Множества

Источники

- Аляев Ю. А., Тюрин С. Ф. Дискретная математика и математическая логика.
- Андерсон Дж. Дискретная математика и комбинаторика.
- Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. Т. 1.
- Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов.
- Хаггарти Р. Дискретная математика для программистов.

Множество

- Совокупность элементов, объединённых общим свойством, но различимых между собой.
  - Множество книг на полке
  - Множество цифр
  - Множество действительных чисел ($\mathbb{R}$)
  - Множество непрерывных функций

Условные обозначения

- $A, B, \ldots$ – Множества обозначаются заглавными латинскими буквами
- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{I}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ – Числовые множества
- $a, b, \ldots$ - Элементы множества обозначаются строчными латинскими буквами
- $x \in M$ – Означает, что x является элементом множества M (принадлежит M)
- $x \notin M$ – Означает, что x не является элементом множества M

Способы задания множества

ПЕРЕЧИСЛЕНИЕМ

$\mathrm{M} = \{a, b, d, f\}$

$A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$B = \{1,2, \dots, 100\}$

$Q = \{1, 4, 9, \dots, n^2, \dots\}$

$X = \{2^0, 2^1, 2^2, \dots\}$

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИМ СВОЙСТВОМ

$M = \{x: P(x)\}$ $\quad M = \left\{x \,\middle|\, P(x)\right\}$

$Q = \{x: x = n^2, n \in \mathbb{N}\}$

$Q = \{n^2 | n \in \mathbb{N}\}$

$P = \{n | n - \text{натуральное число, меньшее } 9\}$

$Y = \{y | y = \sin(x), x \in [-\pi, \pi]\}$

$\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \,\middle|\, p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\right\}$

Подмножество

- Каждый элемент множества A является элементом множества B
- $A \subseteq B$ A включено в B, A является подмножеством B

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$, $B = \{1,3,7\}$, $C = \{2,5,6,8\}$

$$B \subseteq A, \quad C \subseteq A$$

$D = \{2,5,6,8\}$

$$D \subseteq A, \quad D \subseteq C, \quad C \subseteq D$$

Собственное подмножество

- Каждый элемент множества A является элементом множества B, в множестве B присутствуют элементы, которых нет в A
- $A \subset B$ A полностью включено в B, A является собственным подмножеством B

$$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}, B = \{1,3,7\}, C = \{2,5,6,8\}$$

$$B \subset A, \quad C \subset A$$

$$D = \{2,5,6,8\}$$

$$D \subset A, \quad D \not\subset C, \quad C \not\subset D$$

Задачи

Какие из отношений верны для A и C? $A \subseteq C$, $C \subseteq A$, $A \subset C$, $C \subset A$?

$$A \subseteq B, B \subseteq C \Longrightarrow$$

$$A \subseteq C$$

$$A \subset B, B \subseteq C \Longrightarrow$$

$$A \subset C, A \subseteq C$$

$$A \subseteq B, B \subset C \Longrightarrow$$

$$A \subset C, A \subseteq C$$

$$B \subset A, C \subset B \Longrightarrow$$

$$C \subset A, C \subseteq A$$

Равенство множеств

- Равными называются множества, содержащие одни и те же элементы
- Если $A \subseteq \mathrm{B}$, и $B \subseteq A$, то $A = B$

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9\}$, $B = \{1,3,7\}$, $C = \{2,5,6,8\}$, $D = \{2,5,6,8\}$

$C = D$

Задачи

Какие из отношений верны для A и D? $A \subseteq D$, $D \subseteq A$, $A \subset D$, $D \subset A$, $A = D$?

$$A \subseteq B, B \subseteq C, C \subseteq A, D \subseteq C \Longrightarrow$$
$$D \subseteq A$$

$$A \subseteq B, B \subseteq C, C \subseteq A, D \subseteq C, C \subseteq D \Longrightarrow$$
$$A \subseteq D, D \subseteq A, A = D$$

$$A \subseteq B, B \subseteq C, C \subseteq B, D \subseteq C \Longrightarrow$$
$$A ? D$$

$$A \subseteq B, B \in C, C \subseteq D \Longrightarrow$$
$$A ? D$$

Круги Эйлера

- Схематичное изображение множеств и подмножеств

$A = \{1,2,4\},\ B = \{4,5,6,7\},\ C = \{3,8\}, D = \{5,6\}$

Пустое множество $\emptyset$

- Множество, не содержащее ни одного элемента
- Является подмножеством любого множества

$$M = \{x | x < 0, x \in \mathbb{N}\}$$

$$X = \{x |\ x^2 = -1, x \in \mathbb{N}\}$$

$$Y = \{\ \}$$

$$Z = \{x \mid x - \text{название дня недели, содержащее букву 'м'}\}$$

Универсальное множество $\mathbb{U}$ (Универсум)

- Множество, содержащее все объекты, рассматриваемые в некотором разделе математики, или при решении некоторой задачи
- Такое множество, подмножествами которого являются все рассматриваемые множества

$\mathbb{C}$ – универсальное в комплексном анализе

$\mathbb{B} = \{0,1\}$ – универсальное для алгебры логики

Современный латинский алфавит – универсальное множество для слов английского языка

Мощность (конечного) множества

- Количество элементов данного множества

$$|A| = |\{5,8,2\}| = 3$$

$$|\emptyset| = 0$$

$$\left|\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\right| = 2$$

Булеан множества

- Множество всех подмножеств
- $\mathcal{P}(A) = 2^A = \mathcal{B}(A) = \{M | M \subseteq A\}$

$A = \{1,2,3\}$

$$\mathcal{B}(A) = \left\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\right\}$$

