Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н.Ельцина

Лекция 2

Основные понятия теории погрешностей

Основные понятия

Истинное значение физической величины — идеальным образом характеризующее рассматриваемое свойство данного объекта как в количественном, так и в качественном отношении.

Действительное значение физической величины — значение физической величины, найденное экспериментально и настолько близкое к истинному, что в поставленной измерительной задаче оно может быть использовано вместо него.

Результат измерения — значение величины, полученное путем измерения.

Погрешность результата измерений — отклонение результата измерения X от истинного (или действительного) значения Q измеряемой величины:

$$\Delta X = X - Q$$

Основные понятия

Точность результата измерений — степень близости к нулю значения погрешности результата измерения.

Погрешность средства измерений — разность между показанием средства измерения и истинным (действительным) значением измеряемой физической величины.

Точность средства измерений — степень близости к нулю значения погрешности средства измерения.

Зависимость сопротивления проводника от температуры

t, °C	20	30	40
R, Ом	100,1	100,2	100,3

Классификация погрешностей

Погрешности измерений

- По способу выражения
- По характеру проявления
- По зависимости абсолютной погрешности от значений измеряемой
- По влиянию внешних условий
- По влиянию характера изменения измеряемой величины

Классификация погрешностей

По способу выражения

- Абсолютна
я
погрешнос
ть
- Относительна
я погрешность
- Приведенна
я
погрешност
ь средства
измерений

Классификация погрешностей

По способу выражения

Абсолютная погрешность — разница между результатом измерения *X* и истинным (или действительным) значением *Q*:

$$\Delta X = X - Q$$

Относительная погрешность — отношение абсолютной погрешности измерения к результату измерения величины:

$$\delta = \frac{\Delta X}{X} \quad \text{или} \quad \delta = \frac{\Delta X}{X} \cdot 100\%$$

Классификация погрешностей

По способу выражения

Приведенная погрешность средства измерений — относительная погрешность, в которой абсолютная погрешность средства измерений отнесена к условно принятому значению X_N, постоянному во всем диапазоне измерений или его части:

$$\gamma = \frac{\Delta X}{X_N} \quad \text{или} \quad \gamma = \frac{\Delta X}{X_N} \cdot 100\%$$

X_N — ***нормирующее значение***. Чаще всего за него принимают верхний предел измерений данного средства измерения. Приведенную погрешность обычно выражают в процентах.

