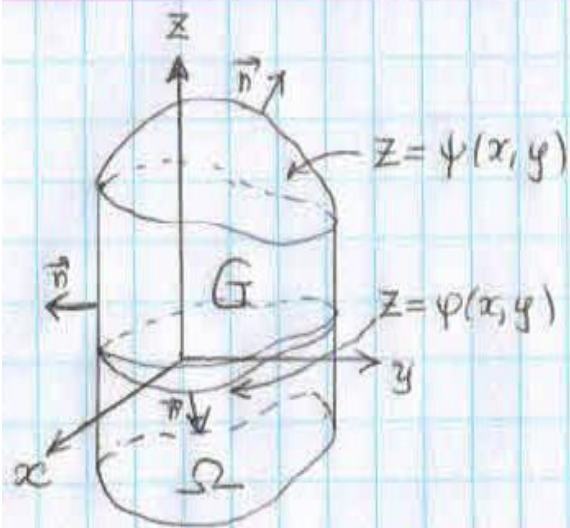


Формула Остроградского-Гаусса

Опр. $\varphi(x, y), \psi(x, y) \in C_1$ в Ω , $\varphi(x, y) \leq \psi(x, y) \forall (x, y) \in \Omega$



$$G \equiv \{ (x, y, z) : (x, y) \in \Omega, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y) \} -$$

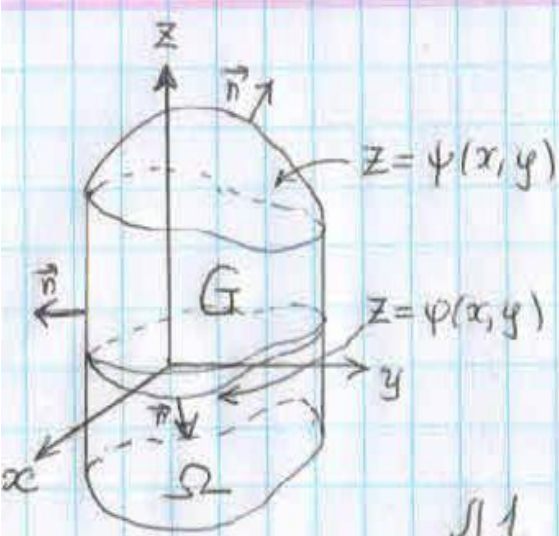
замкн. элем. обл. стнос. Oz.

Аналогично опред. замкн. элем. обл. стнос.

Ox, стнос. Oy (дать опред. самост.)

Формула Остроградского-Гаусса

Опр. $\varphi(x, y), \psi(x, y) \in C_1$ в Ω , $\varphi(x, y) \leq \psi(x, y) \forall (x, y) \in \Omega$



$G \equiv \{(x, y, z) : (x, y) \in \Omega, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$ -

замкн. элем. обл. относ. Oz .

Аналогично опред. замкн. элем. обл. относ.

Ox , относ. Oy (дать опред. самост.)

л1. G -замкн. элем. обл. отн. Oz . $R(x, y, z)$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ непрерыв.

$$\text{в } G \text{ (но } G \text{)}. \Rightarrow \iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \oint_{\partial G} R(x, y, z) dx dy$$

Формула Остроградского-Гаусса

Опр. $\varphi(x, y), \psi(x, y) \in C_1$ в Ω , $\varphi(x, y) \leq \psi(x, y) \forall (x, y) \in \Omega$

$G \equiv \{(x, y, z) : (x, y) \in \Omega, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$ -

замкн. элем. одн. откос. ОЗ.

Аналогично опред. замкн. элем. одн. откос.

Ох, откос. Оу (даже опред. самост.)

л. 1. G - замкн. элем. одн. отк. ОЗ. $R(x, y, z), \frac{\partial R}{\partial z}$ непр.