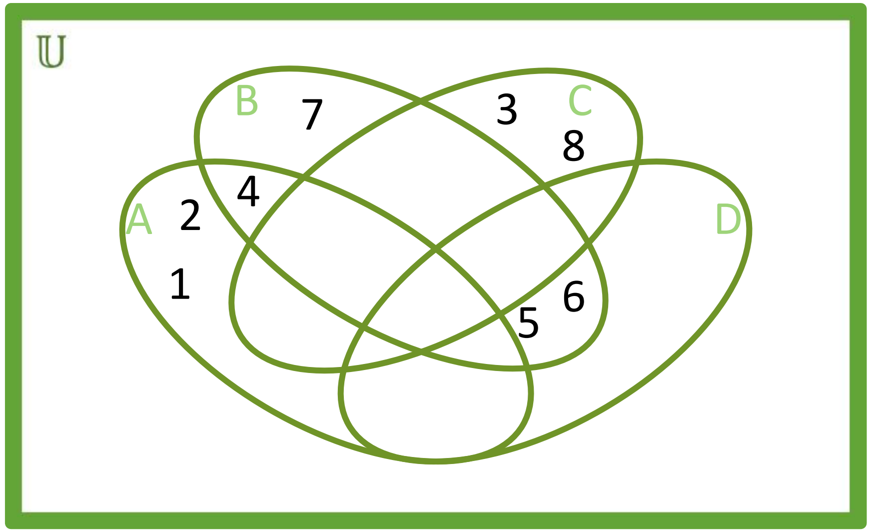
$|\mathcal{B}(A)| = \left|2^A\right| = 2^{|A|}$

Действия над множествами

Диаграммы Венна (Эйлера-Венна)

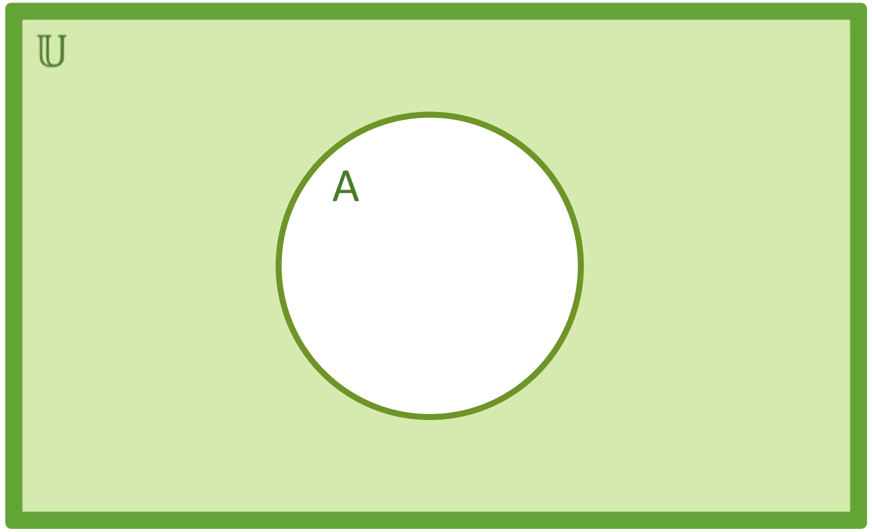
- Схематичное изображение всех возможных отношений нескольких подмножеств универсального множества

$A = \{1,2,4\},\ B = \{4,5,6,7\},\ C = \{3,8\}, D = \{5,6\}$



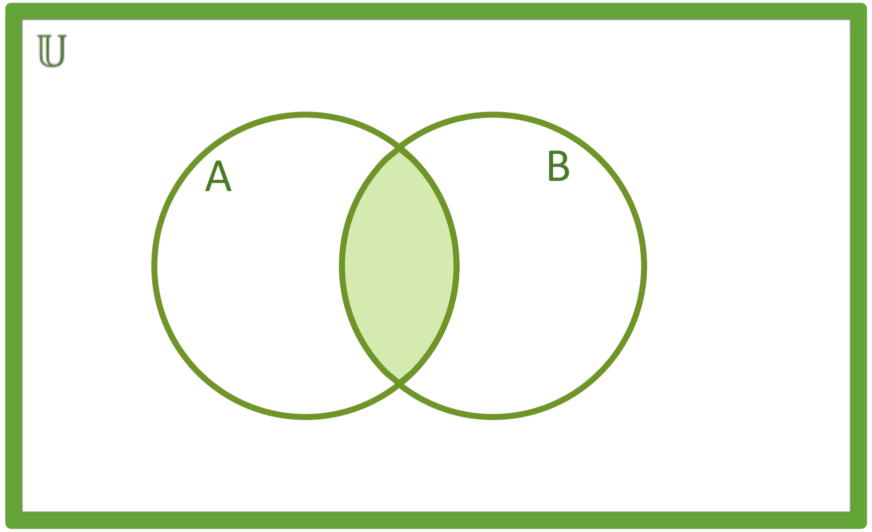
Дополнение множества

- Множество тех элементов универсального множества, которые не принадлежат множеству A
- $\bar{A} = \left\{x \,\middle|\, (x \in \mathbb{U}) \wedge (x \notin A)\right\}$



