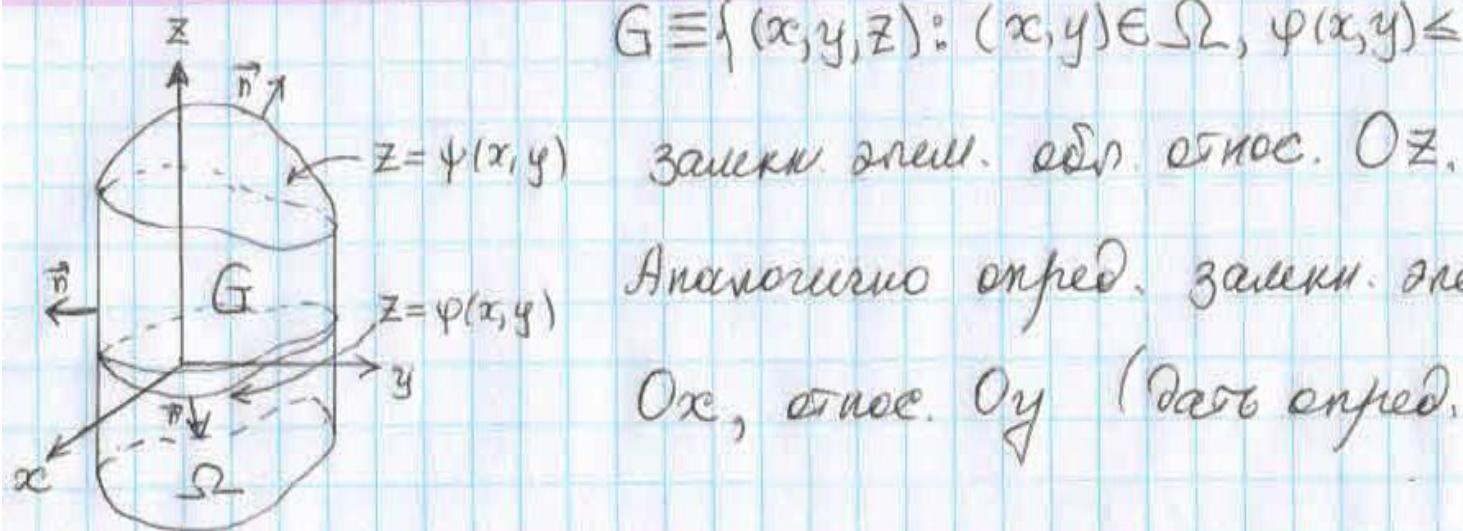


## Формула Острооградского-Гаусса

Оп.  $\varphi(x, y), \psi(x, y) \in C_1$  в  $\Omega$ ,  $\varphi(x, y) \leq \psi(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Omega$

$$G \equiv \{(x, y, z) : (x, y) \in \Omega, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\} -$$



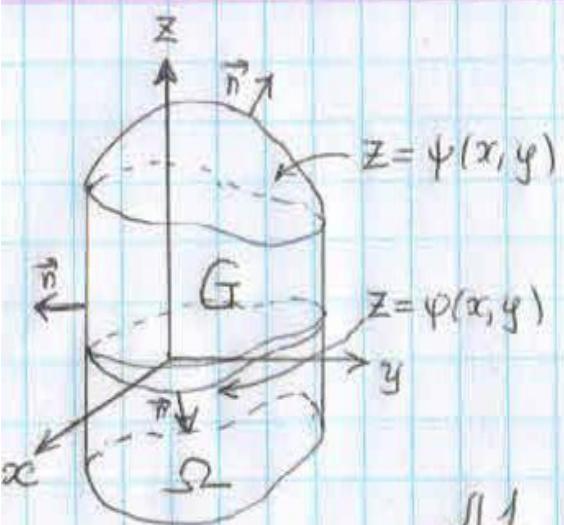
$z = \psi(x, y)$  замкн. зонд. одн. огнс. Oz.

