опр. $\varphi(x,y), \psi(x,y) \in C_1$ в Ω, $\varphi(x,y) \le \psi(x,y)$ $\forall (x,y) \in \Omega$



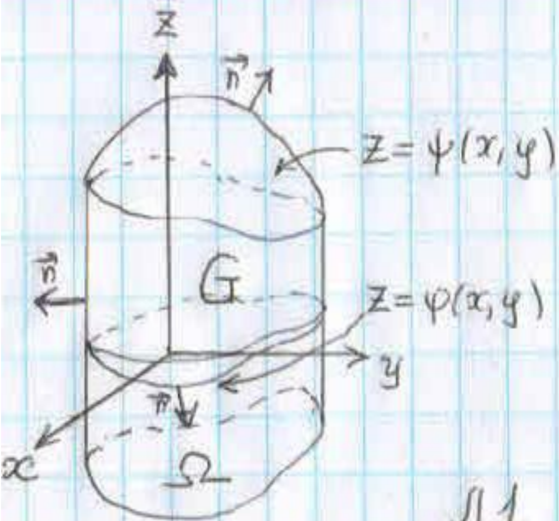
$G \equiv \{(x,y,z): (x,y) \in \Omega, \varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y)\}$ –

замкн. элем. обл. относ. Oz.

Аналогично опред. замкн. элем. обл. относ. Ox, относ. Oy (дать опред. самост.)

Формула Остроградского-Гаусса

Опр. $\varphi(x,y), \psi(x,y) \in C_1$ в Ω, $\varphi(x,y) \le \psi(x,y)$ $\forall (x,y) \in \Omega$



$G \equiv \{(x,y,z) : (x,y) \in \Omega,\ \varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y)\}$ –

замкн. элем. обл. относ. Oz.

Аналогично опред. замкн. элем. обл. относ.

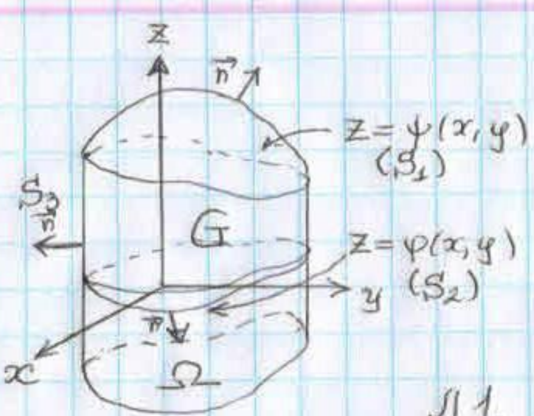
Ox, относ. Oy (дать опред. самост.)

Л1. G – замкн. элем. обл. отн. Oz. $R(x,y,z)$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ непр.

в G (по G). $\Rightarrow \iiint\limits_G \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \oiint\limits_{\partial G} R(x,y,z)\,dx\,dy$

Формула Остроградского-Гаусса

<u>Опр.</u> $\varphi(x,y), \psi(x,y) \in C_1$ в Ω, $\varphi(x,y) \le \psi(x,y)$ $\forall (x,y) \in \Omega$



$G \equiv \{(x,y,z): (x,y)\in\Omega, \varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y)\}$ — замкн. элем. обл. относ. Oz.

Аналогично опред. замкн. элем. обл. относ. Ox, относ. Oy (дать опред. самост.)

<u>Л1.</u> G - замкн. элем. обл. от. Oz. $R(x,y,z)$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ непр. в G (по G). $\Rightarrow \iiint\limits_G \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\partial G} R(x,y,z)\,dx\,dy$

Д-во. $\iiint\limits_G \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_\Omega dx\,dy \int\limits_{\varphi(x,y)}^{\psi(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\,dz = \iint\limits_\Omega R(x,y,\psi(x,y))\,dx\,dy - \iint\limits_\Omega R(x,y,\varphi(x,y))\,dx\,dy$

$\iint\limits_{\partial G} R\,dx\,dy = \iint\limits_{S_1} + \iint\limits_{S_2} + \iint\limits_{S_3}$. $\iint\limits_{S_1} R(x,y,z)\,dx\,dy = \iint\limits_{S_1} R(x,y,z)\cos\gamma\,dS$