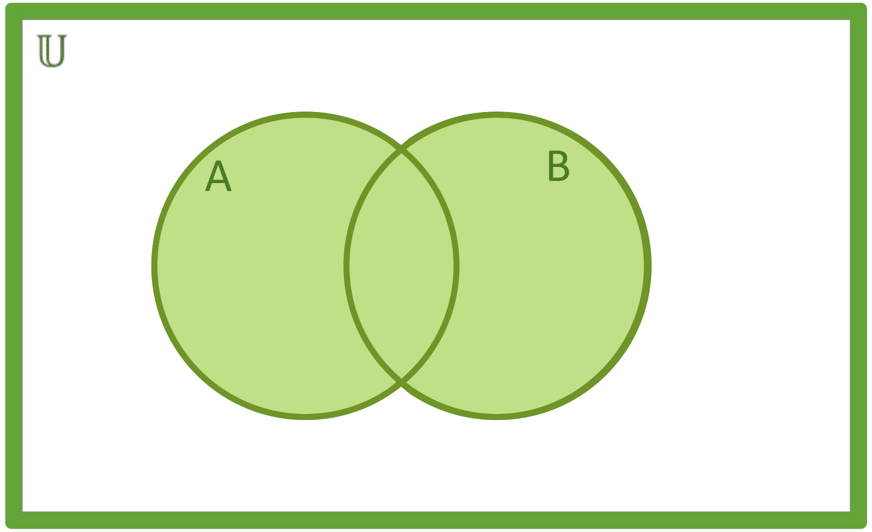
Пересечение множеств

- Множество содержащее только те элементы, что принадлежат одновременно множествам A и B
- $A \cap B = \left\{ x \,\middle|\, (x \in A) \land (x \in B) \right\}$



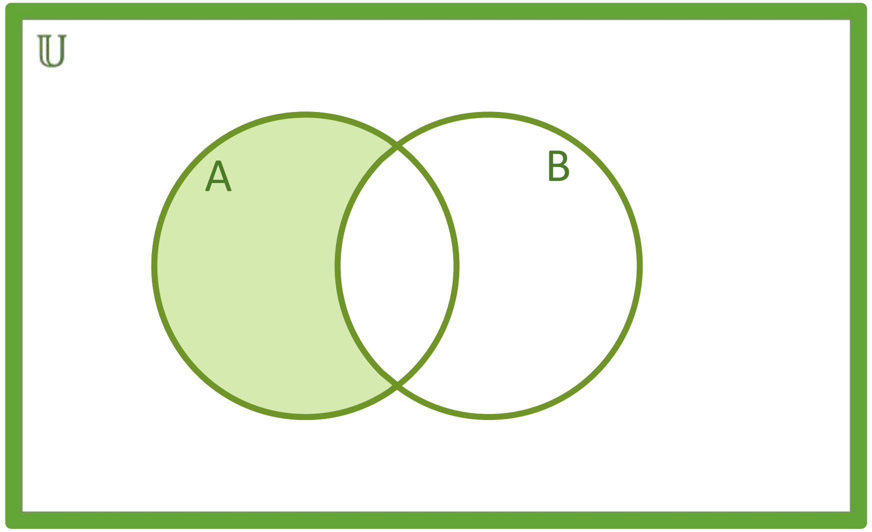
Объединение множеств

- Множество содержащее все элементы, что принадлежат хотя бы одному из множеств A или B
- $A \cup B = \left\{x \,\middle|\, (x \in A) \vee (x \in B)\right\}$



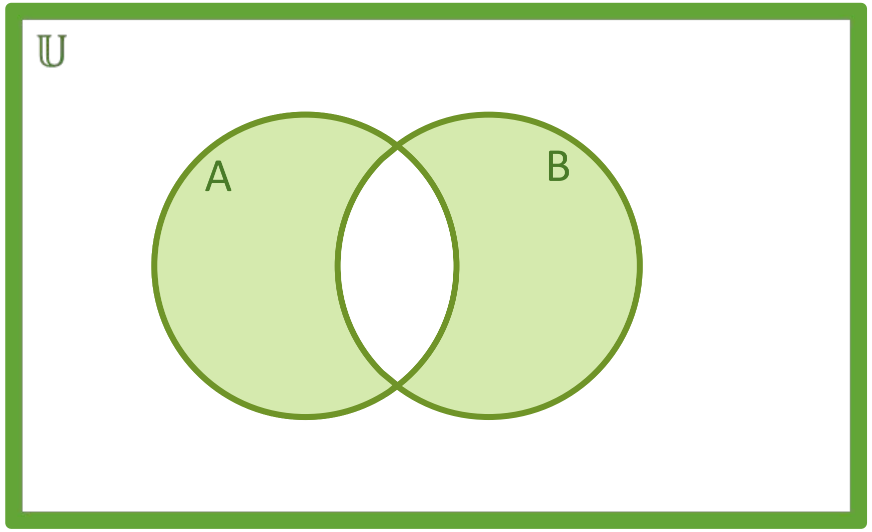
Разность множеств

- Множество тех элементов первого множества, что не содержаться во втором множестве
- $A \backslash B = A - B = \left\{x \,\middle|\, (x \in A) \land (x \notin B)\right\} = A \cap \bar{B}$



Симметрическая разность множеств

- Множество тех элементов универсума, что содержатся только в A или только в B
- $A \triangle B = A \dotminus B = \left\{x \,\middle|\, (x \in A\backslash \mathrm{B}) \wedge (x \in B\backslash \mathrm{A})\right\} = (A\backslash \mathrm{B}) \cup (B\backslash \mathrm{A})$



Выполняемые тождества

- Коммутативность операций

  $A \cup B = B \cup A$

  $A \cap B = B \cap A$

  $A \triangle B = B \triangle A$

- Ассоциативность операций

  $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

  $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

- Дистрибутивность операций

  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

  $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

- Поглощение

  $A \cap (A \cup B) = A$

  $A \cup (A \cap B) = A$

- Двойное дополнение

  $\bar{\bar{A}} = A$

- Идемпотентность

  $A \cap A = A$

  $A \cup A = A$

- Законы де Моргана

  $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$

  $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$

- Свойства пустого множества

  $A \cap \emptyset = \emptyset$

  $A \cup \emptyset = A$

- Свойства универсального множества

  $A \cap \mathbb{U} = A$

  $A \cup \mathbb{U} = \mathbb{U}$

- Свойства дополнения

  $A \cap \bar{A} = \emptyset$

  $A \cup \bar{A} = \mathbb{U}$

  $\bar{A} = \mathbb{U} \setminus \mathrm{A}$

Кортеж

Кортежем (вектором, упорядоченным множеством) называется упорядоченная последовательность элементов $(a_1, a_2, \dots a_n)$ (или $\langle a_1, a_2, \dots, a_n \rangle$), где $a_i \in A_i$.

a_i называется i компонентой (кортежа) вектора, или проекцией вектора на ось i.

