Компьютерная арифметика

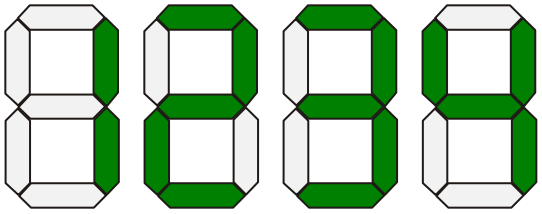
Компьютерная арифметика

§ 24. Особенности представления чисел в компьютере

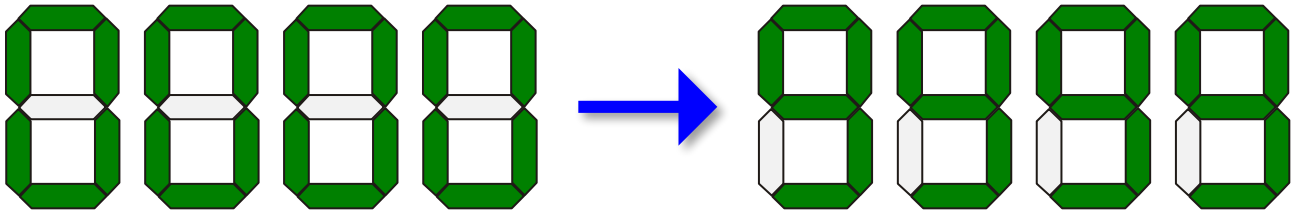
Предельные значения чисел

В математике ***нет*** предельных значений!

В компьютере – конечное число деталей, ограниченное количество разрядов.

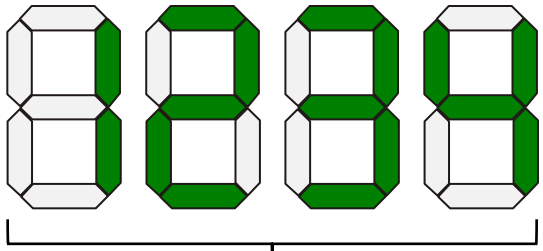


? Какой диапазон?



10000?

Предельные значения чисел



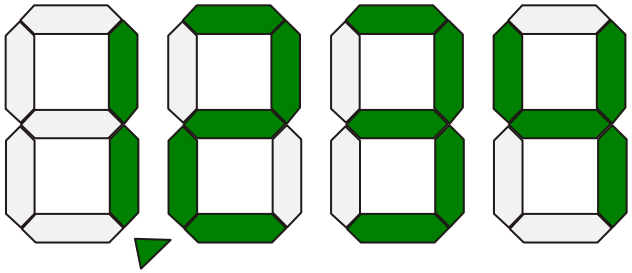
K разрядов

система счисления с основанием *B*

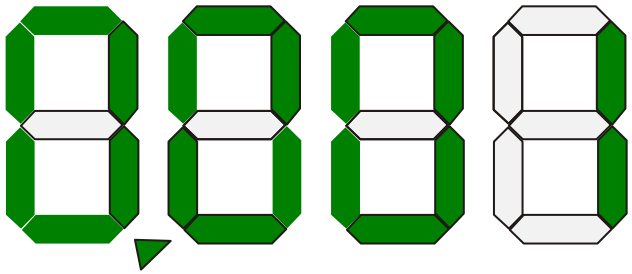
$$C_{\max} = B^K - 1$$

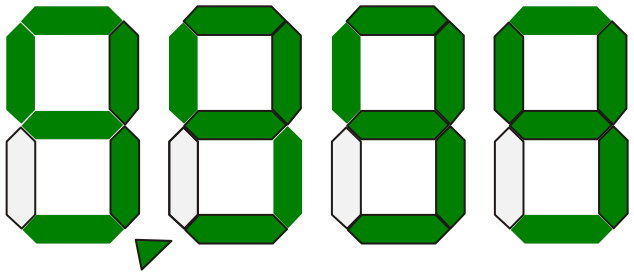
Переполнение разрядной сетки — это ситуация, когда число, которое требуется сохранить, не умещается в имеющемся количестве разрядов вычислительного устройства.

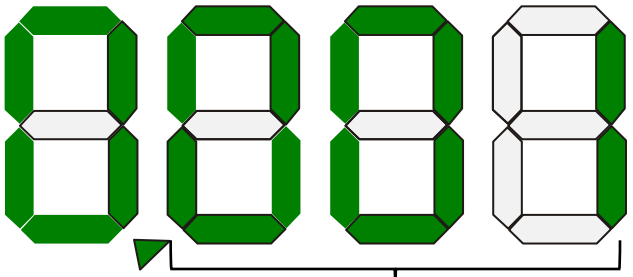
Вещественные числа



? Какой диапазон?





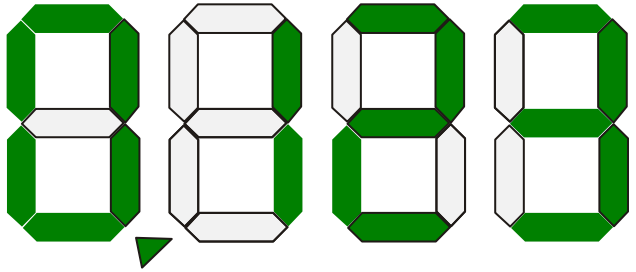


F разрядов в дробной части

система счисления с основанием *B*

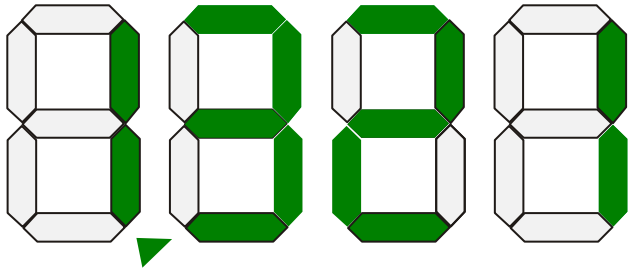
$$C_{\min} = B^{-F}$$

Неточность представления

0,12344567 → 

! Не все вещественные числа могут быть представлены в компьютере точно!