Классификация погрешностей

По характеру проявления

- Случайные
- Систематические
- Прогрессирующие
- Промахи

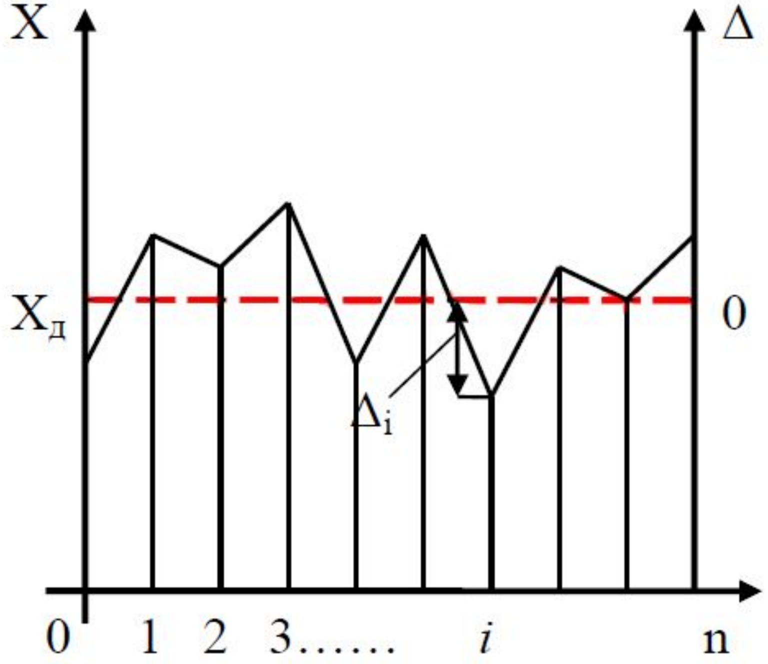
Классификация погрешностей

По характеру проявления

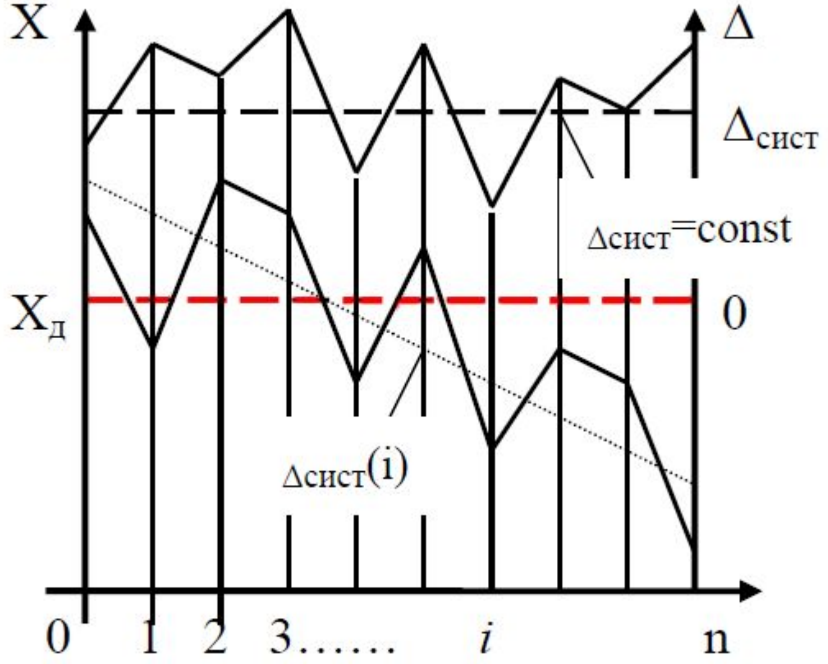
Случайная погрешность – составляющая погрешности измерения, изменяющаяся случайным образом (по знаку и значению) в серии повторных измерений одного и того же размера физической величины, проведенных с одинаковой тщательностью в одних и тех же условиях.

Систематическая погрешность – составляющая погрешности измерения, остающаяся постоянной или закономерно меняющаяся при повторных измерениях одной и той же физической величины.

Классификация погрешностей



Проявление случайной погрешности



Проявление систематической погрешности (постоянной и переменной)