$x=u$ $\quad \vec{r} = \{u, v, \psi(u,v)\}$
$y=v$ $\quad \vec{r}_u = \{1, 0, \psi_u\}$
$z=\psi(u,v)$ $\quad \vec{r}_v = \{0, 1, \psi_v\}$

$\vec{N} = [\vec{r}_u, \vec{r}_v] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \psi_u \\ 0 & 1 & \psi_v \end{vmatrix} = \{-\psi_u, -\psi_v, 1\}$ $\quad \vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \frac{\{-\psi_u, -\psi_v, 1\}}{\sqrt{1+\psi_u^2+\psi_v^2}}$ (т.к. $(\widehat{\vec{n},\vec{k}}) < \frac{\pi}{2}$)

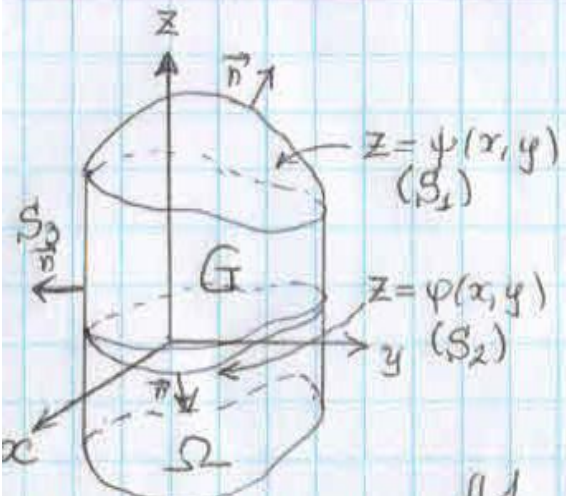
$\cos\gamma\,dS = \frac{1}{\sqrt{1+\psi_u^2+\psi_v^2}} \cdot \sqrt{1+\psi_u^2+\psi_v^2}\,du\,dv \Rightarrow \iint\limits_{S_1} R\,dx\,dy = \iint\limits_\Omega R(u,v,\psi(u,v))\,du\,dv$

Аналог. $\iint\limits_{S_2} R(x,y,z)\,dx\,dy = -\iint\limits_\Omega R(u,v,\varphi(u,v))\,du\,dv$ (здесь $\cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{1+\varphi_u^2+\varphi_v^2}}$, т.к. $(\widehat{\vec{n},\vec{k}}) > \frac{\pi}{2}$)

$\iint\limits_{S_3} R(x,y,z)\,dx\,dy = 0$, т.к. $\cos\gamma = 0$. Лемма доказана.

Формула Остроградского-Гаусса

Опр. $\varphi(x,y), \psi(x,y) \in C_1$ в Ω, $\varphi(x,y) \le \psi(x,y)$ $\forall (x,y) \in \Omega$



$G \equiv \{(x,y,z): (x,y)\in\Omega,\ \varphi(x,y)\le z\le\psi(x,y)\}$ —

замкн. элем. обл. относ. Oz.

Аналогично опред. замкн. элем. обл. относ. Ox, относ. Oy (дать опред. самост.)

Л1. G - замкн. элем. обл. отн. Oz. $R(x,y,z)$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ непр. в G (по G). $\Rightarrow \iiint\limits_G \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \oiint\limits_{\partial G} R(x,y,z)\,dx\,dy$

Самостоят. д-ть ещё 2 леммы:

Л2. G - замкн. элем. обл. отн. Ox. $P(x,y,z)$, $\frac{\partial P}{\partial x}$ непр. в G (по G). Тогда

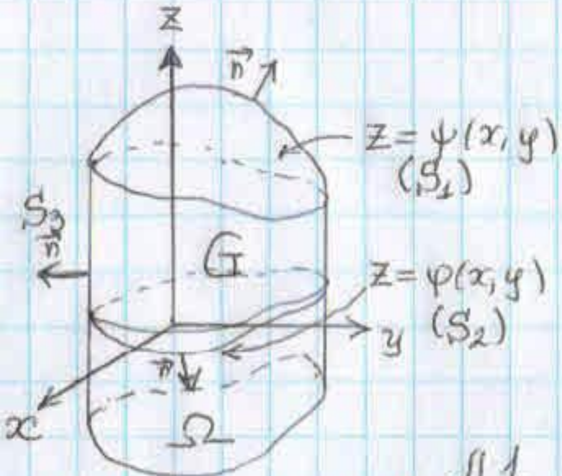
$$\iiint\limits_G \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \oiint\limits_{\partial G} P(x,y,z)\,dy\,dz$$