1,3211
1,3212
1,3214

→ 

Сравнение вещественных чисел

$X = 10^6, \quad Y = 10^{-6}$

хранится неточно!

$X \cdot Y \approx 1$

неточный результат!

$0{,}3 \approx 0{,}1 + 0{,}1 + 0{,}1$

! При сравнении вещественных чисел желательно избегать операции «равно»!

$X \cdot Y \approx 1 \rightarrow |1 - X \cdot Y| \le \varepsilon$

допустимая погрешность (10^{-6})

$X \approx Y \rightarrow |X - Y| \le \varepsilon$

Дискретность

1. Целые числа дискретны.
2. Вещественные числа непрерывны.
3. Компьютер работает только с дискретными данными.

Для хранения вещественных чисел нужна **дискретизация**!

4. При дискретизации может происходить потеря информации (искажение данных).
5. Большинство трудностей связано с кодированием вещественных чисел.

Компьютерная арифметика

§ 25. Хранение в памяти целых чисел

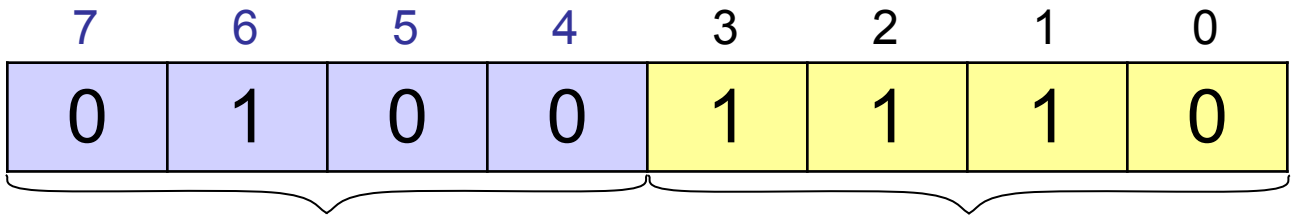
Целые числа без знака (*unsigned*)

Беззнаковые данные – не могут быть отрицательными.

78 = 1001110$_2$

старший

младший



старший полубайт
старшая цифра

младший полубайт
младшая цифра

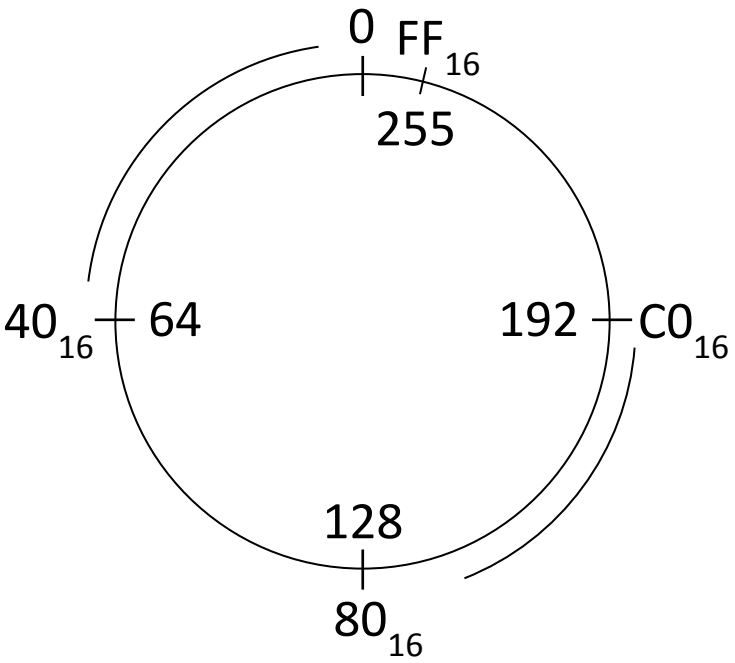
4_{16} **E_{16}**

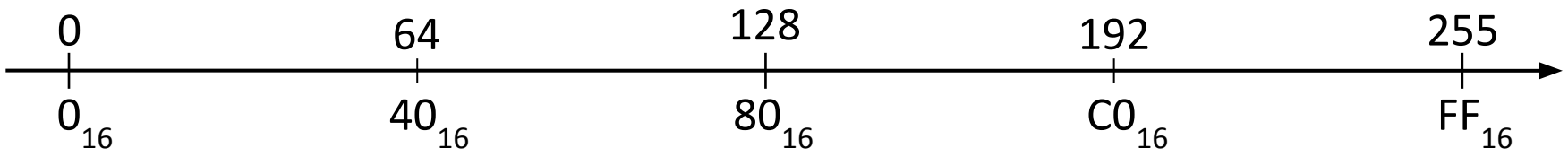
$1001110_2 = 4E_{16}$ = ‘N’

Целые числа без знака

X_{10}	0	1	…	127	128	…	255
X_{16}	00_{16}	01_{16}	…	$7F_{16}$	80_{16}	…	FF_{16}
X_2	$0000\ 0000_2$	$0000\ 0001_2$	…	$0111\ 1111_2$	$1000\ 0000_2$	…	$1111\ 1111_2$

```
   1111 1111
+  0000 0001
-------------
 1 0000 0000
```





Целые числа без знака: диапазон

$$X_{\max} = 2^K - 1$$

K	X_{min}	X_{max}	типы данных
8	0	255	**byte** (*Паскаль*) **unsigned char** (*Си*)
16	0	65 535	**word** (*Паскаль*) **unsigned short** (*Си*)
32	0	4 294 967 295	**cardinal** (*Delphi*) **unsigned int** (*Си*)
64	0	18 446 744 073 709 551 615	**unsigned long long** (*Си++*)

Целые числа со знаком

? Сколько места требуется для хранения знака?