Упорядоченную пару элементов можно представить как:

$$(a_1, a_2) = \{a_1, \{a_1, a_2\}\}$$

Декартово произведение множеств

Декартовым (прямым) произведением двух множеств называется множество упорядоченных пар элементов данных множеств

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in \mathrm{B}\}$$

Свойства:

$A \times B \neq B \times A$

$|A \times B| = |\mathrm{A}| \times |B|$

$A \times \emptyset = \emptyset$

$(A \times B) \times C \leftrightarrow A \times (B \times C)$

Степень множества

Определим по индукции:

$$A^1 = A$$

$$A^n = A \times A^{n-1} = A^{n-1} \times A$$

Нулевая степень определяется как:

$$A^0 = \emptyset$$

Мощность:

$$|A^n| = |A|^n$$

Пример

$\mathrm{A} \ = \ \{a_1, a_2\}$

$\mathrm{B} \ = \{b_1, b_2, \mathrm{b}_3\}$

$\mathrm{A} \times \mathrm{B} \ = \ \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3)\}$

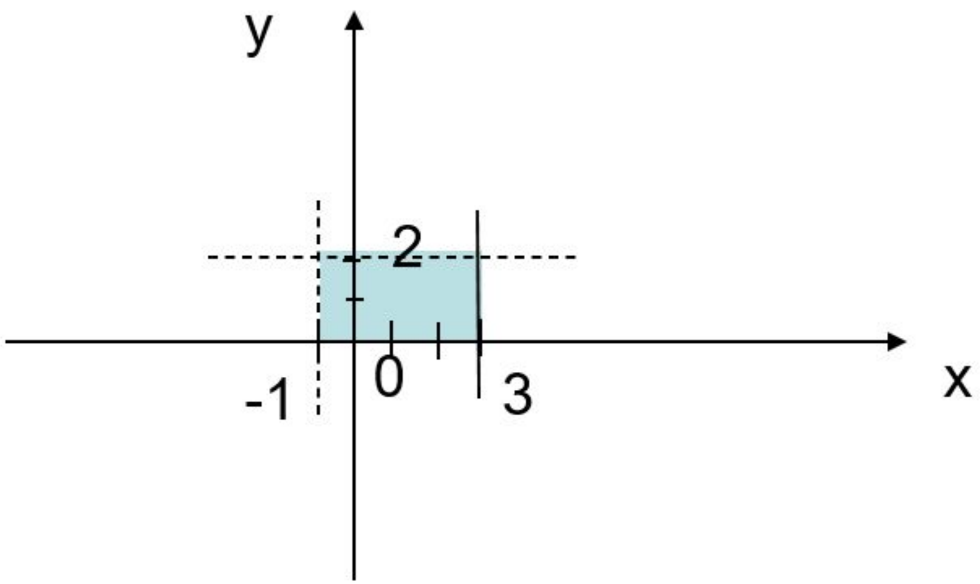
$|A \times B| = |A| \cdot |B| = 2 \cdot 3 = 6$

$\mathrm{A}^2 \ = \ \{(a_1, a_1), (a_1, a_2), (a_2, a_1), (a_2, a_2)\}$

$|A^2| = |A|^2 = 2^2 = 4$

Изображение декартова произведения

$$(-1;3]\times[0;2)$$



Свойства относительно операций над множествами

1. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
2. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
3. $A \times (B \backslash C) = (A \times B) \backslash (A \times C)$
4. $A \times (B \triangle C) = (A \times B) \triangle (A \times C)$

Отношения

Отношение

Отношением R, определенным на паре множеств A и B, называется любое подмножество их декартова произведения $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$.

$R = \{(a, b) | (a, b) \in A \times B\}$. Если a и b находятся в отношении R, то $(a, b) \in R$ или aRb.

Областью определения отношения R называется совокупность всех таких a, что хотя бы для одного b пара (a, b) принадлежит $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$.

Областью значений отношения R называют множество всех таких b, что хотя бы для одного элемента а пара (a, b) принадлежит $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$.

Обратным отношением R^{-1} к отношению $R \subseteq A \times B$ называется множество таких пар $(b, a) \subseteq B \times A$, что $(a, b) \in R$

Пример

$\text{A} = \{1, 2, 3\}$

$\text{B} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$R_1 = \{(a, b) | b ⋮ a\} = \{(a, b) | b \bmod a = 0\} =$
$\{(1, 1);\ (1, 2);\ (1, 3);\ (1, 4);\ (1, 5);\ (1, 6);\ (1, 7);\ (2, 2);\ (2, 4);\ (2, 6);\ (3, 3);\ (3, 6)\}$

$R_2 = \{(a, b) | a^2 + b^2 < 15\} = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2)\}$