Л3. G - замкн. элем. обл. отн. Oy. $Q(x,y,z)$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ непр. в G (по G). Тогда

$$\iiint\limits_G \frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\,dy\,dz = \oiint\limits_{\partial G} Q(x,y,z)\,dz\,dx$$

Формула Остроградского-Гаусса

Опр. $\varphi(x,y), \psi(x,y) \in C_1$ в Ω, $\varphi(x,y) \le \psi(x,y)$ $\forall (x,y) \in \Omega$



$G \equiv \{(x,y,z): (x,y) \in \Omega,\ \varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y)\}$ — замкн. элем. обл относ. Oz.

Аналогично опред. замкн. элем. обл. относ. Ox, относ. Oy (дать опред. самост.)

Л1. G - замкн. элем. обл. отн. Oz. $R(x,y,z)$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ непр. в G (по G). $\Rightarrow$ $\iiint\limits_G \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \oiint\limits_{\partial G} R(x,y,z)\,dx\,dy$

Л2. G - замкн. элем. обл. отн. Ox. $P(x,y,z)$, $\frac{\partial P}{\partial x}$ непр. в G (по G). Тогда

$$\iiint\limits_G \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \oiint\limits_{\partial G} P(x,y,z)\,dy\,dz$$

Л3. G - замкн. элем. обл. отн. Oy. $Q(x,y,z)$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ непр. в G (по G). Тогда

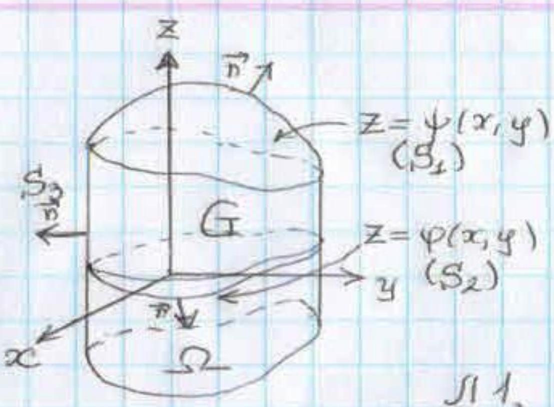
$$\iiint\limits_G \frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\,dy\,dz = \oiint\limits_{\partial G} Q(x,y,z)\,dz\,dx$$

Сл. G - замкн. элем. обл. отн. Ox, Oy, Oz. $P, Q, R, \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ непр. в G (по G)

$$\Rightarrow \iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \oiint\limits_{\partial G} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy$$

Формула Остроградского-Гаусса

Опр. $\varphi(x,y), \psi(x,y) \in C_1$ в Ω, $\varphi(x,y) \le \psi(x,y)$ $\forall (x,y) \in \Omega$



$G \equiv \{(x,y,z): (x,y) \in \Omega, \varphi(x,y) \le z \le \psi(x,y)\}$ – замкн. элем. обл. относ. Oz.

Аналогично опред. замкн. элем. обл. относ. Ox, относ. Oy (дать опред. самост.)

Л1. G - замкн. элем. обл. отн. Oz. $R(x,y,z)$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ непр. в G (по G). $\Rightarrow \iiint\limits_G \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\partial G} R(x,y,z)\,dx\,dy$

Л2. G - замкн. элем. обл. отн. Ox. $P(x,y,z)$, $\frac{\partial P}{\partial x}$ непр. в G (по G). Тогда

$$\iiint\limits_G \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\partial G} P(x,y,z)\,dy\,dz$$

Л3. G - замкн. элем. обл. отн. Oy, $Q(x,y,z)$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ непр. в G (по G). Тогда

$$\iiint\limits_G \frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\partial G} Q(x,y,z)\,dz\,dx$$

Сл. G - замкн. элем. обл. отн. Ox, Oy, Oz. $P, Q, R, \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ непр. в G (по G)

$$\Rightarrow \iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\partial G} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy$$

