

# Множества

---

# Источники

---

- Аляев Ю. А., Тюрин С. Ф. Дискретная математика и математическая логика.
- Андерсон Дж. Дискретная математика и комбинаторика.
- Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. Т. 1.
- Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов.
- Хаггарти Р. Дискретная математика для программистов.

# Множество

---

➤ Совокупность элементов, объединённых общим свойством, но различимых между собой.

- Множество книг на полке
- Множество цифр
- Множество действительных чисел ( $\mathbb{R}$ )
- Множество непрерывных функций

# Условные обозначения

---

- $A, B, \dots$  – Множества обозначаются заглавными латинскими буквами
- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$  – Числовые множества
- $a, b, \dots$  - Элементы множества обозначаются строчными латинскими буквами
- $x \in M$  – Означает, что  $x$  является элементом множества  $M$  (принадлежит  $M$ )
- $x \notin M$  – Означает, что  $x$  не является элементом множества  $M$

# Способы задания множества

---

ПЕРЕЧИСЛЕНИЕМ

$$M = \{a, b, d, f\}$$

$$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

$$B = \{1, 2, \dots, 100\}$$

$$Q = \{1, 4, 9, \dots, n^2, \dots\}$$

$$X = \{2^0, 2^1, 2^2, \dots\}$$

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ СВОЙСТВОМ

$$M = \{x: P(x)\} \qquad M = \{x \mid P(x)\}$$

$$Q = \{x: x = n^2, n \in \mathbb{N}\}$$

$$Q = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$$P = \{n \mid n - \text{натуральное число, меньше 9}\}$$

$$Y = \{y \mid y = \sin(x), x \in [-\pi, \pi]\}$$

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \right\}$$

# Подмножество

---

- Каждый элемент множества  $A$  является элементом множества  $B$
- $A \subseteq B$   $A$  включено в  $B$ ,  $A$  является подмножеством  $B$

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}, B = \{1, 3, 7\}, C = \{2, 5, 6, 8\}$$

$$B \subseteq A, C \subseteq A$$

$$D = \{2, 5, 6, 8\}$$

$$D \subseteq A, D \subseteq C, C \subseteq D$$

# Собственное подмножество

---

- Каждый элемент множества  $A$  является элементом множества  $B$ , в множестве  $B$  присутствуют элементы, которых нет в  $A$
- $A \subset B$   $A$  полностью включено в  $B$ ,  $A$  является собственным подмножеством  $B$

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}, B = \{1, 3, 7\}, C = \{2, 5, 6, 8\}$$

$$B \subset A, C \subset A$$

$$D = \{2, 5, 6, 8\}$$

$$D \subset A, D \not\subset C, C \not\subset D$$

# Задачи

---

Какие из отношений верны для  $A$  и  $C$ ?  $A \subseteq C, C \subseteq A, A \subset C, C \subset A$ ?

$$A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow$$

$$A \subseteq C$$

$$A \subset B, B \subseteq C \Rightarrow$$

$$A \subset C, A \subseteq C$$

$$A \subseteq B, B \subset C \Rightarrow$$

$$A \subset C, A \subseteq C$$

$$B \subset A, C \subset B \Rightarrow$$

$$C \subset A, C \subseteq A$$



# Равенство множеств

---

➤ Равными называются множества, содержащие одни и те же элементы

➤ Если  $A \subseteq B$ , и  $B \subseteq A$ , то  $A = B$

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}, \quad B = \{1, 3, 7\}, \quad C = \{2, 5, 6, 8\}, \quad D = \{2, 5, 6, 8\}$$

$$C = D$$

# Задачи

---

Какие из отношений верны для  $A$  и  $D$ ?  $A \subseteq D, D \subseteq A, A \subset D, D \subset A, A = D$ ?

$$A \subseteq B, B \subseteq C, C \subseteq A, D \subseteq C \Rightarrow \\ D \subseteq A$$

$$A \subseteq B, B \subseteq C, C \subseteq A, D \subseteq C, C \subseteq D \Rightarrow \\ A \subseteq D, D \subseteq A, A = D$$

$$A \subseteq B, B \subseteq C, C \subseteq B, D \subseteq C \Rightarrow \\ A ? D$$

$$A \subseteq B, B \in C, C \subseteq D \Rightarrow \\ A ? D$$

# Круги Эйлера

---

- Схематичное изображение множеств и подмножеств

$$A = \{1,2,4\}, B = \{4,5,6,7\}, C = \{3,8\}, D = \{5,6\}$$



# Пустое множество $\emptyset$

---

- Множество, не содержащее ни одного элемента
- Является подмножеством любого множества

$$M = \{x \mid x < 0, x \in \mathbb{N}\}$$

$$X = \{x \mid x^2 = -1, x \in \mathbb{N}\}$$

$$Y = \{\}$$

$$Z = \{x \mid x - \text{название дня недели, содержащее букву 'м'}\}$$

# Универсальное множество $\mathbb{U}$ (Универсум)

---

- Множество, содержащее все объекты, рассматриваемые в некотором разделе математики, или при решении некоторой задачи
- Такое множество, подмножествами которого являются все рассматриваемые множества

$\mathbb{C}$  – универсальное в комплексном анализе

$\mathbb{B} = \{0,1\}$  – универсальное для алгебры логики

Современный латинский алфавит – универсальное множество для слов английского языка