в G (но G). $\Rightarrow \iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\partial G} R(x, y, z) dx dy$

Д-во. $\iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\Omega} dx dy \int_{\varphi(x, y)}^{\psi(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \iint_{\Omega} R(x, y, \psi(x, y)) dx dy - \iint_{\Omega} R(x, y, \varphi(x, y)) dx dy$

$\iint_{\partial G} R dx dy = \iint_{S_1} + \iint_{S_2} + \iint_{S_3}$. $\iint_{S_1} R(x, y, z) dx dy = \iint_{S_1} R(x, y, z) \cos \gamma dS$

$x = u$ $\vec{r} = \{u, v, \psi(u, v)\}$
 $y = v$ $\vec{r}_u = \{1, 0, \psi_u\}$
 $z = \psi(u, v)$ $\vec{r}_v = \{0, 1, \psi_v\}$

$$\vec{N} = [\vec{r}_u, \vec{r}_v] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & \psi_u \\ 0 & 1 & \psi_v \end{vmatrix} = \{-\psi_u, -\psi_v, 1\}$$

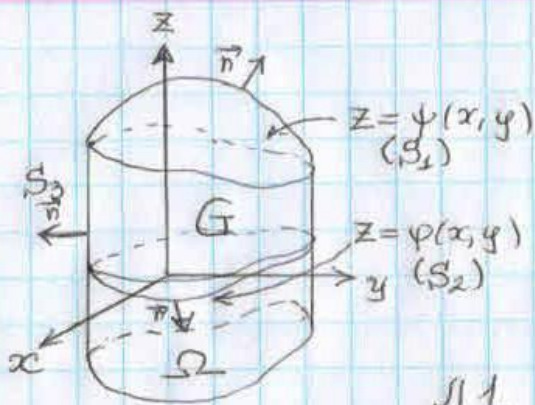
$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{|\vec{N}|} = \frac{\{-\psi_u, -\psi_v, 1\}}{\sqrt{1 + \psi_u^2 + \psi_v^2}}$$

(т.к. $(\vec{n}, \vec{k}) < \frac{\pi}{2}$)

$\cos \gamma dS = \frac{1}{\sqrt{1 + \psi_u^2 + \psi_v^2}} \cdot \sqrt{1 + \psi_u^2 + \psi_v^2} du dv \Rightarrow \iint_{S_1} R dx dy = \iint_{\Omega} R(u, v, \psi(u, v)) du dv$

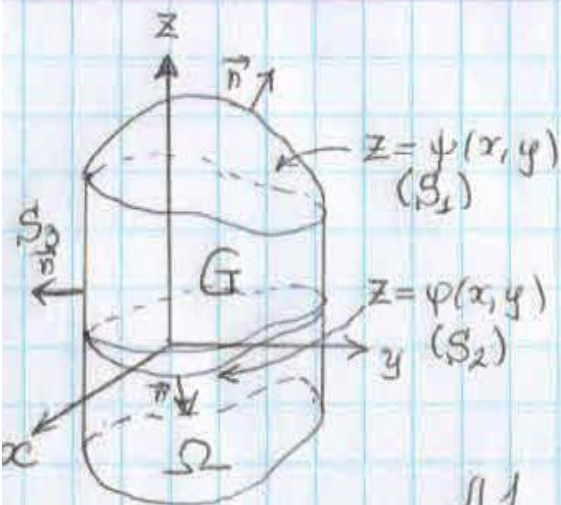
Аналог. $\iint_{S_2} R(x, y, z) dx dy = - \iint_{\Omega} R(u, v, \varphi(u, v)) du dv$ (здесь $\cos \gamma = -\frac{1}{\sqrt{1 + \psi_u^2 + \psi_v^2}}$, т.к. $(\vec{n}, \vec{k}) > \frac{\pi}{2}$)

$\iint_{S_3} R(x, y, z) dx dy = 0$, т.к. $\cos \gamma = 0$. Лемма доказана.



Формула Остроградского-Гаусса

Опр. $\varphi(x, y), \psi(x, y) \in C_1$ в Ω , $\varphi(x, y) \leq \psi(x, y) \forall (x, y) \in \Omega$



$$G \equiv \{(x, y, z) : (x, y) \in \Omega, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\} -$$

замкн. элем. одн. стнос. Oz .

Аналогично опред. замкн. элем. одн. стнос.

Ox , стнос. Oy (дасть опред. самост.)