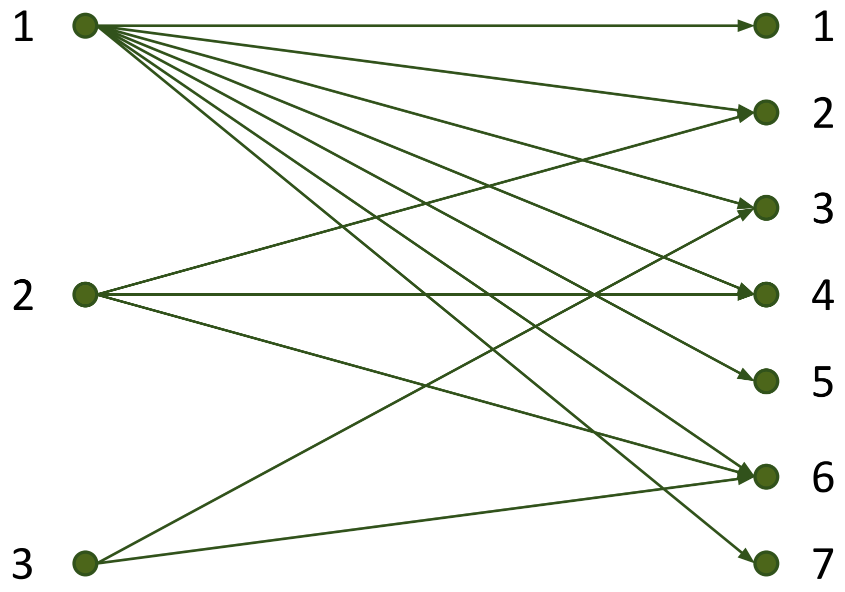
$R_3 = \{(a, b) | NOD(a, b) = 2\} = \{(2,2), (2,4), (2,6)\}$

Пример

$$R_1 = \{(1,1);\ (1,2);\ (1,3);\ (1,4);\ (1,5);\ (1,6);\ (1,7);\ (2,2);\ (2,4);\ (2,6);\ (3,3);\ (3,6)\}$$

$= \{(2,2), (2,4), (2,6)\}$

	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	0	1	0
3	0	0	1	0	0	1	0



Обратное отношение

Обратным отношением R^{-1} на $B \times A$ к отношению $R \subseteq A \times B$ называется множество $R^{-1} = \{(b, a) | (a, b) \in R\}$.

Например:

$A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{x, y, z\}$,

$R = \{(1, x), (1, z), (2, y), (3, z), (4, x), (4, y)\}$

$R^{-1} = \{(x, 1), (x, 4), (y, 2), (y, 4), (z, 1), (z, 3)\}$

Композиция отношений

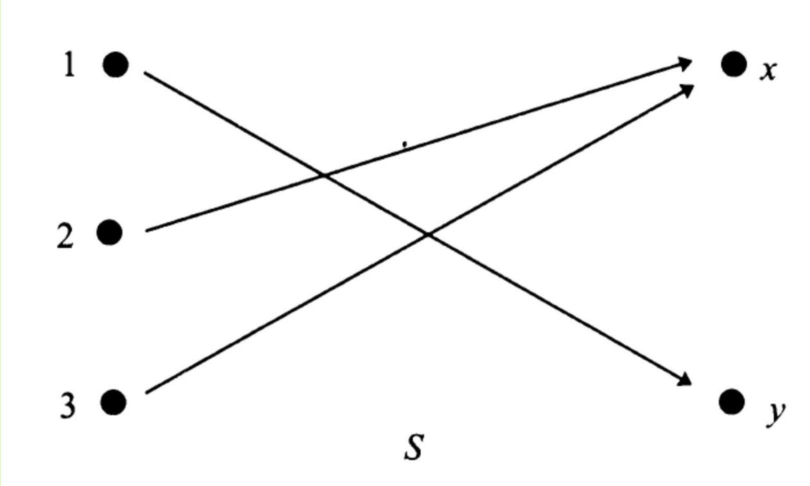
Если $R \subseteq A \times B,\ S \subseteq B \times C$, то композицией R и S называется следующее отношение:

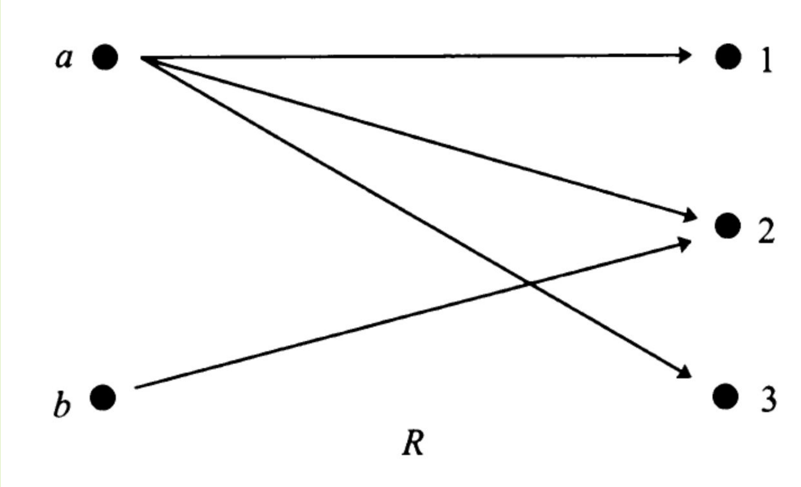
$$S \circ R = \{(a, c) | a \in A, c \in C, \exists b \in B: (a, b) \in R, (b, c) \in S\}.$$