# Мощность (конечного) множества

---

➤ Количество элементов данного множества

$$|A| = |\{5,8,2\}| = 3$$

$$|\emptyset| = 0$$

$$|\{\emptyset, \{\emptyset\}\}| = 2$$

# Булеан множества

---

➤ Множество всех подмножеств

$$\mathcal{P}(A) = 2^A = \mathcal{B}(A) = \{M \mid M \subseteq A\}$$

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$\mathcal{B}(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

$$|\mathcal{B}(A)| = |2^A| = 2^{|A|}$$

# Действия над множествами

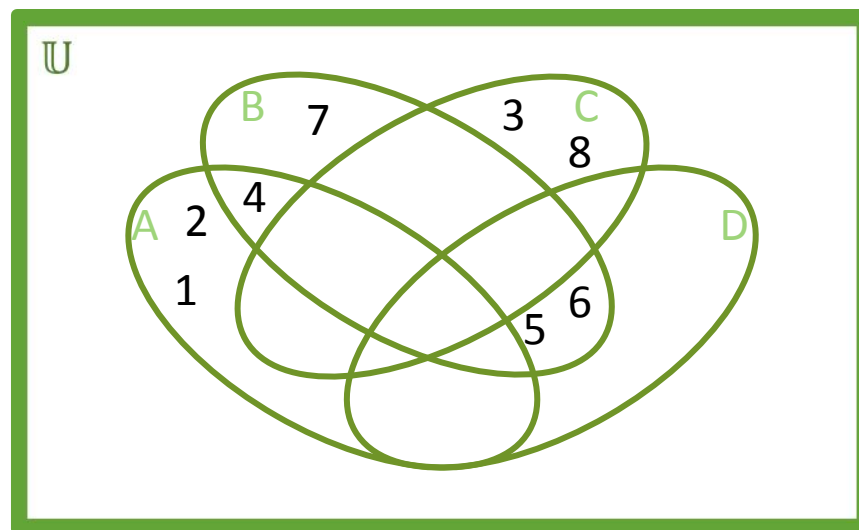
---



# Диаграммы Венна (Эйлера-Венна)

- Схематичное изображение всех возможных отношений нескольких подмножеств универсального множества

$$A = \{1,2,4\}, B = \{4,5,6,7\}, C = \{3,8\}, D = \{5,6\}$$

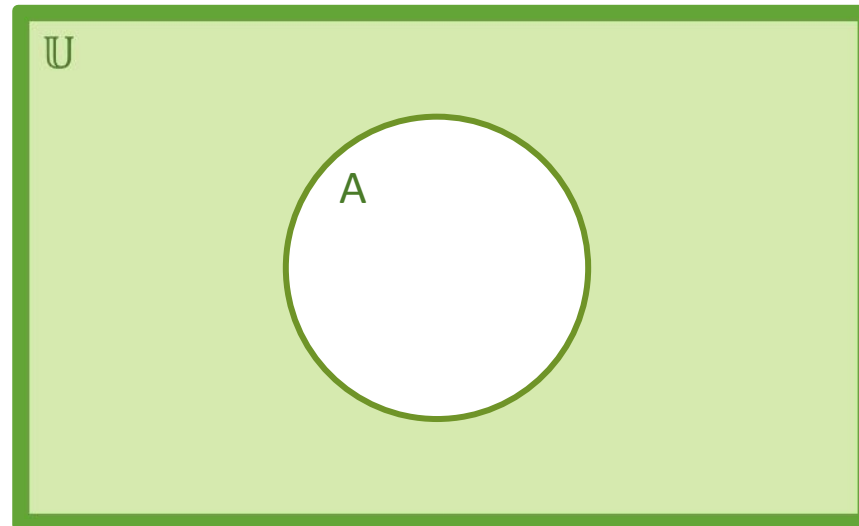


# Дополнение множества

---

➤ Множество тех элементов универсального множества, которые не принадлежат множеству  $A$

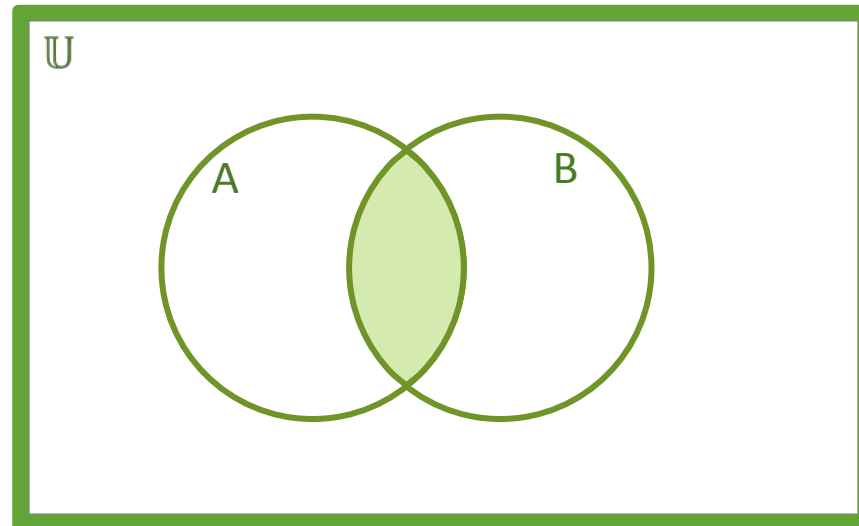
➤  $\bar{A} = \{x \mid (x \in U) \wedge (x \notin A)\}$