л1. G -замкн. элем. одн. стн. Oz . $R(x, y, z)$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ непрерыв.

$$\text{в } G (\text{но } G) \Rightarrow \iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\partial G} R(x, y, z) dx dy$$

Самост. выт. ∂ -ть еще 2 элемента:

л2. G -замкн. элем. одн. стн. Ox . $P(x, y, z)$, $\frac{\partial P}{\partial x}$ непрерыв. в G (но G). Тогда

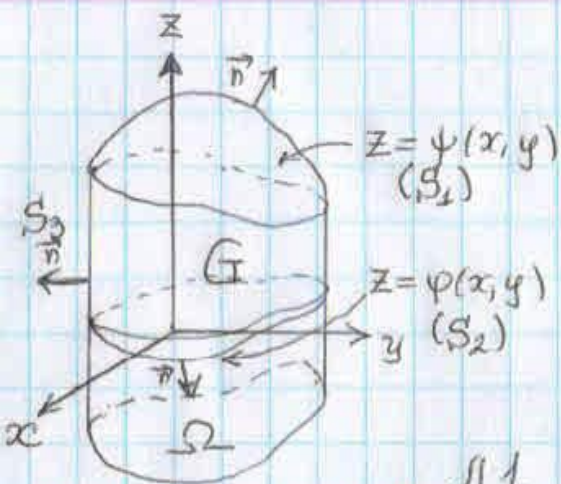
$$\iiint_G \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \iint_{\partial G} P(x, y, z) dy dz$$

л3. G -замкн. элем. одн. стн. Oy . $Q(x, y, z)$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ непрерыв. в G (но G). Тогда

$$\iiint_G \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \iint_{\partial G} Q(x, y, z) dz dx$$

Формула Остроградского-Гаусса

Опр. $\varphi(x, y), \psi(x, y) \in C_1$ в Ω , $\varphi(x, y) \leq \psi(x, y) \forall (x, y) \in \Omega$



$G \equiv \{(x, y, z) : (x, y) \in \Omega, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\}$ -

замкн. элем. одн. оснос. Oz .

Аналогично опред. замкн. элем. одн. оснос.

Ox , оснос. Oy (даже опред. самост.)

л1. G -замкн. элем. одн. осн. Oz . $R(x, y, z), \frac{\partial R}{\partial z}$ непрерыв.

$$\text{в } G \text{ (но } G \text{)}. \Rightarrow \iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\partial G} R(x, y, z) dx dy$$

л2. G -замкн. элем. одн. осн. Ox . $P(x, y, z), \frac{\partial P}{\partial x}$ непрерыв. в G (но G). Тогда

$$\iiint_G \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \iint_{\partial G} P(x, y, z) dy dz$$

л3. G -замкн. элем. одн. осн. Oy . $Q(x, y, z), \frac{\partial Q}{\partial y}$ непрерыв. в G (но G). Тогда

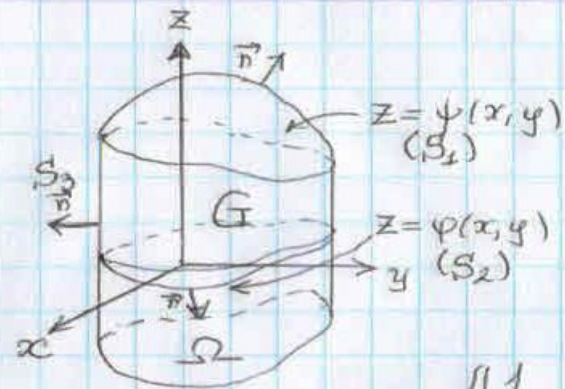
$$\iiint_G \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \iint_{\partial G} Q(x, y, z) dz dx$$

Сл. G -замкн. элем. одн. осн. Ox, Oy, Oz . $P, Q, R, \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ непрерыв. в G (но G)

$$\Rightarrow \iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{\partial G} P dy dz + Q dz dx + R dx dy$$

Формула Остроградского-Гаусса

Опр. $\varphi(x, y), \psi(x, y) \in C_1$ в Ω , $\varphi(x, y) \leq \psi(x, y) \forall (x, y) \in \Omega$



$$G \equiv \{(x, y, z) : (x, y) \in \Omega, \varphi(x, y) \leq z \leq \psi(x, y)\} -$$

замкн. элем. одн. стнос. Oz ,

Аналогично опред. замкн. элем. одн. стнос.