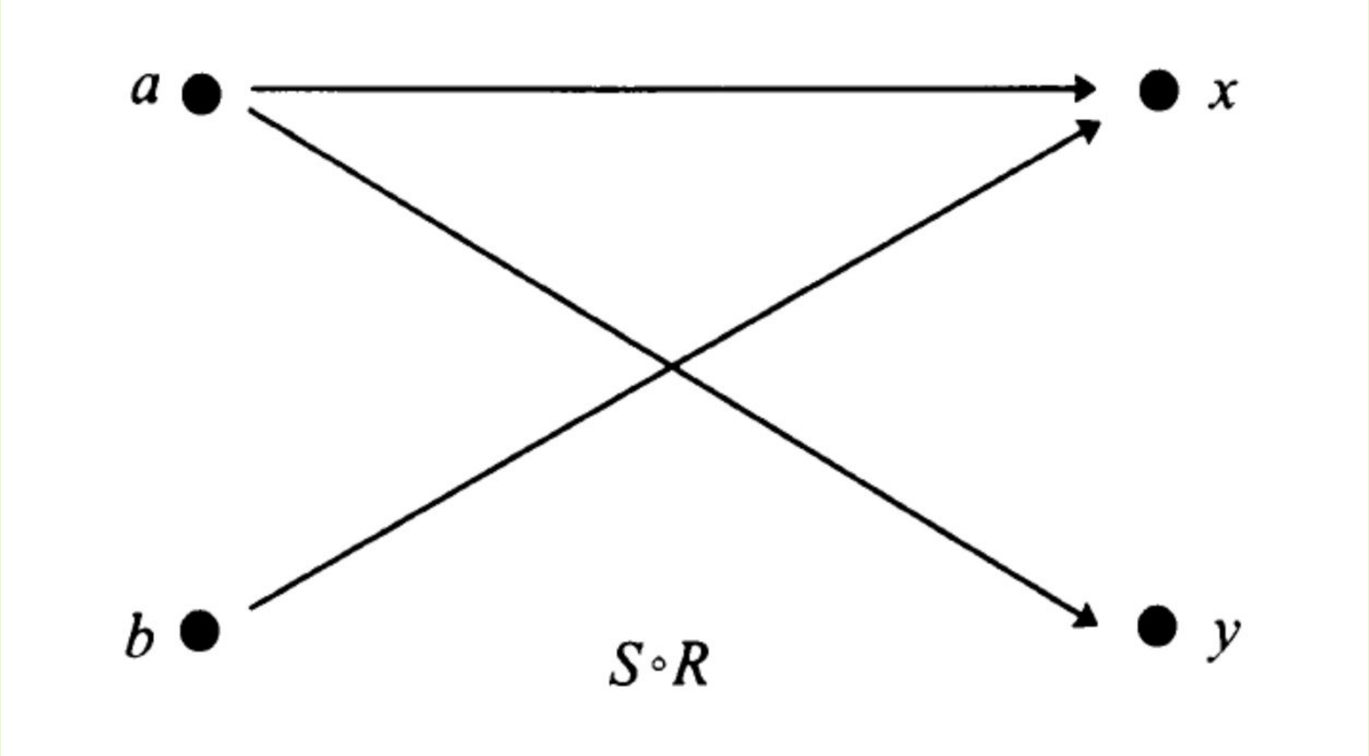
Например:

$R = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 2)\}, S = \{(1, y), (2, x), (3, x)\}.$