Аналогично опред. замкн. зонд. одн. огнс.  
Ox, огнс. Oy (тако опред. самост.)

## Формула Остроградского-Гаусса

Оп.  $\varphi(x, y), \psi(x, y) \in C_1$  в  $\Omega$ ,  $\varphi(x, y) \leq \psi(x, y) \forall (x, y) \in \Omega$

$$G \equiv \{(x, y, z) : (x, y) \in \Omega, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\} -$$



$z = \psi(x, y)$  замкн. эллип. симм. относ. Oz.

Аналогично опред. замкн. эллип. симм. относ. Ox, относ. Oy (так как опред. симметр.)

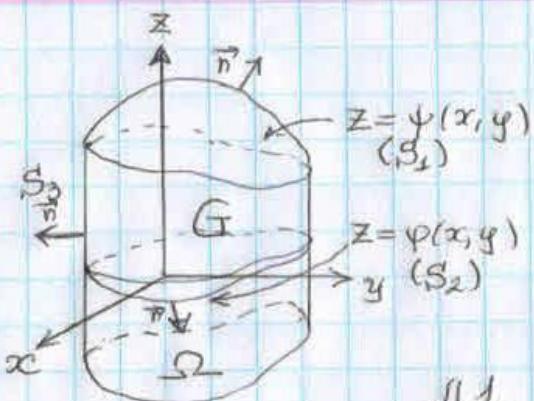
§11. G - замкн. эллип. симм. относ. Oz.  $R(x, y, z)$ ,  $\frac{\partial R}{\partial z}$  непр.

$$\text{б) } G(\text{но } G) \Rightarrow \iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\Omega} R(x, y, z) dx dy$$

## Формула Остrogрадского - Гаусса

Оп.  $\varphi(x, y), \psi(x, y) \in C_1$  в  $\Omega$ ,  $\varphi(x, y) \leq \psi(x, y) \forall (x, y) \in \Omega$

$$G = \{(x, y, z) : (x, y) \in \Omega, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\} -$$



замкн. эллип. симм. относ. Oz.

Аналогично опред. замкн. эллип. симм. относ. Oz, Ox, относ. Oy (так как опред. симметр.)

II. G - замкн. эллип. симм. относ. Oz. R(x, y, z),  $\frac{\partial R}{\partial z}$  непр.

$$\text{б) } G(\text{но } G) \Rightarrow \iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\partial G} R(x, y, z) dx dy$$

$$\text{Д-бо. } \iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\Omega} dx dy \iint_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \iint_{\Omega} R(x, y, \psi(x, y)) dx dy - \iint_{\Omega} R(x, y, \varphi(x, y)) dx dy$$

$$\iint_{\partial G} R dx dy = \iint_{S_1} + \iint_{S_2} + \iint_{S_3}. \quad \iint_{\Omega} R(x, y, z) dx dy = \iint_{S_1} R(x, y, z) \cos \gamma dS.$$

$$\begin{aligned} x &= u & \vec{r} &= \{u, v, \psi(u, v)\} \\ y &= v & \vec{r}_u &= \{1, 0, \psi_u\} \\ z &= \psi(u, v) & \vec{r}_v &= \{0, 1, \psi_v\} \end{aligned} \quad \vec{N} = [\vec{r}_u, \vec{r}_v] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \psi_u \\ 0 & 1 & \psi_v \end{vmatrix} = \{-\psi_u, -\psi_v, 1\} \quad \vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \frac{\{-\psi_u, -\psi_v, 1\}}{\sqrt{1+\psi_u^2+\psi_v^2}} \quad (\text{т.к. } (\vec{n}, \vec{k}) < \frac{\pi}{2})$$

$$\cos \gamma dS = \frac{1}{\sqrt{1+\psi_u^2+\psi_v^2}} \cdot \sqrt{1+\psi_u^2+\psi_v^2} du dv \Rightarrow \iint_{S_1} R dx dy = \iint_{\Omega} R(u, v, \psi(u, v)) du dv$$

$$\text{Аналог. } \iint_{S_2} R dx dy = - \iint_{\Omega} (R(u, v, \varphi(u, v))) du dv \quad (3 \text{деко } \cos \gamma = -\frac{1}{\sqrt{1+\psi_u^2+\psi_v^2}}, \text{ т.к. } (\vec{n}, \vec{k}) > \frac{\pi}{2})$$