Ox , стнос. Oy (дальше опред. самост.)

л1. G -замкн. элем. одн. стн. Oz . $R(x, y, z)$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ непрерыв.

$$\text{в } G \text{ (но } G). \Rightarrow \iiint_G \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\partial G} R(x, y, z) dx dy$$

л2. G -замкн. элем. одн. стн. Ox . $P(x, y, z)$, $\frac{\partial P}{\partial x}$ непрерыв. в G (но G). Тогда

$$\iiint_G \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \iint_{\partial G} P(x, y, z) dy dz$$

л3. G -замкн. элем. одн. стн. Oy . $Q(x, y, z)$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$ непрерыв. в G (но G). Тогда

$$\iiint_G \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \iint_{\partial G} Q(x, y, z) dz dx$$

Сл. G -замкн. элем. одн. стн. Ox, Oy, Oz . P, Q, R , $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ непрерыв. в G (но G)

$$\Rightarrow \iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{\partial G} P dy dz + Q dz dx + R dx dy$$

Т (Острогр.-Гаусс). G -замкн. одн. с кус.-зн. границей, $G = \bigcup_{k=1}^n G_k$,

$M(G_i \cap G_j) = 0$ ($i \neq j$), G_k -замкн. элем. одн. стн. Ox, Oy, Oz . $P, Q, R, \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$

$$\text{непр. в } G \text{ (но } G), \Rightarrow \iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{\partial G} P dy dz + Q dz dx + R dx dy$$

Сл. G -замкн. элев. одн. одн. Ox, Oy, Oz . $P, Q, R, \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ непрерыв. в G (но G)

$$\Rightarrow \iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{\partial G} P dy dz + Q dz dx + R dx dy$$

Т (Острогр. - Гаусс). G -замкн. одн. с крив.-ли. поверхнью, $G = \bigcup_{k=1}^n G_k$,

$\mu(G_i \cap G_j) = 0$ ($i \neq j$), G_k -замкн. элев. одн. одн. Ox, Oy, Oz . $P, Q, R, \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$

непр. в G (но G), $\Rightarrow \iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \iint_{\partial G} P dy dz + Q dz dx + R dx dy$

$$\text{Д-во. } \iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \sum_{k=1}^n \iiint_{G_k} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz =$$

$$= \sum_{k=1}^n \iint_{\partial G_k} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \iint_{\partial G} P dy dz + Q dz dx + R dx dy,$$

Т.к. пов-е все крив.-ли 2-го рода по одному разу для ∂G_k взяты по направлению.

Т. доказана.

Формула называется ф-ла Острогр. - Гаусса

T (Открыт. - Гайсс). G -замкн. одн. с кр.-зн. границей, $G = \bigcup_{k=1}^n G_k$,

$M(G_i \cap G_j) = 0$ ($i \neq j$), G_k -замкн. одн. одн. осн. Ox, Oy, Oz . $P, Q, R, \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$

непр. в G (но G), $\Rightarrow \iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \oiint_{\partial G} P dy dz + Q dz dx + R dx dy$

$$\mu(G) = \iiint_G dx dy dz = \oiint_{\partial G} x dy dz = \oiint_{\partial G} y dz dx = \oiint_{\partial G} z dx dy = \frac{1}{3} \oiint_{\partial G} x dy dz + y dz dx + z dx dy$$

$$\mu(G) = \iiint_G dx dy dz = \oiint_{\partial G} x dy dz = \oiint_{\partial G} y dz dx = \oiint_{\partial G} z dx dy = \frac{1}{3} \oiint_{\partial G} x dy dz + y dz dx + z dx dy$$

Пример. Объем шара. $G \equiv \{x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$ $\partial G = \{x^2 + y^2 + z^2 = R^2\}$

$$x dx + y dy + z dz = 0, \vec{N} = \{x; y; z\}, \vec{n} = \oplus \frac{\{x; y; z\}}{R} = \left\{ \frac{x}{R}; \frac{y}{R}; \frac{z}{R} \right\}$$