$$S \circ R = \{(a, y), (a, x), (b, x)\}$$


1
2
3
x
y
S


a
b
1
2
3
R


a
b
x
y
S∘R

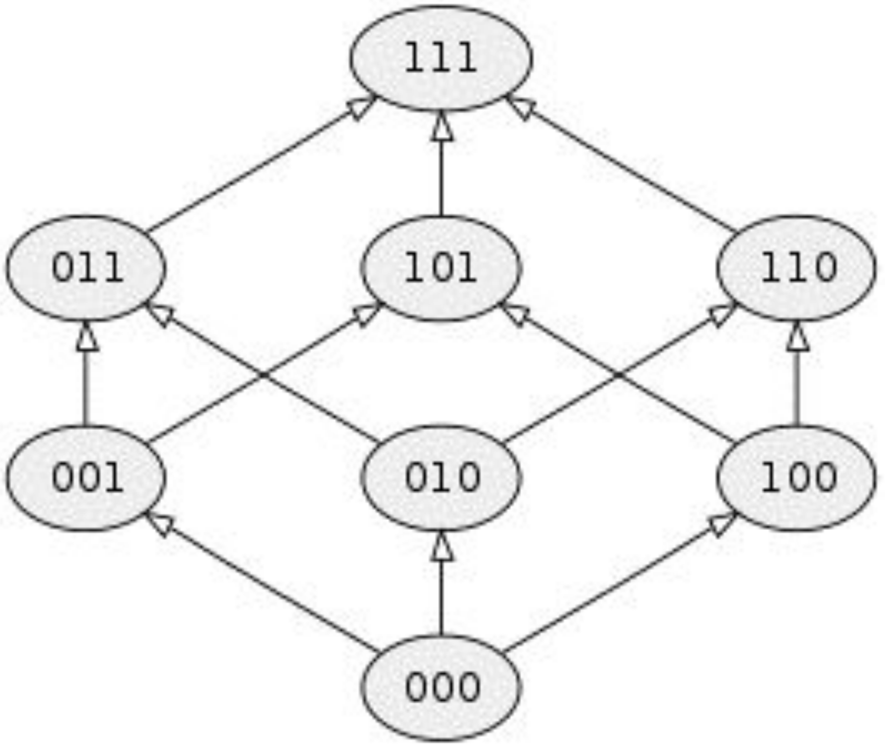
Бинарное отношение и его свойства

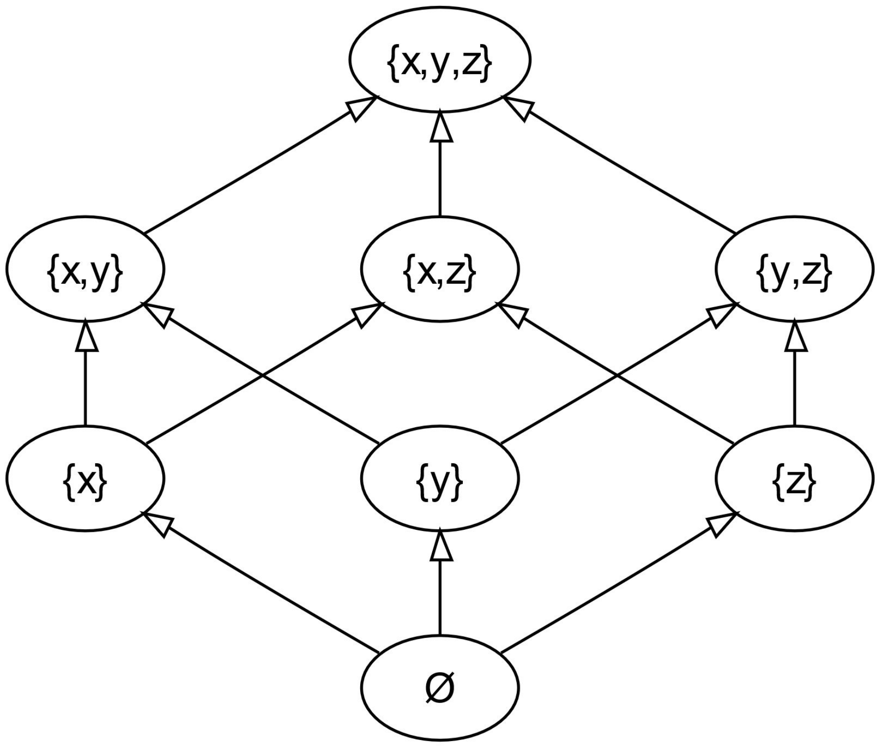
Бинарным отношением называется отношение $R \subseteq A \times A = A^2$.

1. Рефлексивность: $\forall a \in A, (a, a) \in R, \forall a \in A,$
2. Антирефлексивность: $\forall a, b \in A, (a, b) \in R \Rightarrow a \neq b,$
3. Симметричность: $\forall a, b \in A, (a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R,$
4. Антисимметричность: $\forall a, b \in A, \left((a, b) \in R\right) \wedge \left((b, a) \in R\right) \Rightarrow a = b,$
5. Асимметричность: $\forall a, b \in A, (a, b) \in \mathrm{R} \Rightarrow (b, a) \notin R,$
6. Транзитивность: $\forall a, b \in A, \left((a, b) \in R\right) \wedge \left((b, c) \in \mathrm{R}\right) \Rightarrow (a, c) \in R,$
7. Антитранзитивность: $\forall a, b \in A, \left((a, b) \in R\right) \wedge \left((b, c) \in \mathrm{R}\right) \Rightarrow (a, c) \notin R,$
8. Связность: $\forall a, b \in A \Rightarrow \left((a, b) \in R\right) \vee \left((b, a) \in R\right).$

Виды отношений

1. Эквивалентности — рефлексивное, симметричное, транзитивное:
   a) равенство чисел,
   b) равномощность множеств,
   c) параллельность прямых.
2. Нестрогого (частичного) порядка — рефлексивное, антисимметричное, транзитивное:
   a) отношения больше или равно, меньше или равно для чисел,
   b) отношение предшествования на наборах булевых значений,
   c) отношение несобственного подмножества для подмножеств $\mathbb{U}$,
   d) отношение делимости на множестве натуральных чисел.
3. Строгого порядка — антирефлексивное, асимметричное, транзитивное:
   a) отношения больше и меньше для чисел,
   b) лексикографический порядок слов в словаре.





Пример

Разбиение множества, фактор-множество

Для некоторого множества M разбиением называется некоторое множество $\{A_i\}$ его непустых подмножеств $A_i \subseteq M$ таких, что их попарные пересечения пусты, а само множество M равно их объединению.

$$A(M) = \left\{A_i \middle| A_i \in \mathcal{B}(A), A_i \neq \emptyset, A_i \cap A_j = \emptyset : i \neq j, \cup_i A_i = M\right\}$$

A_i – класс разбиения, блок разбиения.

Если на множестве A задано отношение эквивалентности, то оно разбивает множество на классы эквивалентности. Класс эквивалентности, порождённый элементом a: $[a]_R = \{x \in A | (x, a) \in R\}$.

Фактор-множеством по отношению R называется множество A_R всех классов эквивалентности.

Отображения (функции)

Отображение (функция)

Отображением $f: X \to Y$ называется такое подмножество множества $X \times Y$, что для любых пар $(x', y') \in f$, $(x'', y'') \in f$ из условия $y' \neq y''$ следует, что $x' \neq x''$. То есть каждому элементу из множества X сопоставлено не более одного элемента множества Y.

Для пары (x, y):

x – аргумент функции, или праобраз y,

y – значение функции, или образ x.

$D(f)$ - область определения функции (domain) – множество всех праобразов элементов множества Y.