# Пересечение множеств

---

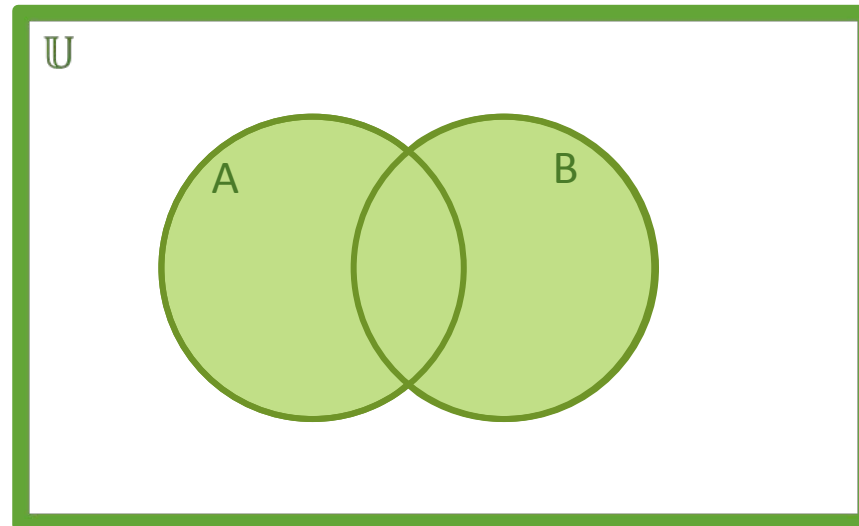
- Множество содержащее только те элементы, что принадлежат одновременно множествам  $A$  и  $B$
- $A \cap B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\}$



# Объединение множеств

---

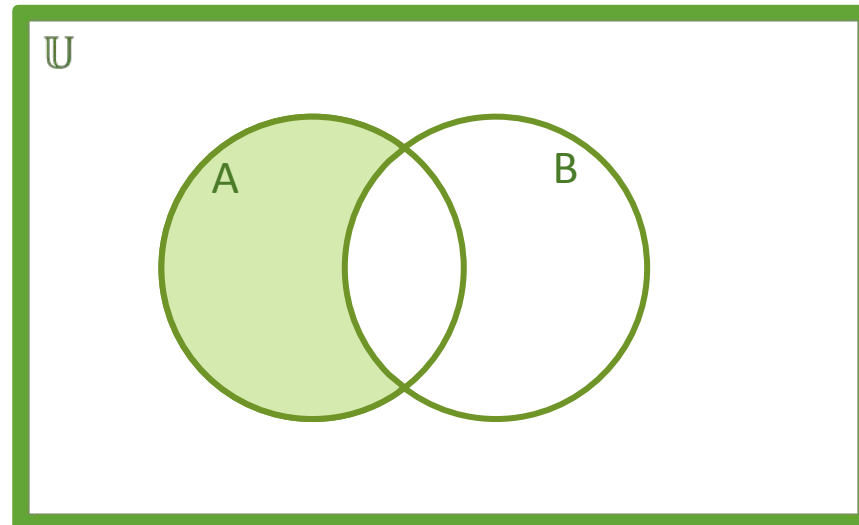
- Множество содержащее все элементы, что принадлежат хотя бы одному из множеств  $A$  или  $B$
- $A \cup B = \{x \mid (x \in A) \vee (x \in B)\}$



# Разность множеств

---

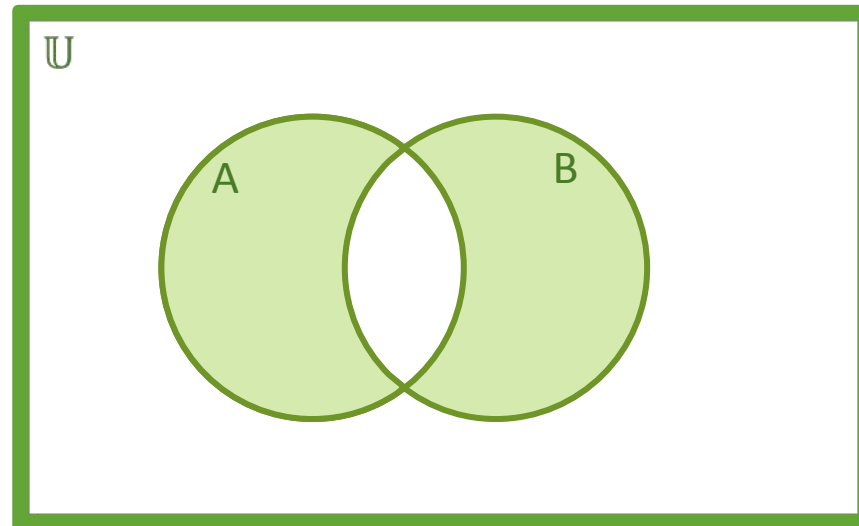
- Множество тех элементов первого множества, что не содержатся во втором множестве
- $A \setminus B = A - B = \{x \mid (x \in A) \wedge (x \notin B)\} = A \cap \bar{B}$



# Симметрическая разность множеств

---

- Множество тех элементов универсума, что содержатся только в  $A$  или только в  $B$
- $A \Delta B = A \dot{\cup} B = \{x \mid (x \in A \setminus B) \wedge (x \in B \setminus A)\} = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$



# Выполняемые тождества

---

- Коммутативность операций

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

$$A \Delta B = B \Delta A$$

- Ассоциативность операций

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

- Дистрибутивность операций

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

- Поглощение

$$A \cap (A \cup B) = A$$

$$A \cup (A \cap B) = A$$

- Двойное дополнение

$$\dot{\dot{A}} = A$$

- Идемпотентность

$$A \cap A = A$$

$$A \cup A = A$$

- Законы де Моргана

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

- Свойства пустого множества

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cup \emptyset = A$$

- Свойства универсального множества

$$A \cap \mathbb{U} = A$$

$$A \cup \mathbb{U} = \mathbb{U}$$

- Свойства дополнения

$$A \cap \dot{A} = \emptyset$$

$$A \cup \dot{A} = \mathbb{U}$$

$$\dot{A} = \mathbb{U} \setminus A$$

# Кортеж

---

Кортежем (вектором, упорядоченным множеством) называется упорядоченная последовательность элементов  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  (или  $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$ ), где  $a_i \in A_i$ .