Т (Остроgр.-Гаусс). G - замкн. обл. с кус.-гл. границей, $G = \bigcup\limits_{k=1}^{n} G_k$, $\mu(G_i \cap G_j) = 0$ $(i \ne j)$, G_k - замкн. элем. обл. отн. Ox, Oy, Oz. $P, Q, R, \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ непр. в G (по G). $\Rightarrow \iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \iint\limits_{\partial G} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy$

Сл. G-замкн. элем. обл. отн. Ox, Oy, Oz. $P, Q, R, \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ непр. в G (по G)

$$\Rightarrow \iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz = \oiint\limits_{\partial G} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$$

Т (Острогр. - Гаусс). G-замкн. обл. с кус.-гл. границей, $G=\bigcup\limits_{k=1}^{n} G_k$,

$\mu(G_i \cap G_j)=0$ $(i \neq j)$, G_k-замкн. элем. обл. отн. Ox, Oy, Oz. $P, Q, R, \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$

непр. в G (по G). $\Rightarrow \iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz = \oiint\limits_{\partial G} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy$

Д-во. $\iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz = \sum\limits_{k=1}^{n} \iiint\limits_{G_k} \left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dxdydz =$

$$= \sum_{k=1}^{n} \oiint\limits_{\partial G_k} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy = \oiint\limits_{\partial G} Pdydz+Qdzdx+Rdxdy,$$

т.к. пов-ые инт-лы 2-го рода по общим частям ∂G_k взаимно уничтож.

Т. доказана.

Формула называется ф-ла Остр.-Гаусса

$\underline{\text{I}}$ (Остроград.-Гаусс). G - замкн. обл. с кус.-гл. границей, $G = \bigcup_{k=1}^{n} G_k$,

$\mu(G_i \cap G_j) = 0$ $(i \neq j)$, G_k - замкн. элем. обл. отн. Ox, Oy, Oz. $P, Q, R, \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$

непр. в G (по G). $\Rightarrow \iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \oiint\limits_{\partial G} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy$

$$\mu(G) = \iiint\limits_G dx\,dy\,dz = \oiint\limits_{\partial G} x\,dy\,dz = \oiint\limits_{\partial G} y\,dz\,dx = \oiint\limits_{\partial G} z\,dx\,dy = \frac{1}{3} \oiint\limits_{\partial G} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$$

$$\mu(G) = \iiint_G dx\,dy\,dz = \oiint_{\partial G} x\,dy\,dz = \oiint_{\partial G} y\,dz\,dx = \oiint_{\partial G} z\,dx\,dy = \frac{1}{3}\oiint_{\partial G} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$$

<u>Пример.</u> Объём шара. $G \equiv \{x^2+y^2+z^2 \leq R^2\}$ $\partial G = \{x^2+y^2+z^2 = R^2\}$

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0, \quad \vec{N} = \{x; y; z\}, \quad \vec{n} = \oplus\frac{\{x; y; z\}}{R} = \Big\{\underbrace{\frac{x}{R}}_{\cos\alpha}; \underbrace{\frac{y}{R}}_{\cos\beta}; \underbrace{\frac{z}{R}}_{\cos\gamma}\Big\}$$

$$\mu(G) = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} dx\,dy\,dz = \frac{1}{3}\oiint_{x^2+y^2+z^2=R^2} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy = \frac{1}{3}\oiint_{x^2+y^2+z^2=R^2}(x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,dS =$$

$$= \frac{1}{3}\oiint_{x^2+y^2+z^2=R^2}\left(\frac{x^2}{R} + \frac{y^2}{R} + \frac{z^2}{R}\right)dS = \frac{R}{3}\oiint_{x^2+y^2+z^2=R^2} dS = \frac{R}{3}\mu(\partial G) = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

$\underline{\text{T}}$ (Остогр.-Гаусс). G-замкн. обл. с кус.-гл. границей, $G = \bigcup_{k=1}^{n} G_k$,

$\mu(G_i \cap G_j) = 0$ $(i \neq j)$, G_k-замкн. элем. обл. отн. Ox, Oy, Oz. $P, Q, R, \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$

непр. в G (по G). $\Rightarrow \iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \oiint\limits_{\partial G} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy$

Д-во. $\iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \sum\limits_{k=1}^{n} \iiint\limits_{G_k} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz =$

$= \sum\limits_{k=1}^{n} \oiint\limits_{\partial G_k} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \oiint\limits_{\partial G} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy$,

т.к. пов-ые инт-лы 2-го рода по общим частям ∂G_k взаимно уничтож.