$\cos \alpha \quad \cos \beta \quad \cos \gamma$

$$\mu(G) = \iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} dx dy dz = \frac{1}{3} \oiint_{x^2+y^2+z^2=R^2} x dy dz + y dz dx + z dx dy = \frac{1}{3} \oiint_{x^2+y^2+z^2=R^2} (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma) dS =$$

$$= \frac{1}{3} \oiint_{x^2+y^2+z^2=R^2} \left(\frac{x^2}{R} + \frac{y^2}{R} + \frac{z^2}{R} \right) dS = \frac{R}{3} \oiint_{x^2+y^2+z^2=R^2} dS = \frac{R}{3} \mu(\partial G) = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Т (Остроградский - Гаусс). G -замкнут. одн. с крив.-ли. границей, $G = \bigcup_{k=1}^n G_k$,

$\mu(G_i \cap G_j) = 0$ ($i \neq j$), G_k -замкнут. одн. одн. осн. Ox, Oy, Oz . $P, Q, R, \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$

непр. в G (но G), $\Rightarrow \iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \oint_{\partial G} P dy dz + Q dz dx + R dx dy$

Д-во. $\iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \sum_{k=1}^n \iiint_{G_k} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz =$

$= \sum_{k=1}^n \oint_{\partial G_k} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \oint_{\partial G} P dy dz + Q dz dx + R dx dy,$

Т.к. нек-рые из-ли 2-го рода по одному разу или ∂G_k взаимно уничтожатся.

Т. доказана.

Формула называется ф-ла Остроградского - Гаусса

Векторная формулировка. $\vec{u} = \{P, Q, R\} \in C_1$ в G , где G удовлетв.

условию Т, О-Т. Тогда $\iiint_G \operatorname{div} \vec{u} dx dy dz = \oint_{\partial G} (\vec{u}, d\vec{S}).$

Т.к. $\vec{r} = \{x, y, z\}$, то ф-ла объёма: $\mu(G) = \frac{1}{3} \oint_{\partial G} (\vec{r}, d\vec{S})$

Формула Стокса

Т. (Стокс). $S \equiv \{ \vec{r} = \vec{r}(u, v), (u, v) \in \Omega \}$ - ул. пов-сть; $\vec{r}(u, v) \in C_2$ в Ω ;

для Ω верна ф-ла Грина $\left(\oint_{\partial\Omega} Adu + Bdv = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial B}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial v} \right) dudv \right)$; $\partial\Omega$ - един

куч. - ул. контур $(\partial\Omega \equiv \{ u = u(t), v = v(t), t \in [a, b] \})$; $\partial S = \{ \vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t)) \}$;

$\vec{n} = \{ \cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma \}$ - ориентация S (единичный норм. вектор), соглас. с направл ∂S .

$P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) \in C_1$ в $G \supset S$. Тогда

$$\oint_{\partial S} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS =$$

$$= \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\gamma \right\} dS.$$

$$\oint_{\partial S} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS =$$

$$= \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right\} dS.$$

2-го. $\oint_{\partial S} P(x, y, z) dx = \int_a^b P(x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))) \left(\frac{\partial x}{\partial u} \dot{u}(t) + \frac{\partial x}{\partial v} \dot{v}(t) \right) dt =$

$$x = x(u(t), v(t)), \quad y = y(u(t), v(t)), \quad z = z(u(t), v(t)), \quad t \in [a, b]$$

$$= \oint_{\partial \Omega} P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \left(\frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) \stackrel{\text{ф. Г.}}{=} \iint_{\Omega} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(P \cdot \frac{\partial x}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(P \cdot \frac{\partial x}{\partial u} \right) \right\} dudv =$$

$$= \iint_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \right) \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + P \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} - \left(\frac{\partial P}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v} \right) \frac{\partial x}{\partial u} - P \cdot \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial u} \right\} dudv =$$

$$= \iint_{\Omega} \left\{ \frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{D(z, x)}{D(u, v)} - \frac{\partial P}{\partial y} \cdot \frac{D(x, y)}{D(u, v)} \right\} dudv = \iint_S \frac{\partial P}{\partial z} dz dx - \iint_S \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \iint_S \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos \beta - \frac{\partial P}{\partial y} \cos \gamma \right) dS$$

Аналогично: $\oint_{\partial S} Q(x, y, z) dy = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \cos \gamma - \frac{\partial Q}{\partial z} \cos \alpha \right) dS$; $\oint_{\partial S} R(x, y, z) dz = \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} \cos \alpha - \frac{\partial R}{\partial x} \cos \beta \right) dS$

Книжки вверху. Теор. доказательства.