$a_i$  называется  $i$  компонентой (кортежа) вектора, или проекцией вектора на ось  $i$ .

Упорядоченную пару элементов можно представить как:

$$(a_1, a_2) = \{a_1, \{a_1, a_2\}\}$$



# Декартово произведение множеств

---

Декартовым (прямым) произведением двух множеств называется множество упорядоченных пар элементов данных множеств

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Свойства:

$$A \times B \neq B \times A$$

$$|A \times B| = |A| \times |B|$$

$$A \times \emptyset = \emptyset$$

$$(A \times B) \times C \leftrightarrow A \times (B \times C)$$

# Степень множества

---

Определим по индукции:

$$A^1 = A$$

$$A^n = A \times A^{n-1} = A^{n-1} \times A$$

Нулевая степень определяется как:

$$A^0 = \emptyset$$

Мощность:

$$|A^n| = |A|^n$$

# Пример

---

$$A = \{a_1, a_2\}$$

$$B = \{b_1, b_2, b_3\}$$

$$A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3)\}$$

$$|A \times B| = |A| \cdot |B| = 2 \cdot 3 = 6$$

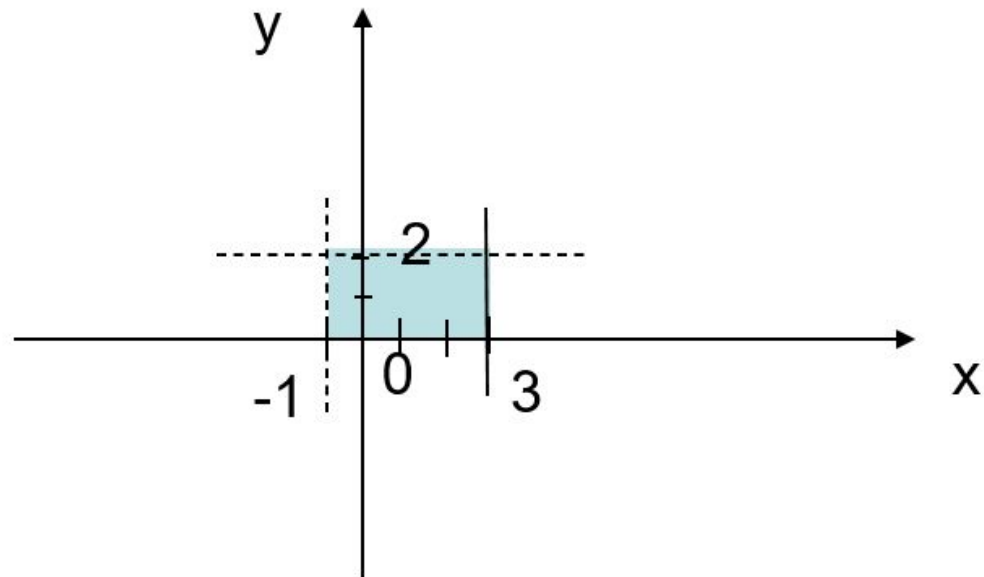
$$A^2 = \{(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_1), (a_2, a_2)\}$$

$$|A^2| = |A|^2 = 2^2 = 4$$

# Изображение декартова произведения

---

$$(-1;3] \times [0;2)$$



# Свойства относительно операций над множествами

---

1.  $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

2.  $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

3.  $A \times (B \setminus C) = (A \times B) \setminus (A \times C)$

4.  $A \times (B \Delta C) = (A \times B) \Delta (A \times C)$

# Отношения

---

# Отношение

---

Отношением  $R$ , определенным на паре множеств  $A$  и  $B$ , называется любое подмножество их декартова произведения  $A \times B$ .

$R = \{(a, b) \mid (a, b) \in A \times B\}$ . Если  $a$  и  $b$  находятся в отношении  $R$ , то  $(a, b) \in R$  или  $aRb$ .

Областью определения отношения  $R$  называется совокупность всех таких  $a$ , что хотя бы для одного  $b$  пара  $(a, b)$  принадлежит  $A \times B$ .

Областью значений отношения  $R$  называют множество всех таких  $b$ , что хотя бы для одного элемента  $a$  пара  $(a, b)$  принадлежит  $A \times B$ .

Обратным отношением  $R^{-1}$  к отношению  $R \subseteq A \times B$  называется множество таких пар  $(b, a) \subseteq B \times A$ , что  $(a, b) \in R$

# Пример

---

$$A = \{1, 2, 3\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$R_1 = \{(a, b) \mid b : a\} = \{(a, b) \mid b \bmod a = 0\} = \\ \{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (1, 5); (1, 6); (1, 7); (2, 2); (2, 4); (2, 6); (3, 3); (3, 6)\}$$

$$R_2 = \{(a, b) \mid a^2 + b^2 < 15\} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$$

$$R_3 = \{(a, b) \mid \text{NOD}(a, b) = 2\} = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6)\}$$