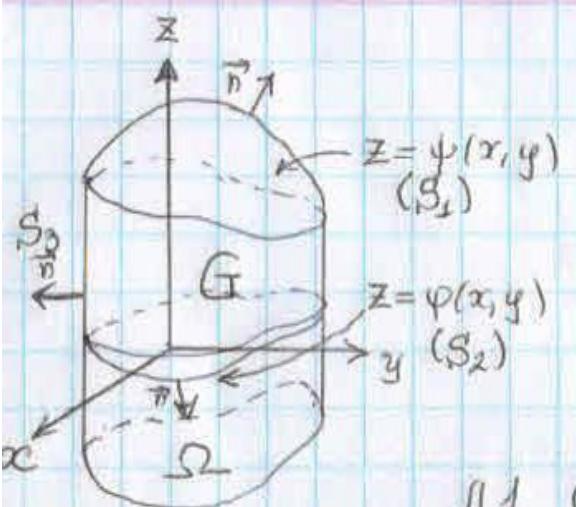
$$\iint_{S_3} R dx dy = 0, \text{ т.к. } \cos \gamma = 0.$$

Почти доказана.

## Формула Остrogрадского-Гаусса

Оп.  $\varphi(x, y), \psi(x, y) \in C_1$  в  $\Omega$ ,  $\varphi(x, y) \leq \psi(x, y) \forall (x, y) \in \Omega$

$$G \equiv \{(x, y, z) : (x, y) \in \Omega, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\} -$$



замкн. элек. обл. относ. Oz.

Аналогично опред. замкн. элек. обл. относ.  
Ox, относ. Oy (так как опред. самост.)

11. G - замкн. элек. обл. относ. Oz.  $R(x, y, z)$ ,  $\frac{\partial R}{\partial z}$  непр.

$$\oint\limits_G G(\text{no } G) \Rightarrow \iiint\limits_G \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint\limits_{\partial G} R(x, y, z) dx dy$$

Самост. 2-го вида 2-го рода:

12. G - замкн. элек. обл. относ. Oz.  $P(x, y, z)$ ,  $\frac{\partial P}{\partial x}$  непр. в G (no G). Тогда

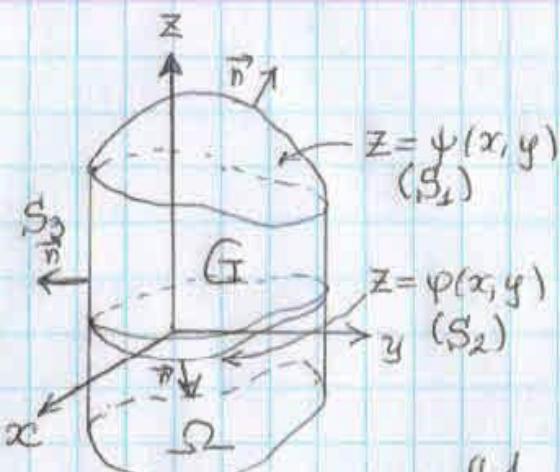
$$\iiint\limits_G \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \iint\limits_{\partial G} P(x, y, z) dy dz$$

13. G - замкн. элек. обл. относ. Oy.  $Q(x, y, z)$ ,  $\frac{\partial Q}{\partial y}$  непр. в G (no G). Тогда

$$\iiint\limits_G \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \iint\limits_{\partial G} Q(x, y, z) dz dx$$

## Формула Остроградского - Гаусса

Опред.  $\varphi(x, y), \psi(x, y) \in C_1$  в  $\Omega$ ,  $\varphi(x, y) \leq \psi(x, y) \forall (x, y) \in \Omega$



$$G \equiv \{(x, y, z) : (x, y) \in \Omega, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\} -$$

замкн. элек. обл. относ. Oz.