Старший (знаковый) бит числа определяет его знак. Если он равен 0, число положительное, если 1, то отрицательное.

Прямой код:

≥ 0

78 = 1001110_2

0	1	0	0	1	1	1	0

– 78 = -1001110_2

1	1	0	0	1	1	1	0

< 0

операции с положительными и отрицательными числами выполняются по-разному!

Целые числа со знаком

Идея: «– 1» должно быть представлено так, чтобы при сложении с числом «1» получить 0.

Как кодируется «-1»?

```
   1111 1111    -1 → 255
+  0000 0001      1
-------------------------
 1 0000 0000    256
```

Для 8-битных чисел: код числа «–X» равен двоичному коду числа 256 – X (*дополнение* до 256).

При *K*-битном кодировании *дополнительный* код числа «–X» равен двоичному коду числа 2^K – X (*дополнение* до 2^K).

Как построить дополнительный код?

Алгоритм А0: перевести число $2^K - X$ в двоичную систему счисления.

для вычислений требуется *K+1* разряд

Алгоритм А1:

1) перевести число *X* в двоичную систему счисления;
2) построить *обратный код*, выполнив *инверсию* всех битов (заменить 0 на 1 и наоборот);
3) к результату добавить 1.

$$78 = 01001110_2$$
$$10110001 \leftarrow \text{инверсия}$$
$$-78 \rightarrow 10110010 \quad +1$$

Как построить дополнительный код?

Алгоритм А2:

1) перевести число *X-1* в двоичную систему счисления;
2) выполнить инверсию всех битов.

$$78 - 1 = 77 = 01001101_2$$
$$-78 \rightarrow 10110010 \leftarrow \text{инверсия}$$

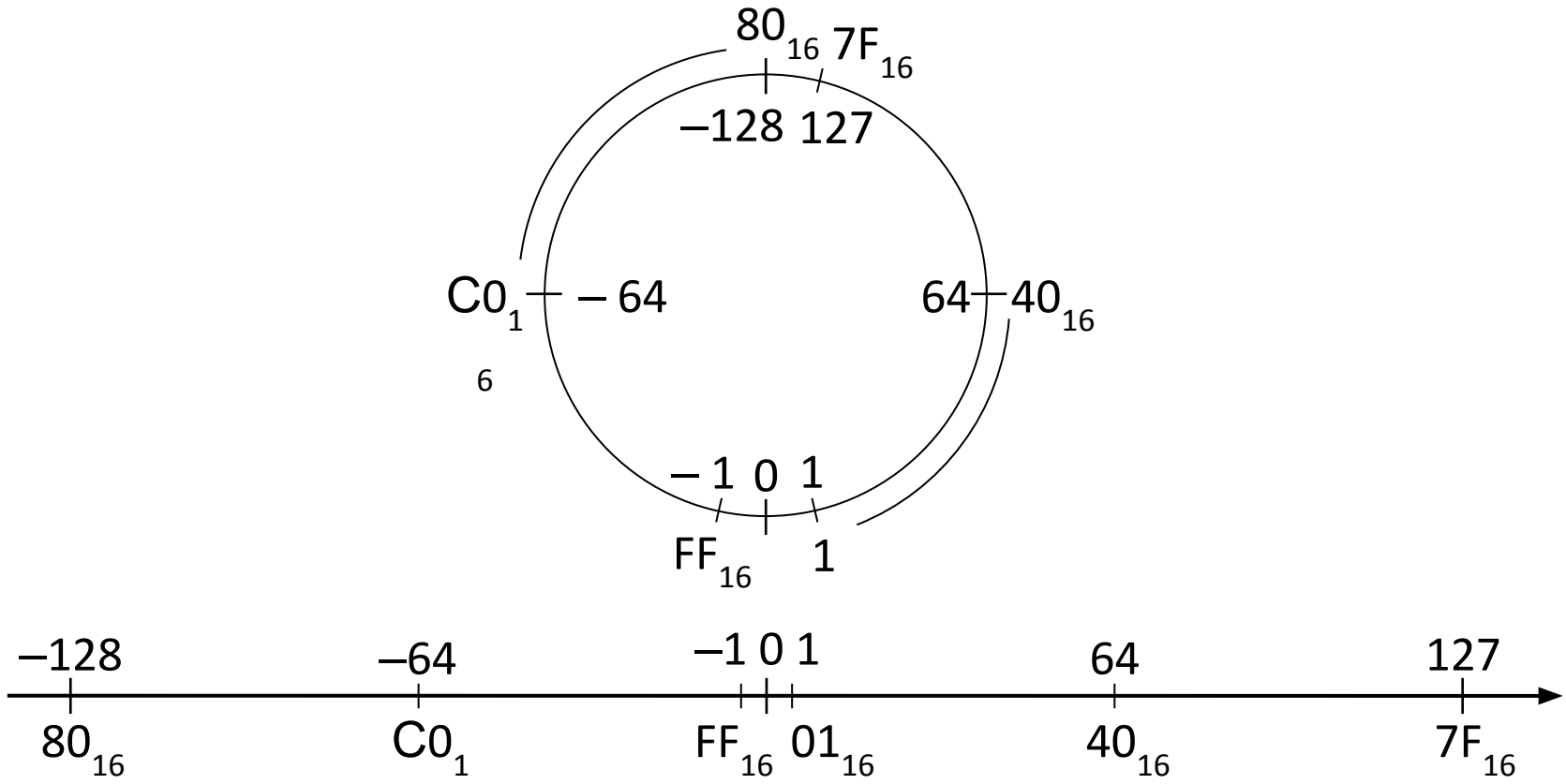
Алгоритм А3:

1) перевести число *X* в двоичную систему счисления;
2) выполнить инверсию всех старших битов числа, кроме младшей единицы и нулей после нее.

$$78 = 01001110_2$$
$$-78 \rightarrow 10110010 \leftarrow \text{инверсия}$$

Целые числа со знаком

X_{10}	–128	–127	…	–1	0	…	127
X_{16}	80_{16}	81_{16}	…	FF_{16}	00_{16}	…	$7F_{16}$
X_2	$1000\ 0000_2$	$1000\ 0001_2$	…	$1111\ 1111_2$	$0000\ 0000_2$	…	$0111\ 1111_2$



Целые числа со знаком: диапазон

$$X_{\min} = -2^{K-1} \rightarrow X_{\max} = 2^{K-1} - 1$$

K	X_{min}	X_{max}	типы данных
8	– 128	127	**shortInt** (*Delphi*) **char** (*Cи*)
16	– 32 768	32 767	**smallInt** (*Delphi*) **short** (*Cи*)
32	– 2 147 483 648	2 147 483 647	**integer** (*Delphi*) **int** (*Cи*)
64	-2^{63}	$2^{63}-1$	**int64** (*Delphi*) **long long** (*Cи*)

Компьютерная арифметика

§ 26. Операции с целыми числами

Сложение и вычитание

Операции с положительными и отрицательными числами выполняются по одинаковым алгоритмам!

```
  5          0000 0101
+ -9       + 1111 0111
-----      -----------
 -4    ←     1111 1100
```

Вычитание = сложение с дополнительным кодом вычитаемого!

Переполнение

дополнительный бит

```
  0 | 01100000      96
+ 0 | 00100001      33
-----------------------
  0 | 1000001    -127
  S'  S
```

знаковый бит

```
  1 | 10100000     -96
+ 1 | 11011111     -33
-----------------------
  1 | 0111111     127
  S'  S
```

Если бит S не совпадает с битом S', произошло переполнение и результат неверный.

Умножение

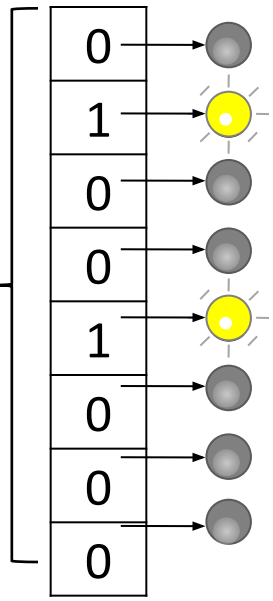
```
  × 00001001    9
    00000101    5
  ----------
    00001001
+ 00000000
  00001001
----------
  00000101101   →45
```

```
  × 11110111    -9
    00000101    5
  ----------
    11110111
+ 00000000
  11110111
----------
  10011010011   →-45
```

Умножение выполняется с помощью сложения и сдвига.

Поразрядные логические операции

Поразрядные операции выполняются с отдельными битами числа и не влияют на остальные.



? Сложение – это поразрядная операция?

Операция «НЕ» (инверсия, not):

R	1	0	0	1	1	0	1	0
not R	0	1	1	0	0	1	0	1

Логическая операция «И» (and, &)

данные маска

D	M	D and M
0	0	0
1	0	0
0	1	0
1	1	1

Маска – константа, которая определяет область применения логической операции к битам многоразрядного числа.

AA_{16} and $6C_{16}$ = ?

	7	6	5	4	3	2	1	0	
D	1	0	1	0	1	0	1	0	AA_{16}
M	0	1	1	0	1	1	0	0	$6C_{16}$
D and M	0	0	1	0	1	0	0	0	28_{16}

С помощью операции «И» можно сбросить (установить в ноль) биты, для которых маска равна 0!

Логическая операция «ИЛИ» (or, |)

D	M	D or M
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	1

AA_{16} or $6C_{16}$ = ?

	7	6	5	4	3	2	1	0	
D	1	0	1	0	1	0	1	0	AA_{16}
M	0	1	1	0	1	1	0	0	$6C_{16}$
D or M	1	1	1	0	1	1	1	0	EE_{16}

С помощью операции «ИЛИ» можно записать единицу в биты, для которых маска равна 1!

Операция «исключающее ИЛИ» (xor, ^)