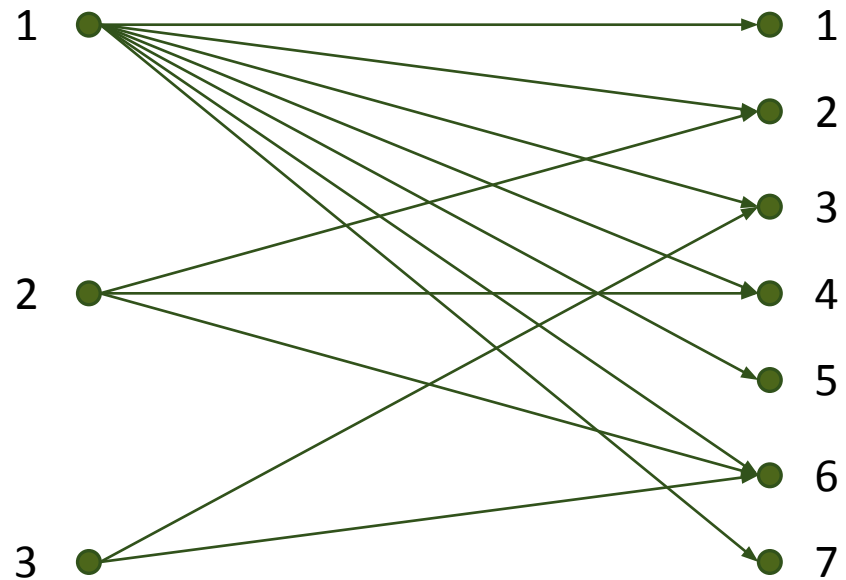


# Пример

---

$$R_1 = \{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (1, 5); (1, 6); (1, 7); (2, 2); (2, 4); (2, 6); (3, 3); (3, 6)\}$$
$$= \{(2, 2), (2, 4), (2, 6)\}$$

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	0	1	0
3	0	0	1	0	0	1	0



# Обратное отношение

---

Обратным отношением  $R^{-1}$  на  $B \times A$  к отношению  $R \subseteq A \times B$  называется множество  $R^{-1} = \{(b, a) | (a, b) \in R\}$ .

Например:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{x, y, z\},$$

$$R = \{(1, x), (1, z), (2, y), (3, z), (4, x), (4, y)\}$$

$$R^{-1} = \{(x, 1), (x, 4), (y, 2), (y, 4), (z, 1), (z, 3)\}$$

# КОМПОЗИЦИЯ ОТНОШЕНИЙ

---

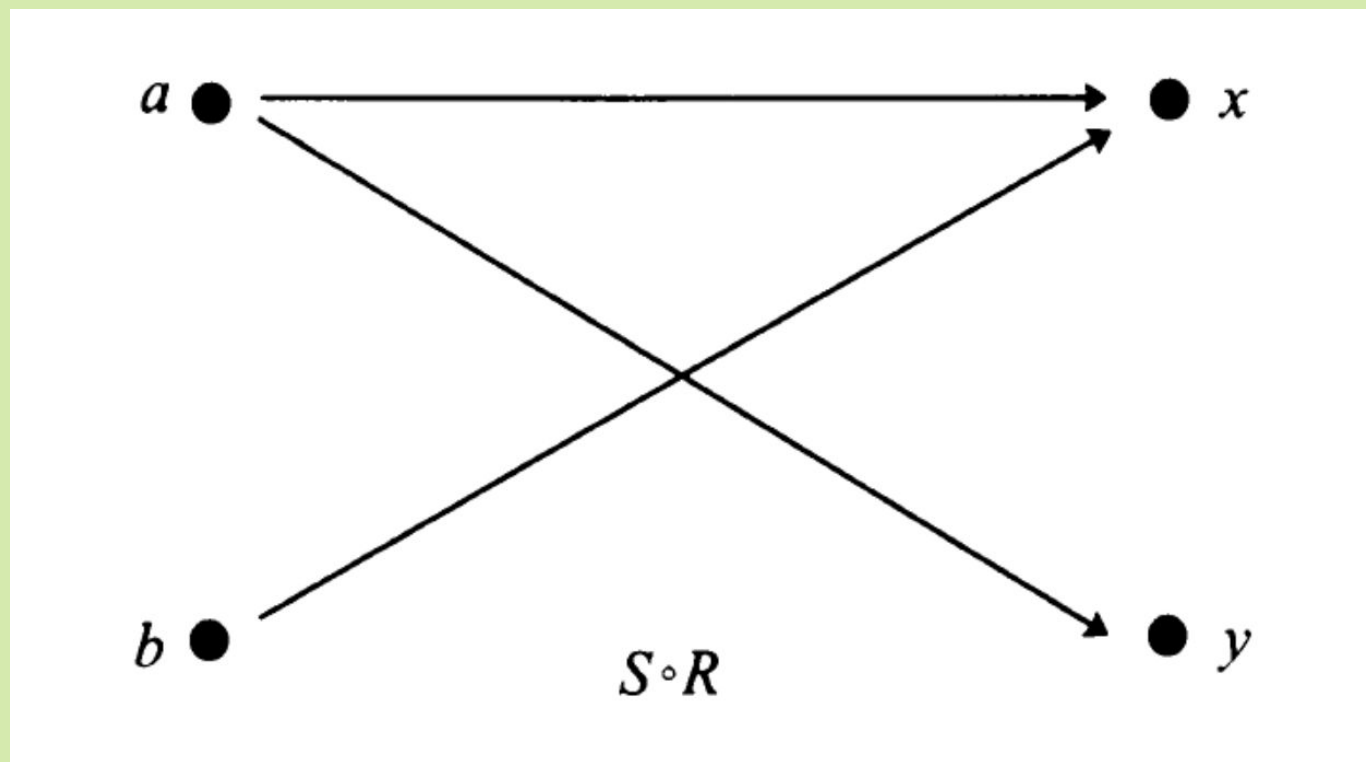
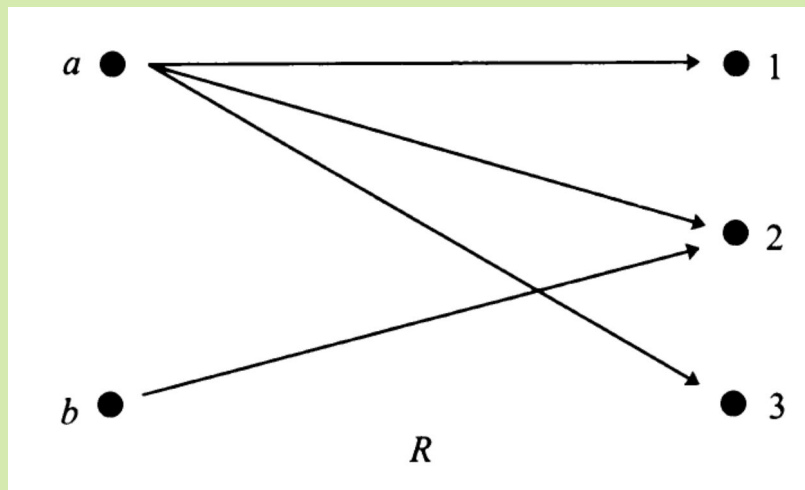
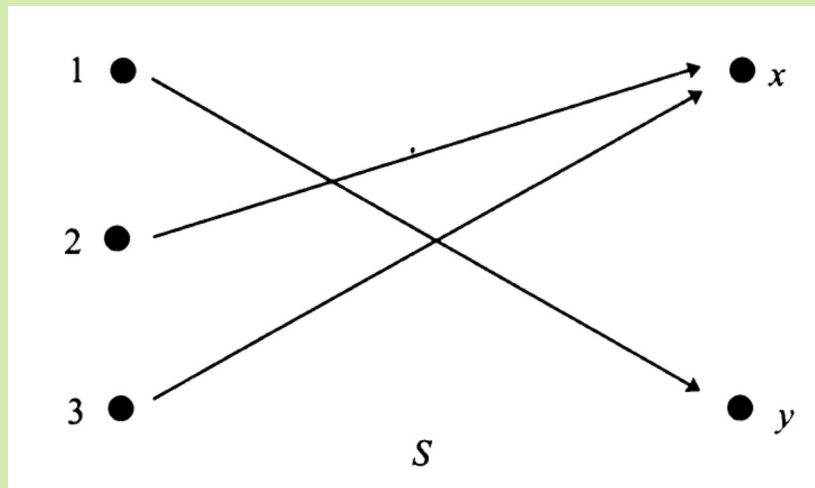
Если  $R \subseteq A \times B$ ,  $S \subseteq B \times C$ , то композицией  $R$  и  $S$  называется следующее отношение:

$$S \circ R = \{(a, c) \mid a \in A, c \in C, \exists b \in B: (a, b) \in R, (b, c) \in S\}.$$

Например:

$$R = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 2)\}, S = \{(1, y), (2, x), (3, x)\}.$$

$$S \circ R = \{(a, y), (a, x), (b, x)\}$$



# Бинарное отношение и его свойства

---

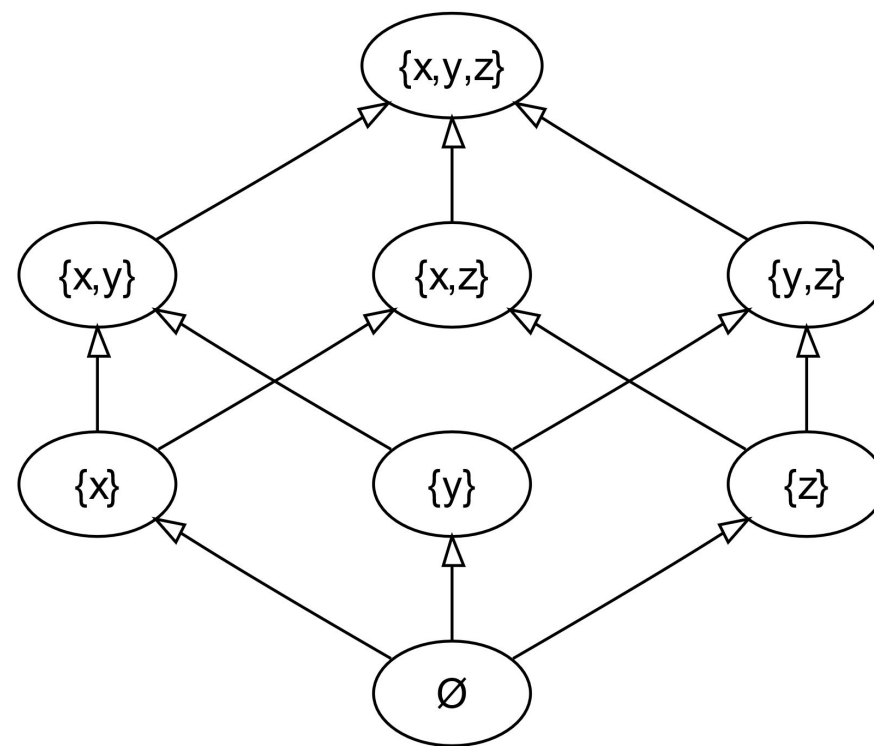
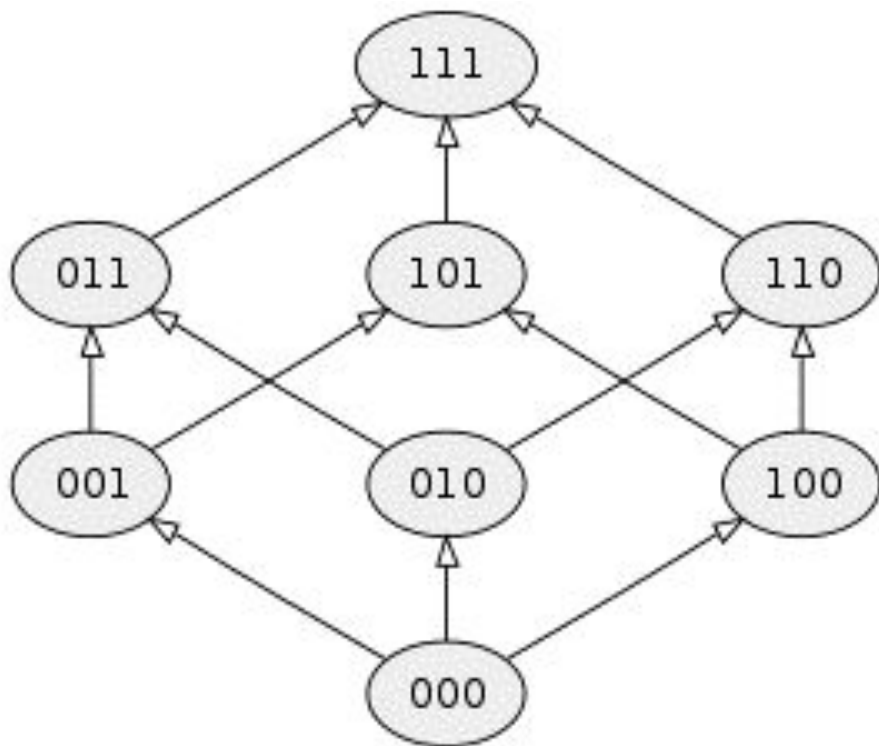
Бинарным отношением называется отношение  $R \subseteq A \times A = A^2$ .