Аналогично опред. замкн. элек. обл. относ. Ox, Oy (такое опред. самоцр.)

11. G - замкн. элек. обл. относ. Oz.  $R(x, y, z), \frac{\partial R}{\partial z}$  непр.

$$\text{б} G(\text{no } G) \Rightarrow \iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\Omega} R(x, y, z) dx dy$$

12. G - замкн. элек. обл. относ. Ox.  $P(x, y, z), \frac{\partial P}{\partial x}$  непр. б G (no G). Тогда

$$\iiint_G \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \iint_{\Omega} P(x, y, z) dy dz$$

13. G - замкн. элек. обл. относ. Oy,  $Q(x, y, z), \frac{\partial Q}{\partial y}$  непр. б G (no G). Тогда

$$\iiint_G \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \iint_{\Omega} Q(x, y, z) dz dx$$

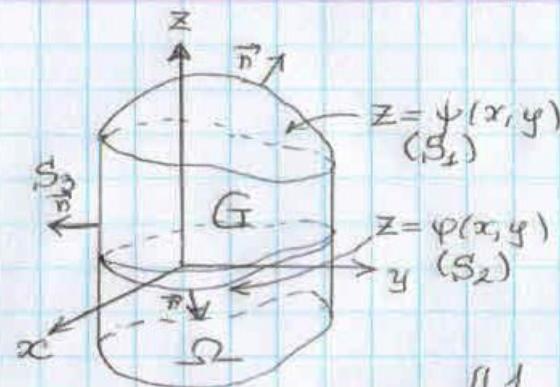
C1. G - замкн. элек. обл. относ. Ox, Oy, Oz.  $P, Q, R, \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$  непр. б G (no G)

$$\Rightarrow \iiint_G \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{\Omega} P dy dz + Q dz dx + R dx dy$$

## Формула Остроградского - Гаусса

Опред.  $\varphi(x, y), \psi(x, y) \in C_1$  в  $\Omega$ ,  $\varphi(x, y) \leq \psi(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Omega$

$$G \equiv \{(x, y, z) : (x, y) \in \Omega, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\} -$$



замкн. элекц. обл. относ. Oz.

Аналогично опред. замкн. элекц. обл. относ. Ox, Oy

(две опред. симметр.)

II 1. G - замкн. элекц. обл. относ. Oz. R(x, y, z),  $\frac{\partial R}{\partial z}$  непр.

$$\text{б} G(\text{no } G) \Rightarrow \iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\partial G} R(x, y, z) dy dz$$

II 2. G - замкн. элекц. обл. относ. Oz. P(x, y, z),  $\frac{\partial P}{\partial x}$  непр. б G (no G). Тогда

$$\iiint_G \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \iint_{\partial G} P(x, y, z) dy dz$$

II 3. G - замкн. элекц. обл. относ. Oy. Q(x, y, z),  $\frac{\partial Q}{\partial y}$  непр. б G (no G). Тогда

$$\iiint_G \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \iint_{\partial G} Q(x, y, z) dz dx$$

CI. G - замкн. элекц. обл. относ. Ox, Oy, Oz. P, Q, R,  $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$  непр. б G (no G)

$$\Rightarrow \iiint_G \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{\partial G} P dy dz + Q dz dx + R dx dy$$

Т (Острогр. - Гаусс). G - замкн. обл. с кус.-зн. границами,  $G = \bigcup_{k=1}^n G_k$ ,