Т. доказана.

Формула называется ф-ла Остр.-Гаусса

Векторная формулировка. $\vec{a} = \{P, Q, R\} \in C_1$ в G, где G удовлетв.

условиям т. О-Г. Тогда $\iiint\limits_G \operatorname{div} \vec{a}\, dx\,dy\,dz = \oiint\limits_{\partial G} (\vec{a}, d\vec{S})$.

Т.к. $\vec{r} = \{x; y; z\}$, то ф-ла объёма: $\mu(G) = \frac{1}{3} \oiint\limits_{\partial G} (\vec{r}, d\vec{S})$

Формула Стокса

__Т.__ (Стокс). $S \equiv \{\vec{r} = \vec{r}(u,v),\ (u,v) \in \Omega\}$ – гл. пов-сть; $\vec{r}(u,v) \in C_2$ в Ω;

для Ω верна ф-ла Грина $\left(\oint\limits_{\partial\Omega} A\,du + B\,dv = \iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial B}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial v}\right) du\,dv \right)$; $\partial\Omega$ – один

кус.-гл. контур $\left(\partial\Omega \equiv \{u = u(t),\ v = v(t),\ t \in [a,b]\}\right)$; $\partial S = \{\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))\}$;

$\vec{n} = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$ – ориентация S (единичный норм. вектор), соглас. с обходом ∂S.

$P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z) \in C_1$ в $G \supset S$. Тогда

$$\oint\limits_{\partial S} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz = \iint\limits_{S} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS =$$

$$= \iint\limits_{S} \left\{ \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma \right\} dS.$$

$$\oint\limits_{\partial S} P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz=\iint\limits_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS=$$

$$=\iint\limits_S \left\{\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right\}dS.$$

Д-во. $\underline{\oint\limits_{\partial S} P(x,y,z)dx}=\int\limits_a^b P(x(u(t),v(t)),y(u(t),v(t)),z(u(t),v(t)))\left(\frac{\partial x}{\partial u}\dot{u}(t)+\frac{\partial x}{\partial v}\dot{v}(t)\right)dt=$

$x=x(u(t),v(t)),\ y=y(u(t),v(t)),\ z=z(u(t),v(t)),\ t\in[a,b]$

$$=\oint\limits_{\partial\Omega} P(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\left(\frac{\partial x}{\partial u}du+\frac{\partial x}{\partial v}dv\right)\overset{\text{Ф.Г.}}{=}\iint\limits_{\Omega}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(P\cdot\frac{\partial x}{\partial v}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(P\cdot\frac{\partial x}{\partial u}\right)\right\}dudv=$$

$$=\iint\limits_{\Omega}\left\{\left(\underline{\frac{\partial P}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial u}}+\frac{\partial P}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}+\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial u}\right)\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\underline{P\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}}-\left(\underline{\frac{\partial P}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}}+\frac{\partial P}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}+\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial x}{\partial u}-\underline{P\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial u\partial v}}\right\}dudv=$$

$$=\iint\limits_{\Omega}\left\{\frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{D(z,x)}{D(u,v)}-\frac{\partial P}{\partial y}\cdot\frac{D(x,y)}{D(u,v)}\right\}dudv=\iint\limits_S\frac{\partial P}{\partial z}dzdx-\iint\limits_S\frac{\partial P}{\partial y}dxdy=\underline{\iint\limits_S\left(\frac{\partial P}{\partial z}\cos\beta-\frac{\partial P}{\partial y}\cos\gamma\right)dS}$$

Аналогично: $\oint\limits_{\partial S} Q(x,y,z)dy=\iint\limits_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\cos\gamma-\frac{\partial Q}{\partial z}\cos\alpha\right)dS;\ \oint\limits_{\partial S} R(x,y,z)dz=\iint\limits_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}\cos\alpha-\frac{\partial R}{\partial x}\cos\beta\right)dS$

Складываем. Теор. доказана.