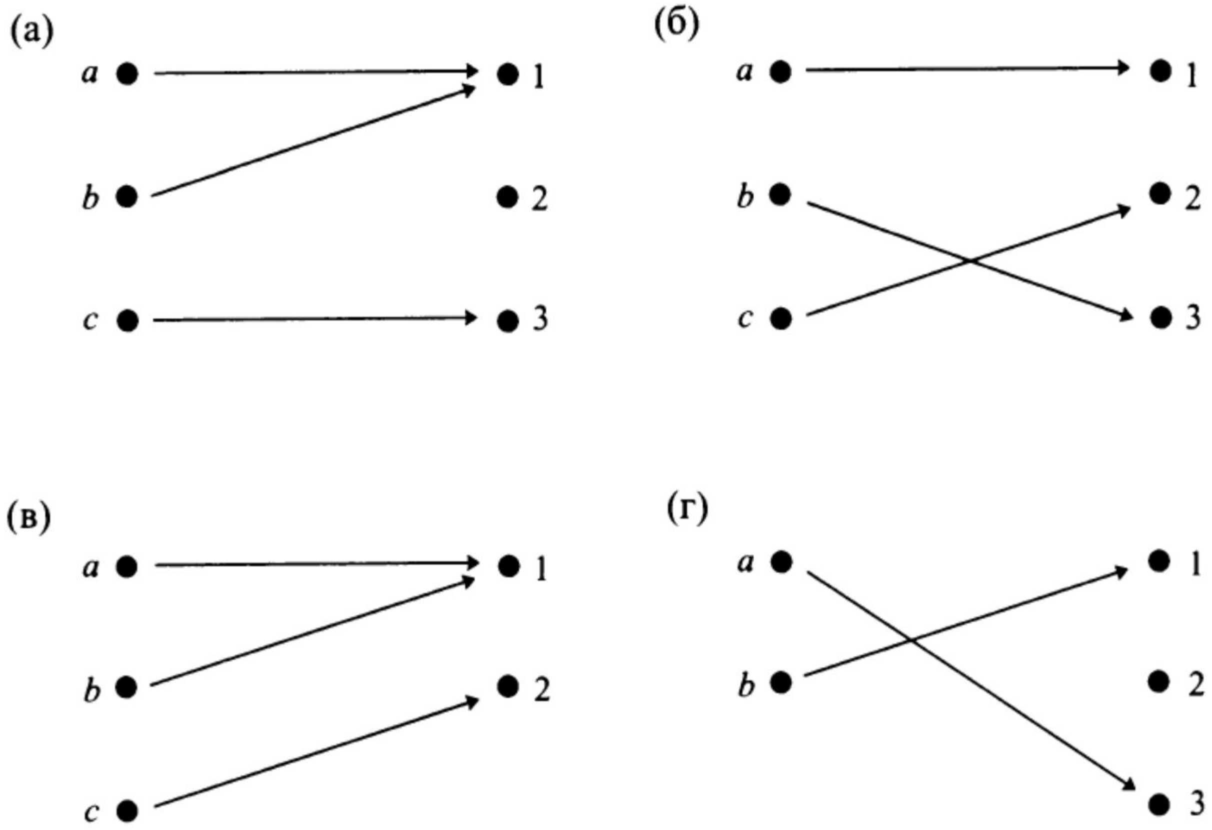
$E(f)$ - область значений функции (range) – множество всех образов элементов множества X.

Инъекция, сюръекция, биекция

Если при отображении $f: X \to Y$ область значений $E(f)$ совпадает с множеством Y, то отображение называется сюръективным (отображением "на").

Если при отображении $f: X \to Y$ различным элементам множества X соответствуют различные элементы множества Y $\left(x' \neq x'' \Rightarrow f(x') \neq f(x'')\right)$, то отображение называется инъективным (отображением "в").

Если отображение одновременно инъективно и сюръективно, то его называют биективным.



Пример

Обратная функция

Если отношение $f^{-1}: Y \to X$, является отображением (функцией), то она называется обратной функцией, а функция f – обратимой.

ТЕОРЕМА. Если функция $f: X \to Y$ является биекцией, то обратное отношение f^{-1} является функцией из Y в X, причём биективной.

ТЕОРЕМА. Если $f: X \to Y$ — биекция, то

a) $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$ для $\forall y \in Y$;

b) $f^{-1}\left(f(x)\right) = x$ для $\forall x \in \mathrm{X}$.

Композиция функций

Если заданы функции $f: X \to Y$ и $g: Y \to Z$, то их композицией также является функция $g \circ f: X \to Z$.

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big).$$

Бесконечные множества

Конечные и бесконечные множества

КОНЕЧНОЕ МНОЖЕСТВО

- Множество, количество элементов которого конечно.
- Множество, мощность которого равна мощности множества $\{x \mid 1 \leq x \leq n, n \in \mathbb{N}\}$.

БЕСКОНЕЧНОЕ МНОЖЕСТВО

- Множество, не являющееся конечным.
- Множество, мощность которого не меньше мощности множества натуральных чисел.
- Множество, для которого существует биекция с некоторым его собственным подмножеством.

Равномощность множеств

Множества A и B называются равномощными, если существует биективное (взаимно-однозначное) отображение множества A на множество B.

Отношение равномощности множеств является отношением эквивалентности (обладает свойствами рефлексивности, симметричности, транзитивности).

Бесконечные множества

СЧЁТНОЕ МНОЖЕСТВО

- Бесконечное множество, элементы которого возможно пронумеровать натуральными числами.
- Множество, для которого можно задать биекцию с множеством натуральных чисел.
- Бесконечное множество, равномощное множеству натуральных чисел.

Мощность множества обозначается $\aleph_0$.

НЕСЧЁТНОЕ МНОЖЕСТВО

КОНТИНУАЛЬНОЕ МНОЖЕСТВО (КОНТИНУУМ)

- Бесконечное множество, превосходящее по мощности счётное.
- Множество, для которого можно установить биекцию с множеством действительных чисел.
- Бесконечное множество, мощность которого эквивалентна мощности множества действительных чисел.

Континуумом также называется мощность данного множества $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$

Мощность множества

- Класс эквивалентности по отношению равномощности.

Источники

- Аляев Ю. А., Тюрин С. Ф. Дискретная математика и математическая логика.
- Андерсон Дж. Дискретная математика и комбинаторика.
- Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа. Т. 1.
- Новиков Ф. А. Дискретная математика для программистов.
- Хаггарти Р. Дискретная математика для программистов.