$M(G_i \cap G_j) = 0$  ( $i \neq j$ ),  $G_k$  - замкн. элекц. обл. относ. Oz, Oy, Ox.  $P, Q, R, \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$  непр. б G (no G),  $\Rightarrow \iiint_G \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{\partial G} P dy dz + Q dz dx + R dx dy$

C1. G-зашки. знев. одн. осн. Ox, Oy, Oz. P, Q, R,  $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$  ненр. б Г (no G)

$$\Rightarrow \iiint_G \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{\partial G} P dy dz + Q dz dx + R dx dy$$

T (Ostrogor.-Гаусс). G-зашки. одн. с кус.-нн. границами,  $G = \bigcup_{k=1}^n G_k$ ,

$\mu(G_i \cap G_j) = 0$  ( $i \neq j$ ),  $G_k$ -зашки. знев. одн. осн. Ox, Oy, Oz. P, Q, R,  $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$

ненр. б Г (no G),  $\Rightarrow \iiint_G \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{\partial G} P dy dz + Q dz dx + R dx dy$

D-Б.  $\iiint_G \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \sum_{k=1}^n \iiint_{G_k} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz =$

$$= \sum_{k=1}^n \iint_{\partial G_k} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iint_{\partial G} P dy dz + Q dz dx + R dx dy,$$

т.к. неб. все кус.-нн 2-го рода по одному на каждой  $\partial G_k$  входят в контур.

Т. доказана.

Формула называется сп-на Ост. -Гаусса

$\Gamma$  (Остров.-Гаусс).  $G$ -зашкн. обл. с крив.-изог. границами,  $G = \bigcup_{k=1}^n G_k$ ,

$M(G_i \cap G_j) = 0$  ( $i \neq j$ ),  $G_k$ -зашкн. зону. обл. осям.  $Ox, Oy, Oz$ .  $P, Q, R, \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$

т.е.  $\oint_G (Pdx + Qdy + Rdz) = \iint_G \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \oint_{\partial G} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy$

$\mu(G) = \iint_G dxdydz = \oint_{\partial G} xdydz = \oint_{\partial G} ydzdx = \oint_{\partial G} zdxdy = \frac{1}{3} \oint_{\partial G} xdydz + ydzdx + zdxdy$

$$M(G) = \iiint_G dx dy dz = \oint_{\partial G} x dy dz - \oint_{\partial G} y dz dx + \oint_{\partial G} z dx dy = \frac{1}{3} \oint_{\partial G} x dy dz + y dz dx + z dx dy$$

Пример. Определить массу,  $G \equiv \{x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ ,  $\partial G \equiv \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$

$$xdx + ydy + zdz = 0, \vec{N} = \{x, y, z\}, \vec{n} = \frac{\{x, y, z\}}{R} = \left\{ \frac{x}{R}, \frac{y}{R}, \frac{z}{R} \right\}$$

$\cos\alpha \quad \cos\beta \quad \cos\gamma$

$$M(G) = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} dx dy dz = \frac{1}{3} \oint_{x^2+y^2+z^2=R^2} x dy dz + y dz dx + z dx dy = \frac{1}{3} \oint_{x^2+y^2+z^2=R^2} (x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma) dS =$$

$$= \frac{1}{3} \oint_{x^2+y^2+z^2=R^2} \left( \frac{x^2}{R} + \frac{y^2}{R} + \frac{z^2}{R} \right) dS = \frac{R}{3} \oint_{x^2+y^2+z^2=R^2} dS = \frac{R}{3} M(\partial G) = \frac{4\pi R^3}{3}$$

T (Ostrowsk. - Гаусс). G-замкн. обл. с кус.-нн. границей,  $G = \bigcup_{k=1}^n G_k$ ,

$\mu(G_i \cap G_j) = 0$  ( $i \neq j$ ),  $G_k$ -замкн. обл. орт. оси  $Ox, Oy, Oz$ .  $P, Q, R, \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$

т.е.  $\int \int \int (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}) dx dy dz = \oint \limits_{\partial G} P dy dz + Q dz dx + R dx dy$

Д-во.  $\int \int \int (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}) dx dy dz = \sum_{k=1}^n \int \int \int (\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}) dx dy dz =$

$= \sum_{k=1}^n \oint \limits_{\partial G_k} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \oint \limits_{\partial G} P dy dz + Q dz dx + R dx dy,$

т.к. люб. кус.-нн. 2-го рода не содержит частей  $\partial G_k$  в зоне нулястки.