Формула Стокса

Т. (Стокс). $S \equiv \{ \vec{r} = \vec{r}(u, v), (u, v) \in \Omega \}$ - н. пов-сть; $\vec{r}(u, v) \in C_2$ в Ω ;

для Ω верна ф-ла Грина $\left(\oint_{\partial \Omega} A du + B dv = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial B}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial v} \right) du dv \right)$; $\partial \Omega$ - ориент.

кус.-н. контур $(\partial \Omega \equiv \{ u = u(t), v = v(t), t \in [a, b] \})$; $\partial S = \{ \vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t)) \}$,

$\vec{n} = \{ \cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma \}$ - ориентация S (единичный норм. вектор), соглас. с ориентацией ∂S .

$P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) \in C_1$ в $G \supset S$. Тогда

$$\oint_{\partial S} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS =$$

$$= \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right\} dS.$$

Эта теорема верна и при более слабых предположениях.

Формула Стокса

Т. (Стокс). $S \equiv \{ \vec{r} = \vec{r}(u, v), (u, v) \in \Omega \}$ - уп. пов-сть; $\vec{r}(u, v) \in C_2$ в Ω ;

для Ω верна ф-ла Грина $\oint_{\partial\Omega} Adu + Bdv = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial B}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial v} \right) dudv$; $\partial\Omega$ - замкн

кус. - уп. контур $(\partial\Omega \equiv \{ u = u(t), v = v(t), t \in [a, b] \})$; $\partial S = \{ \vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t)) \}$;

$\vec{n} = \{ \cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma \}$ - ориентация S (единичный норм. вектор), соглас. с направл ∂S .

$P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) \in C_1$ в $G \supset S$. Тогда

$$\oint_{\partial S} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS =$$

$$= \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\gamma \right\} dS.$$

Векторная формулировка формулы Стокса:

$$\vec{u} = \{ P; Q; R \} \in C_1 \text{ в } G \supset S \Rightarrow \oint_{\partial S} (\vec{u}, d\vec{r}) = \iint_S (\text{rot } \vec{u}, d\vec{S})$$

(проверить самостоятельно)

Формула Стокса

Т. (Стокс). $S \equiv \{ \vec{r} = \vec{r}(u, v), (u, v) \in \Omega \}$ - н. пов-сть; $\vec{r}(u, v) \in C_2$ в Ω ;

для Ω верна ф-ла Грина $\left(\oint_{\partial\Omega} Adu + Bdv = \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial B}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial v} \right) dudv \right)$; $\partial\Omega$ - един

кус.-н. контур $(\partial\Omega \equiv \{ u = u(t), v = v(t), t \in [a, b] \})$; $\partial S = \{ \vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t)) \}$;

$\vec{n} = \{ \cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma \}$ - ориентация S (единичный норм. вектор), соглас. с направл. ∂S .

$P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z) \in C_1$ в $G \supset S$. Тогда

$$\oint_{\partial S} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS =$$

$$= \iint_S \left\{ \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos\gamma \right\} dS.$$

Векторная формулировка формулы Стокса:

$$\vec{u} = \{ P; Q; R \} \in C_1 \text{ в } G \supset S \Rightarrow \oint_{\partial S} (\vec{u}, d\vec{r}) = \iint_S (\text{rot } \vec{u}, d\vec{S})$$

(проверить самостоятелно)

$$\int_{\overline{AB}} (\vec{u}, d\vec{r}) = \int_{\overline{AB}} P dx + Q dy + R dz - \text{линейный интеграл} \quad \oint_{\Gamma} (\vec{u}, d\vec{r}) - \text{циркуляция}$$