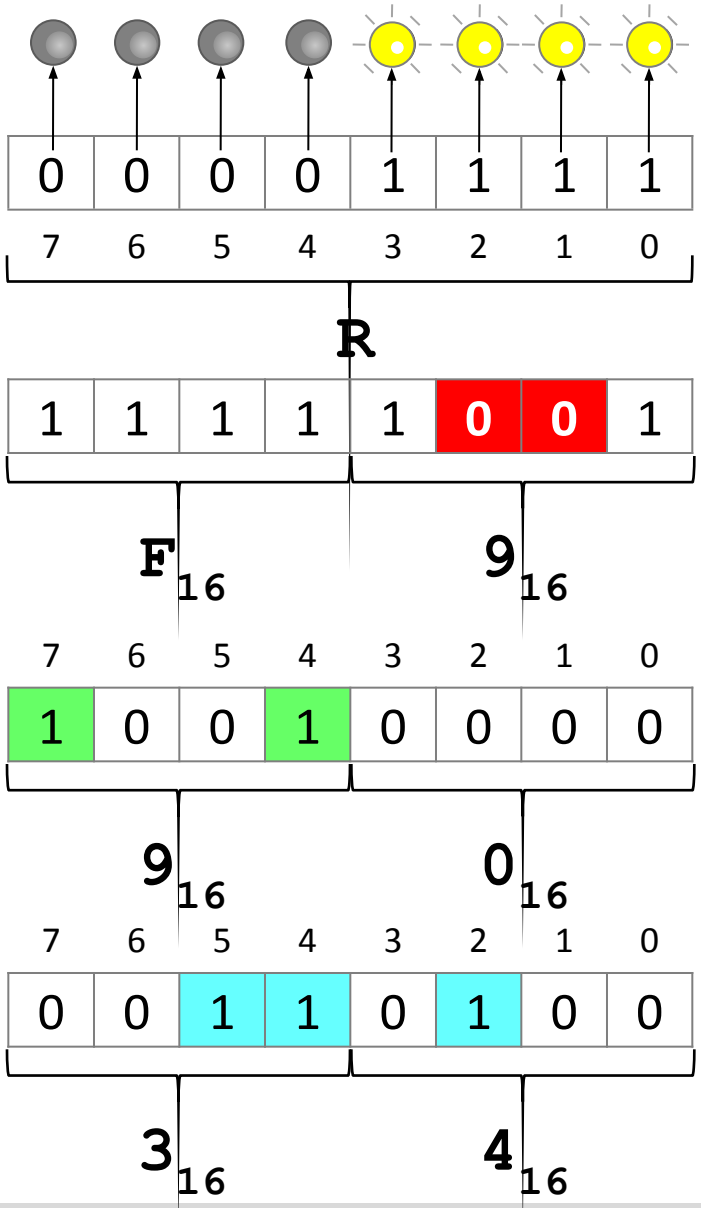
D	M	D xor M
0	0	0
1	0	1
0	1	1
1	1	0

AA_{16} xor $6C_{16}$ = ?

	7	6	5	4	3	2	1	0	
D	1	0	1	0	1	0	1	0	AA_{16}
M	0	1	1	0	1	1	0	0	$6C_{16}$
D xor M	1	1	0	0	0	1	1	0	$C6_{16}$

С помощью операции «исключающее ИЛИ» можно инвертировать биты, для которых маска равна 1!

Битовые логические операции (итог)



1) отключить лампочки 2 и 1, не трогая остальные

$$R = R \text{ and } F9_{16}$$

2) включить лампочки 7 и 4

$$R = R \text{ or } 90_{16}$$

3) изменить состояние лампочек 5, 4 и 2

$$R = R \text{ xor } 34_{16}$$

Шифрование с помощью xor

Идея: `(A xor B) xor B = A`

Операция «исключающее ИЛИ» *обратима*, то есть ее повторное применение восстанавливает исходное значение!

Текст: `2*2=4`

Коды символов:

$'2' = 32_{16} = 00110010_2$

$'*' = 2A_{16} = 00101010_2$

$'=' = 3D_{16} = 00111101_2$

$'4' = 34_{16} = 00110100_2$

Шифрование с помощью xor

Маска: $23 = 17_{16} = 00010111_2$

'2' → 32_{16} xor 17_{16} = 25_{16} → '%'
'*' → $2A_{16}$ xor 17_{16} = $3D_{16}$ → '='
'=' → $3D_{16}$ xor 17_{16} = $2A_{16}$ → '*'
'4' → 34_{16} xor 17_{16} = 23_{16} → '#'

Исходный текст: 2*2=4

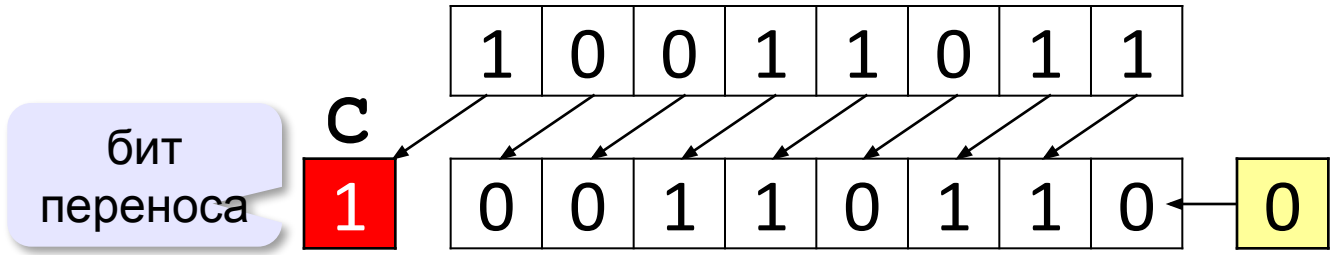
Зашифрованный текст: %=%*#

Расшифровка:

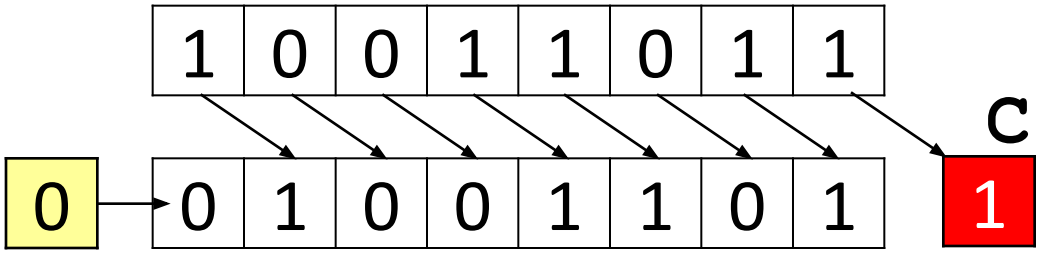
'%' → 25_{16} xor 17_{16} = 32_{16} → '2'
'=' → $3D_{16}$ xor 17_{16} = $2A_{16}$ → '*'
'*' → $2A_{16}$ xor 17_{16} = $3D_{16}$ → '='
'#' → 23_{16} xor 17_{16} = 34_{16} → '4'

Логический сдвиг

Влево:



Вправо:



C, C++, Python:

```
N = N << 1;
N = N >> 1;
```

Паскаль:

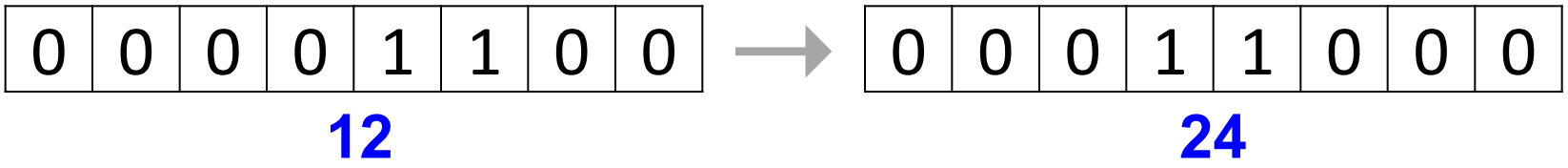
shift left

```
N := N shl 1;
N := N shr 1;
```

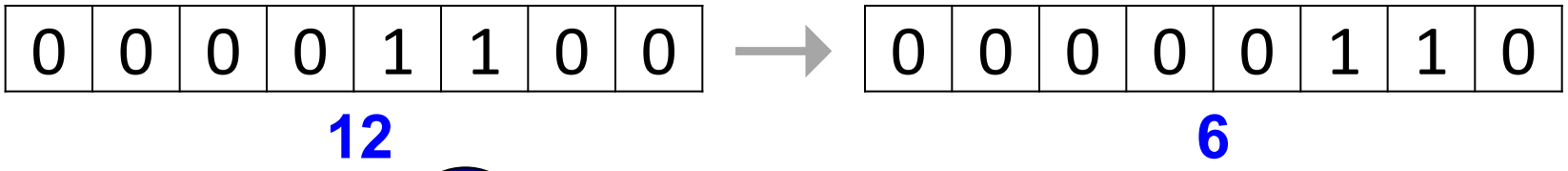
shift right

Логический сдвиг

Влево:



Вправо:

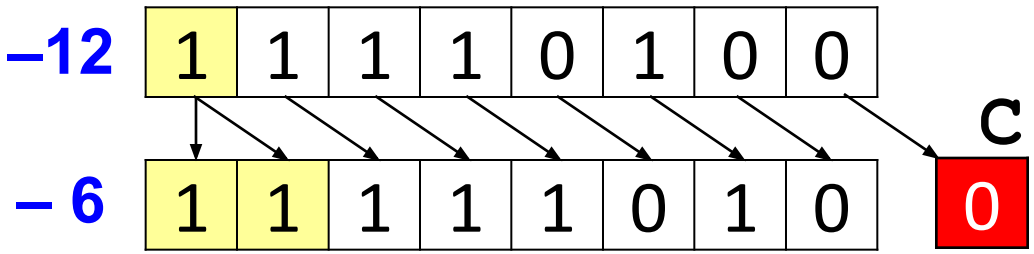


? Если число нечётное?

Логический сдвиг влево (вправо) – это быстрый способ **умножения** (деления без остатка) положительного числа **на 2**.

? Если число отрицательное?

Арифметический сдвиг (вправо)



Если число нечётное?

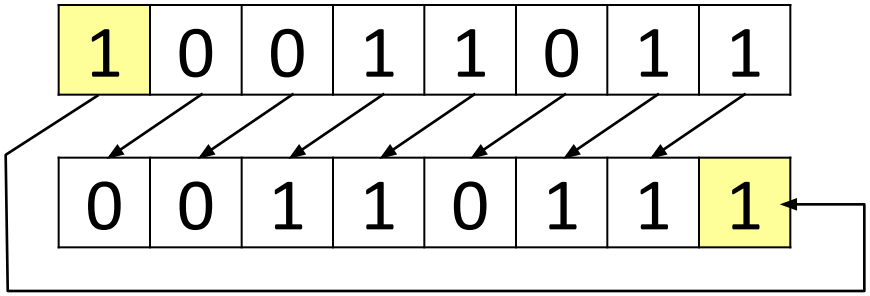
Примеры:

20 → 10	–20 → –10
15 → 7	–15 → –8
11 → 5	–11 → –6
3 → 1	–3 → –2
1 → 0	–1 → –1

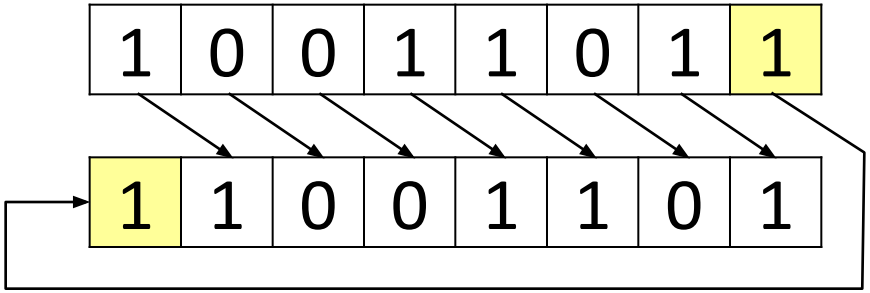
Арифметический сдвиг вправо – деление на 2 нацело **с округлением «вниз»** (к ближайшему меньшему целому).

Циклический сдвиг

Влево:



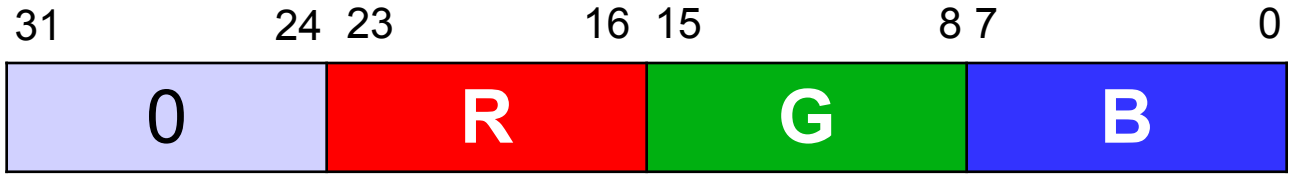
Вправо:



Циклический сдвиг предназначен для последовательного просмотра битов без потери данных.