Т. доказана.

Формула наименований по Остр. - Гаусса

Векторная формулировка.  $\vec{u} = \{P, Q, R\} \in C_1$ ,  $\text{если } G \text{ однород.}$

установлено T, D-Г, Тогда  $\int \int \int \text{div } \vec{u} dx dy dz = \oint \limits_{\partial G} (\vec{u}, d\vec{S}).$

Т.к.  $\vec{r} = \{x, y, z\}$ , то вектор однозначно:  $\mu(G) = \frac{1}{3} \oint \limits_{\partial G} (\vec{r}, d\vec{S})$

## Формула Стокса

T. (Стокс).  $S \equiv \{ \vec{r} = \vec{r}(u, v), (u, v) \in \Omega \}$  - zn. nob-ctb;  $\vec{r}(u, v) \in C_2 \cap \bar{\Omega}$ ;

для  $\Omega$  верна ф-ла Грина  $\oint_{\partial\Omega} Adu + Bdv = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial B}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial v} \right) du dv$ ;  $\partial\Omega$  - замкнутый кус.-zn. контур ( $\partial\Omega \equiv \{ u = u(t), v = v(t), t \in [a, b] \}$ );  $\partial S = \{ \vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t)) \}$ ;

$\vec{n} = \{ \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma \}$  - ориентация  $S$  (единичный норм. вектор), corner. с выходами  $\partial S$ .

$P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) \in C_1 \cap G \supset S$ . Тогда

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz &= \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS = \\ &= \iint_S \left\{ \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\beta + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\gamma \right\} dS. \end{aligned}$$

$$\oint_S P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS =$$

$$= \iint_S \left\{ \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\beta + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\gamma \right\} dS.$$

D-80.  $\oint_S P(x,y,z)dx = \int_a^b P(x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))) \left( \frac{\partial x}{\partial u} \dot{u}(t) + \frac{\partial x}{\partial v} \dot{v}(t) \right) dt =$   
 $x = x(u(t), v(t)), y = y(u(t), v(t)), z = z(u(t), v(t)), t \in [a, b]$

 $= \oint_{\Omega} P(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \left( \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) \stackrel{\text{ppr.}}{=} \iint_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} (P \cdot \frac{\partial x}{\partial v}) - \frac{\partial}{\partial v} (P \cdot \frac{\partial x}{\partial u}) \right\} du dv =$ 
 $= \iint_{\Omega} \left\{ \left( \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + P \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} - \left( \frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial x}{\partial u} - P \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} \right\} du dv =$ 
 $= \iint_{\Omega} \left\{ \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{D(z,x)}{D(u,v)} - \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \right\} du dv = \iint_S \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \iint_S \frac{\partial P}{\partial y} dy dx = \iint_S \left( \frac{\partial P}{\partial z} \cos\beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cos\gamma \right) dS$

аналогично:  $\oint_S Q(x,y,z)dy = \iint_S \left( \frac{\partial Q}{\partial x} \cos\gamma - \frac{\partial Q}{\partial z} \cos\alpha \right) dS; \oint_S R(x,y,z)dz = \iint_S \left( \frac{\partial R}{\partial y} \cos\alpha - \frac{\partial R}{\partial x} \cos\beta \right) dS$   
 Складни форми. Тип. Доказава.