Формула Стокса

<u>Т.</u> (Стокс). $S \equiv \{\vec{r} = \vec{r}(u,v),\ (u,v) \in \Omega\}$ – гл. пов-ть; $\vec{r}(u,v) \in C_2$ в Ω;

для Ω верна ф-ла Грина $\left(\oint\limits_{\partial\Omega} A\,du + B\,dv = \iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial B}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial v}\right) du\,dv\right)$; $\partial\Omega$ – один

кус.-гл. контур $\left(\partial\Omega \equiv \{u = u(t),\ v = v(t),\ t \in [a,b]\}\right)$; $\partial S = \{\vec{r} = \vec{r}\,(u(t), v(t))\}$;

$\vec{n} = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$ – ориентация S (единичный норм. вектор), соглас. с обходом ∂S.

$P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z) \in C_1$ в $G \supset S$. Тогда

$$\oint\limits_{\partial S} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz = \iint\limits_{S} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS =$$

$$= \iint\limits_{S} \left\{ \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma \right\} dS.$$

Эта теорема верна и при более слабых предположениях.

Формула Стокса

Т. (Стокс). $S \equiv \{\vec{r} = \vec{r}(u,v),\ (u,v) \in \Omega\}$ – гл. пов-сть; $\vec{r}(u,v) \in C_2$ в Ω; для Ω верна ф-ла Грина $\left(\oint\limits_{\partial\Omega} A\,du + B\,dv = \iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial B}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial v}\right) du\,dv\right)$; $\partial\Omega$ – один кус.-гл. контур $(\partial\Omega \equiv \{u = u(t),\ v = v(t),\ t \in [a,b]\})$; $\partial S = \{\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))\}$; $\vec{n} = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$ – ориентация S (единичный норм. вектор), соглас. с обходом ∂S. $P(x,y,z),\ Q(x,y,z),\ R(x,y,z) \in C_1$ в $G \supset S$. Тогда

$$\oint\limits_{\partial S} P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)\,dy + R(x,y,z)\,dz = \iint\limits_{S} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS =$$

$$= \iint\limits_{S} \left\{ \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma \right\} dS.$$

Векторная формулировка формулы Стокса:

$$\vec{u} = \{P; Q; R\} \in C_1 \text{ в } G \supset S \Rightarrow \oint\limits_{\partial S} (\vec{u}, d\vec{r}) = \iint\limits_{S} (\operatorname{rot}\vec{u}, d\vec{S})$$

(проверить самостоятельно)

Формула Стокса

<u>Т.</u> (Стокс). $S \equiv \{\vec{r} = \vec{r}(u,v), (u,v) \in \Omega\}$ – гл. пов-сть; $\vec{r}(u,v) \in C_2$ в Ω;

для Ω верна ф-ла Грина $\left(\oint\limits_{\partial\Omega} A\,du + B\,dv = \iint\limits_{\Omega} \left(\frac{\partial B}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial v}\right) du\,dv\right)$; $\partial\Omega$ – один

кус.-гл. контур $\left(\partial\Omega \equiv \{u = u(t), v = v(t), t \in [a,b]\}\right)$; $\partial S = \{\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t))\}$;

$\vec{n} = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$ – ориентация S (единичный норм. вектор), соглас. с обходом ∂S.

$P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z) \in C_1$ в $G \supset S$. Тогда

$$\oint\limits_{\partial S} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \iint\limits_{S} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS =$$

$$= \iint\limits_{S} \left\{ \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma \right\} dS.$$

Векторная формулировка формулы Стокса:

$$\vec{u} = \{P; Q; R\} \in C_1 \text{ в } G \supset S \Rightarrow \oint\limits_{\partial S} (\vec{u}, d\vec{r}) = \iint\limits_{S} (\operatorname{rot}\vec{u}, d\vec{S})$$

(проверить самостоятельно)

$\int\limits_{AB} (\vec{u}, d\vec{r}) = \int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ – линейный интеграл $\qquad \oint\limits_{\Gamma} (\vec{u}, d\vec{r})$ – циркуляция