1. Рефлексивность:  $\forall a \in A, (a, a) \in R, \forall a \in A,$
2. Антирефлексивность:  $\forall a, b \in A, (a, b) \in R \Rightarrow a \neq b,$
3. Симметричность:  $\forall a, b \in A, (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R,$
4. Антисимметричность:  $\forall a, b \in A, ((a, b) \in R) \wedge ((b, a) \in R) \Rightarrow a = b,$
5. Асимметричность:  $\forall a, b \in A, (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \notin R,$
6. Транзитивность:  $\forall a, b \in A, ((a, b) \in R) \wedge ((b, c) \in R) \Rightarrow (a, c) \in R,$
7. Антитранзитивность:  $\forall a, b \in A, ((a, b) \in R) \wedge ((b, c) \in R) \Rightarrow (a, c) \notin R,$
8. Связность:  $\forall a, b \in A \Rightarrow ((a, b) \in R) \vee ((b, a) \in R).$

# Виды отношений

---

1. Эквивалентности — рефлексивное, симметричное, транзитивное:
  - a) равенство чисел,
  - b) равномощность множеств,
  - c) параллельность прямых.
2. Нестромого (частичного) порядка — рефлексивное, антисимметричное, транзитивное:
  - a) отношения больше или равно, меньше или равно для чисел,
  - b) отношение предшествования на наборах булевых значений,
  - c) отношение несобственного подмножества для подмножеств  $\mathbb{U}$ ,
  - d) отношение делимости на множестве натуральных чисел.
3. Строгого порядка — антирефлексивное, асимметричное, транзитивное:
  - a) отношения больше и меньше для чисел,
  - b) лексикографический порядок слов в словаре.



Пример

# Разбиение множества, фактор-множество

---

Для некоторого множества  $M$  разбиением называется некоторое множество  $\{A_i\}$  его непустых подмножеств  $A_i \subseteq M$  таких, что их попарные пересечения пусты, а само множество  $M$  равно их объединению.

$$A(M) = \{A_i \mid A_i \in \mathcal{B}(A), A_i \neq \emptyset, A_i \cap A_j = \emptyset : i \neq j, \cup_i A_i = M\}$$

$A_i$  – класс разбиения, блок разбиения.

Если на множестве  $A$  задано отношение эквивалентности, то оно разбивает множество на классы эквивалентности. Класс эквивалентности, порождённый элементом  $a$ :  $[a]_R = \{x \in A \mid (x, a) \in R\}$ .

Фактор-множеством по отношению  $R$  называется множество  $A_R$  всех классов эквивалентности



# Отображения (функции)

---

# Отображение (функция)

---

Отображением  $f: X \rightarrow Y$  называется такое подмножество множества  $X \times Y$ , что для любых пар  $(x', y') \in f, (x'', y'') \in f$  из условия  $y' \neq y''$  следует, что  $x' \neq x''$ . То есть каждому элементу из множества  $X$  сопоставлено не более одного элемента множества  $Y$ .

Для пары  $(x, y)$ :

$x$  – аргумент функции, или прообраз  $y$ ,

$y$  – значение функции, или образ  $x$ .

$D(f)$  - область определения функции (domain) – множество всех прообразов элементов множества  $Y$ .

$E(f)$  - область значений функции (range) – множество всех образов элементов множества  $X$ .