Пример

Задача: в целой переменной **N** (**32 бита**) закодирована информация о цвете пикселя в **RGB**:



Записать в переменные R, G, B составляющие цвета.

Вариант 1:

1. Обнулить все биты, кроме **G**.
   Маска для выделения **G**: $0000FF00_{16}$
2. Сдвинуть вправо так, чтобы число **G** передвинулось в младший байт.

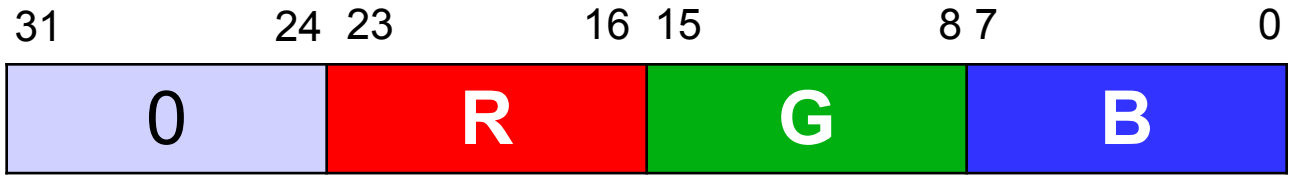
C, C++, Python:

```
G = (N & 0xFF00) >> 8;
```

Паскаль:

```
G:=(N and $FF00) shr 8;
```

Пример



Вариант 2:

1. Сдвинуть вправо так, чтобы число **G** передвинулось в младший байт.
2. Обнулить все биты, кроме **G**.
   Маска для выделения **G**: $000000FF_{16}$

C, C++, Python :

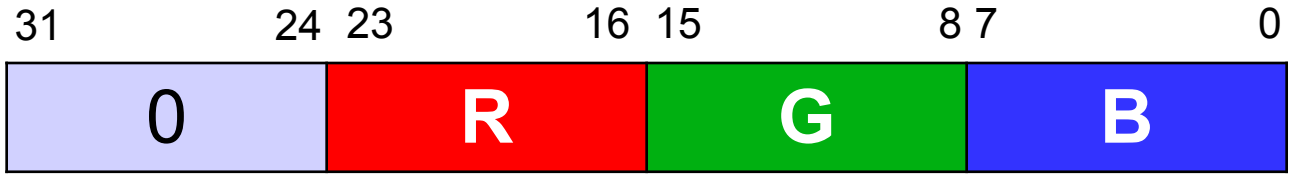
```
G=(N >> 8) & 0xFF;
```

Паскаль:

```
G:=(N shr 8) and $FF;
```

Как решить, используя только сдвиги?

Пример



C, C++, Python:

```
R =

B =
```

Паскаль:

```
R:=

B:=
```

Компьютерная арифметика

§ 27. Хранение в памяти вещественных чисел

Хранение вещественных чисел

С фиксированной запятой (в первых ЭВМ):

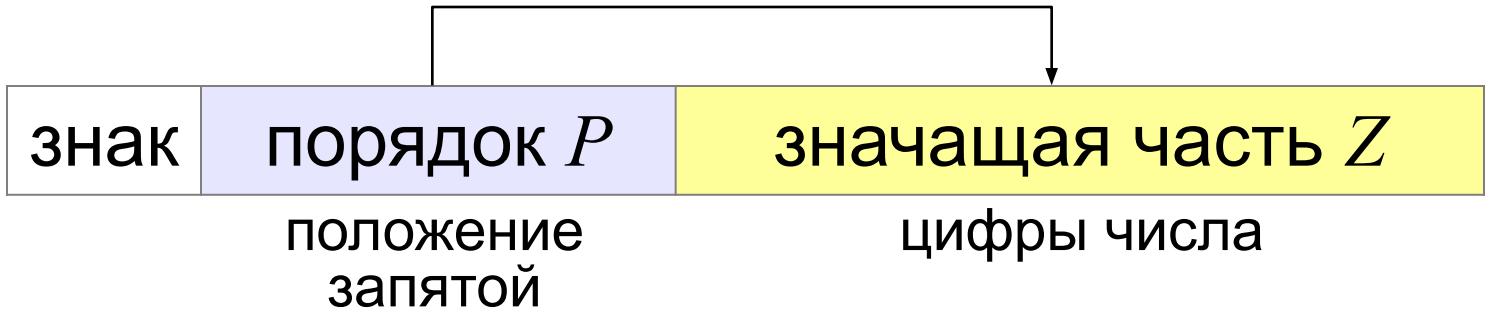
целая часть	дробная часть

0,00000000000012345 12345000000000000,0

для больших и маленьких чисел нужно масштабирование

С плавающей запятой (автоматическое масштабирование):

$A = \pm Z \cdot B^P$ $1{,}2345 \cdot 10^{-14}$ $1{,}2345 \cdot 10^{17}$



Хранение вещественных чисел

Теоретически оптимальный вариант (целая часть = 0):

$0{,}0012345 = 0{,}12345 \cdot 10^{-2}$

$12{,}345 = 0{,}12345 \cdot 10^{2}$

всегда 0

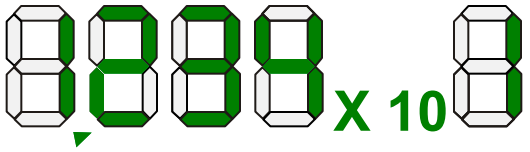
основание системы счисления

⛔ один разряд расходуется впустую!