## Формула Стокса

T. (Стокса).  $S \equiv \{ \vec{r} = \vec{r}(u, v), (u, v) \in \Omega \}$  - мн. поб-ст;  $\vec{r}(u, v) \in C_2 \text{ в } \Omega$ ;

для  $\Omega$  верна ф-ла Грина  $\oint_{\partial\Omega} Adu + Bdv = \iint_{\Omega} \left( \frac{\partial B}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial v} \right) du dv$ ;  $\partial\Omega$  - замкнутый контур

и  $\vec{n} = \{ \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma \}$  - единичный норм. вектор, совпад. с единичн.  $\partial S$ .

$P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) \in C_1 \text{ в } G \supset S$ . Тогда

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz &= \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS = \\ &= \iint_S \left\{ \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\beta + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\gamma \right\} dS. \end{aligned}$$

Эта теорема верна и при более слабых предположениях.

## Формула Стокса

T. (Стокс).  $S \equiv \{ \vec{r} = \vec{r}(u, v), (u, v) \in \Omega \}$  - вн. поб-ст;  $\vec{r}(u, v) \in C_2 \cap \Omega$ ;

для  $\Omega$  верна формула Грина ( $\oint_{\partial\Omega} Adu + Bdv = \iint_S \left( \frac{\partial B}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial v} \right) du dv$ );  $\partial\Omega$  - замкнутый кус.-vn. контур ( $\partial\Omega \equiv \{ u = u(t), v = v(t), t \in [a, b] \}$ );  $\partial S = \{ \vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t)) \}$ ;

$\vec{n} = \{ \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma \}$  - ориентация  $S$  (единичный норм. вектор), совпад. с единичной  $\partial S$ .

$P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) \in C_1 \cap G \supset S$ . Тогда

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz &= \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS = \\ &= \iint_S \left\{ \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\beta + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\gamma \right\} dS. \end{aligned}$$

Векторная формулировка формулы Стокса:

$$\vec{u} = \{ P; Q; R \} \in C_1 \cap G \supset S \Rightarrow \oint_{\partial S} (\vec{u}, d\vec{r}) = \iint_S (\text{rot } \vec{u}, d\vec{S})$$

(проверять самострангенно)

## Формула Стокса

T. (Стокс).  $S \equiv \{ \vec{r} = \vec{r}(u, v), (u, v) \in \Omega \}$  - ул. поб-ст;  $\vec{r}(u, v) \in C_2$  в  $\Omega$ ;

для  $\Omega$  берётся гр-ло граница ( $\oint_{\partial\Omega} Adu + Bdv = \iint_S (\frac{\partial B}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial v}) dudv$ );  $\partial\Omega$  - замкнутая кривая - ул. контур ( $\partial\Omega \equiv \{u = u(t), v = v(t), t \in [a, b]\}$ );  $\partial S = \{ \vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t)) \}$ ;  $\vec{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$  - ориентация  $S$  (единичный норм. вектор), соглас. с направлением  $\partial S$ .

$P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) \in C_1$  в  $G \supset S$ . Тогда

$$\begin{aligned} \oint_{\partial S} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz &= \iint_S \left| \begin{array}{ccc} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{array} \right| dS = \\ &= \iint_S \left\{ \left( \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left( \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\beta + \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\gamma \right\} dS. \end{aligned}$$

Векторная формулировка формулы Стокса:

$$\vec{u} = \{P; Q; R\} \in C_1 \text{ в } G \supset S \Rightarrow \oint_{\partial S} (\vec{u}, d\vec{r}) = \iint_S (\operatorname{rot} \vec{u}, d\vec{S})$$

(проверить самостоятельно)

$$\int_{AB} (\vec{u}, d\vec{r}) = \int_{AB} P dx + Q dy + R dz =$$

линейный  
интеграл

$\oint_{\Gamma} (\vec{u}, d\vec{r})$  - циркуляция