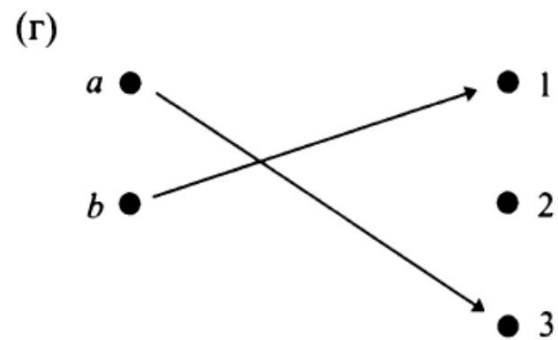
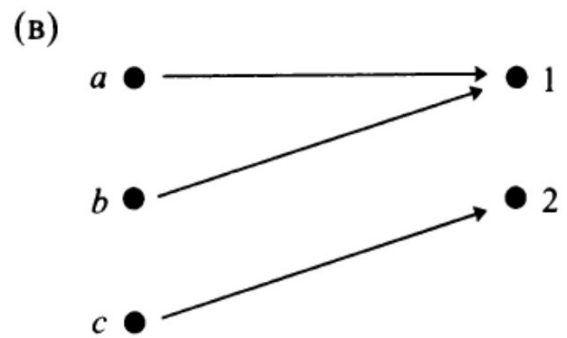
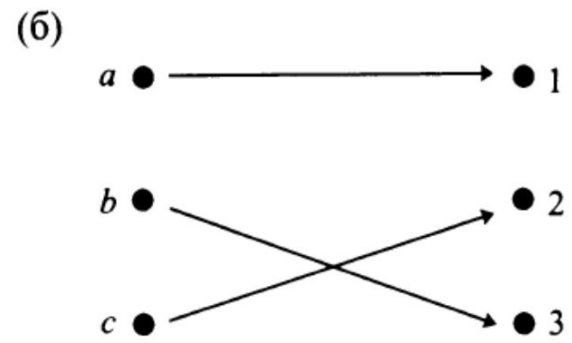
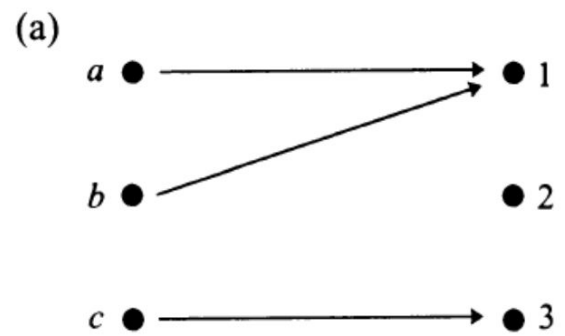
# Инъекция, сюръекция, биекция

---

Если при отображении  $f: X \rightarrow Y$  область значений  $E(f)$  совпадает с множеством  $Y$ , то отображение называется сюръективным (отображением "на").

Если при отображении  $f: X \rightarrow Y$  различным элементам множества  $X$  соответствуют различные элементы множества  $Y$  ( $x' \neq x'' \Rightarrow f(x') \neq f(x'')$ ), то отображение называется инъективным (отображением "в").

Если отображение одновременно инъективно и сюръективно, то его называют биективным.



Пример

# Обратная функция

---

Если отношение  $f^{-1}: Y \rightarrow X$ , является отображением (функцией), то она называется обратной функцией, а функция  $f$  – обратимой.

**ТЕОРЕМА.** Если функция  $f: X \rightarrow Y$  является биекцией, то обратное отношение  $f^{-1}$  является функцией из  $Y$  в  $X$ , причём биективной.

**ТЕОРЕМА.** Если  $f: X \rightarrow Y$  — биекция, то

a)  $f(f^{-1}(y)) = y$  для  $\forall y \in Y$ ;

b)  $f^{-1}(f(x)) = x$  для  $\forall x \in X$ .

# Композиция функций

---

Если заданы функции  $f: X \rightarrow Y$  и  $g: Y \rightarrow Z$ , то их композицией также является функция  $g \circ f: X \rightarrow Z$ .

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

# Бесконечные множества

---

# Конечные и бесконечные множества

---

## КОНЕЧНОЕ МНОЖЕСТВО

- Множество, количество элементов которого конечно.
- Множество, мощность которого равна мощности множества  $\{x \mid 1 \leq x \leq n, n \in \mathbb{N}\}$ .

## БЕСКОНЕЧНОЕ МНОЖЕСТВО

- Множество, не являющееся конечным.
- Множество, мощность которого не меньше мощности множества натуральных чисел.
- Множество, для которого существует биекция с некоторым его собственным подмножеством.



# Равномощность множеств

---

Множества  $A$  и  $B$  называются равномощными, если существует биективное (взаимно-однозначное) отображение множества  $A$  на множество  $B$ .

Отношение равномощности множеств является отношением эквивалентности (обладает свойствами рефлексивности, симметричности, транзитивности).

# Бесконечные множества

---

## СЧЁТНОЕ МНОЖЕСТВО

- Бесконечное множество, элементы которого возможно пронумеровать натуральными числами.
- Множество, для которого можно задать биекцию с множеством натуральных чисел.
- Бесконечное множество, равномощное множеству натуральных чисел.

Мощность множества обозначается  $\aleph_0$  .

## НЕСЧЁТНОЕ МНОЖЕСТВО

### КОНТИНУАЛЬНОЕ МНОЖЕСТВО (КОНТИНУУМ)

- Бесконечное множество, превосходящее по мощности счётное.
- Множество, для которого можно установить биекцию с множеством действительных чисел.
- Бесконечное множество, мощность которого эквивалентна мощности множества действительных чисел.

Континуумом также называется мощность данного множества  $c = 2^{\aleph_0}$

# Мощность множества

---

- Класс эквивалентности по отношению равномощности.

# Источники

---

- Аляев Ю. А., Тюрин С. Ф. Дискретная математика и математическая логика.
- Андерсон Дж. Дискретная математика и комбинаторика.
- Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. Т. 1.
- Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов.
- Хаггарти Р. Дискретная математика для программистов.