Экономный вариант (целая часть от 1 до B):

$0{,}0012345 = 1{,}2345 \cdot 10^{-3}$

$12{,}345 = 1{,}2345 \cdot 10^{1}$



➕ повышение точности при конечном числе разрядов

Нормализация

Нормализованная форма: значащая часть Z удовлетворяет условию $1 \le Z < B$, где B – основание системы счисления (стандарт *IEEE 754*).

Пример:

$17{,}25 = 10001{,}01_2 = 1{,}000101_2 \cdot 2^4$

$5{,}375 =$

$7{,}625 =$

$27{,}875 =$

$13{,}5 =$

$0{,}125 =$

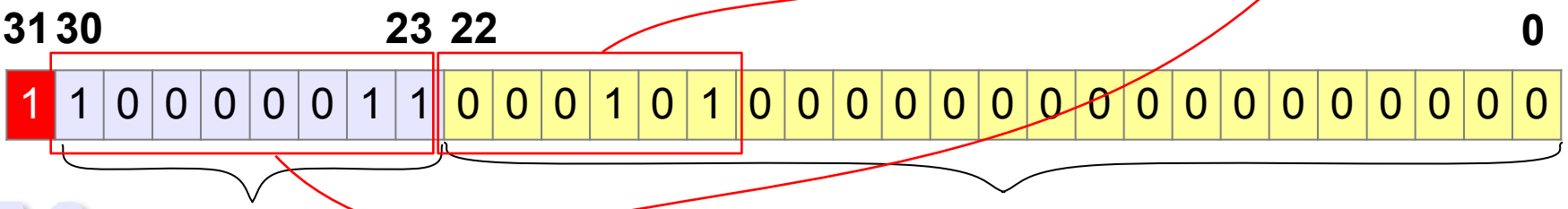
всегда 1, её можно не хранить в памяти!

Число обычной точности (*single*)

знак	порядок	значащая часть

$-17{,}25 = -10001{,}01_2 = -1{,}000101_2 \cdot 2^4$

single: 4 байта = 32 бита



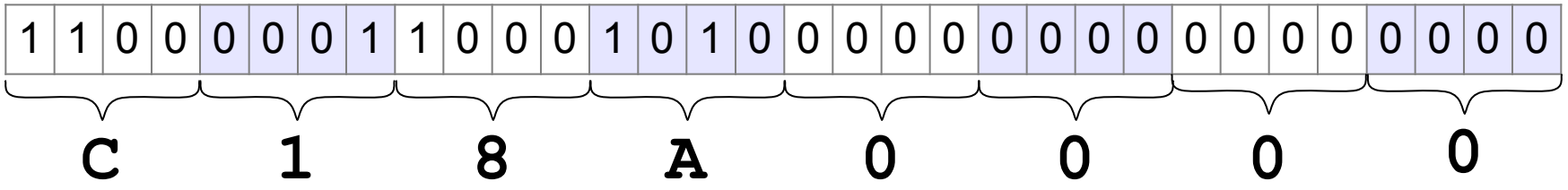
знак

порядок со смещением

мантисса = дробная часть Z

$p = 4 + 127 = 131 = 10000011_2$

для *single*



Диапазон вещественных чисел

тип	диапазон	число десятичных значащих цифр	размер (байт)
single	$1{,}4 \cdot 10^{-45} – 3{,}4 \cdot 10^{38}$	7-8	4
double	$4{,}9 \cdot 10^{-324} – 1{,}8 \cdot 10^{308}$	15-16	8
extended	$3{,}6 \cdot 10^{-4951} – 1{,}2 \cdot 10^{4932}$	19-20	10

Extended – тип для вычислений в сопроцессоре, единица в значащей части не скрывается.

Single, double – только для хранения.

Компьютерная арифметика

§ 28. Операции с вещественными числами

Сложение и вычитание

Как сложить два числа с плавающей запятой?

$$1{,}2345 \cdot 10^{-5} + 1{,}2345 \cdot 10^{5} = ?$$

Пример:

$$7{,}25 = 111{,}01_2 = 1{,}1101_2 \cdot 2^2$$

$$1{,}75 = 1{,}11_2 = 1{,}11_2 \cdot 2^0$$

1) порядки выравниваются до большего

$$1{,}75 = 0{,}0111_2 \cdot 2^2$$

2) значащие части складываются (или вычитаются)

$$\begin{array}{r} 1{,}1101_2 \\ +\ 0{,}0111_2 \\ \hline 10{,}0100_2 \end{array}$$

3) результат нормализуется

$$10{,}01_2 \cdot 2^2 = 1{,}001_2 \cdot 2^3$$

Почему порядки выравнивают до большего?

Умножение и деление

Как умножить два числа с плавающей запятой?

$$1{,}2345 \cdot 10^{-5} \cdot 1{,}2345 \cdot 10^{5} = ?$$

Пример:

$1{,}75 = 1{,}11_2 = 1{,}11_2 \cdot 2^0$

$6 = 110_2 = 1{,}1_2 \cdot 2^2$

Надо ли выравнивать порядки?

1) значащие части умножаются (или делятся)

$1{,}11_2 \cdot 1{,}1_2 = 10{,}101_2$

2) порядки складываются (или вычитаются)

$0 + 2 = 2$

3) результат нормализуется

$10{,}101_2 \cdot 2^2 = 1{,}0101_2 \cdot 2^3$

Конец фильма

ПОЛЯКОВ Константин Юрьевич
д.т.н., учитель информатики
ГБОУ СОШ № 163, г. Санкт-Петербург
kpolyakov@mail.ru

ЕРЕМИН Евгений Александрович
к.ф.-м.н., доцент кафедры мультимедийной дидактики и ИТО ПГГПУ, г. Пермь
eremin@pspu.ac.ru

Источники иллюстраций

1. авторские материалы