Классификация погрешностей

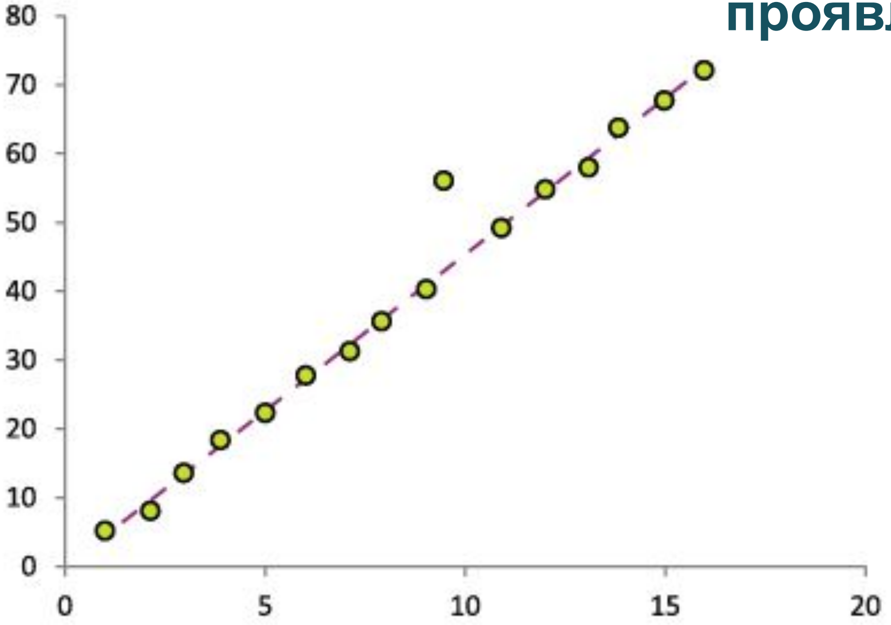
По характеру проявления

Прогрессирующая (дрейфовая) погрешность – это непредсказуемая погрешность, медленно меняющаяся во времени. Изменение во времени прогрессирующих погрешностей собой представляет нестационарный случайный процесс. Прогрессирующие погрешности могут быть скорректированы поправками только в данный момент времени, а далее вновь непредсказуемо изменяются.

Грубая погрешность (промах) – это случайная погрешность результата отдельного наблюдения, входящего в ряд измерений; для данных условий она резко отличается от остальных результатов этого ряда.

Классификация погрешностей

По характеру проявления



Расчет сопротивления элемента электрической цепи:

$$R_X = \frac{U}{(I - U / R_V)}$$

Наличие промаха в результатах наблюдений

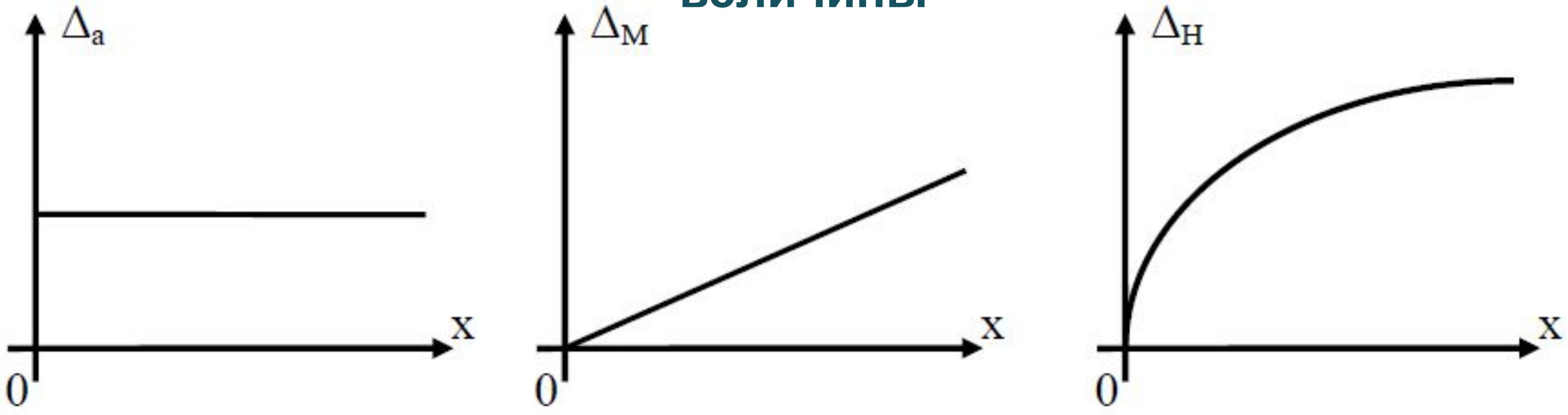
Классификация погрешностей

По зависимости абсолютной погрешности от значений измеряемой величины

- **Аддитивн
ые**
- **Мультипликативн
ые**
- **Нелинейн
ые**

Классификация погрешностей

По зависимости абсолютной погрешности от значений измеряемой величины



Аддитивные погрешности (не зависят от измеряемой величины)

Мультипликативные погрешности (прямо пропорциональны измеряемой величины)

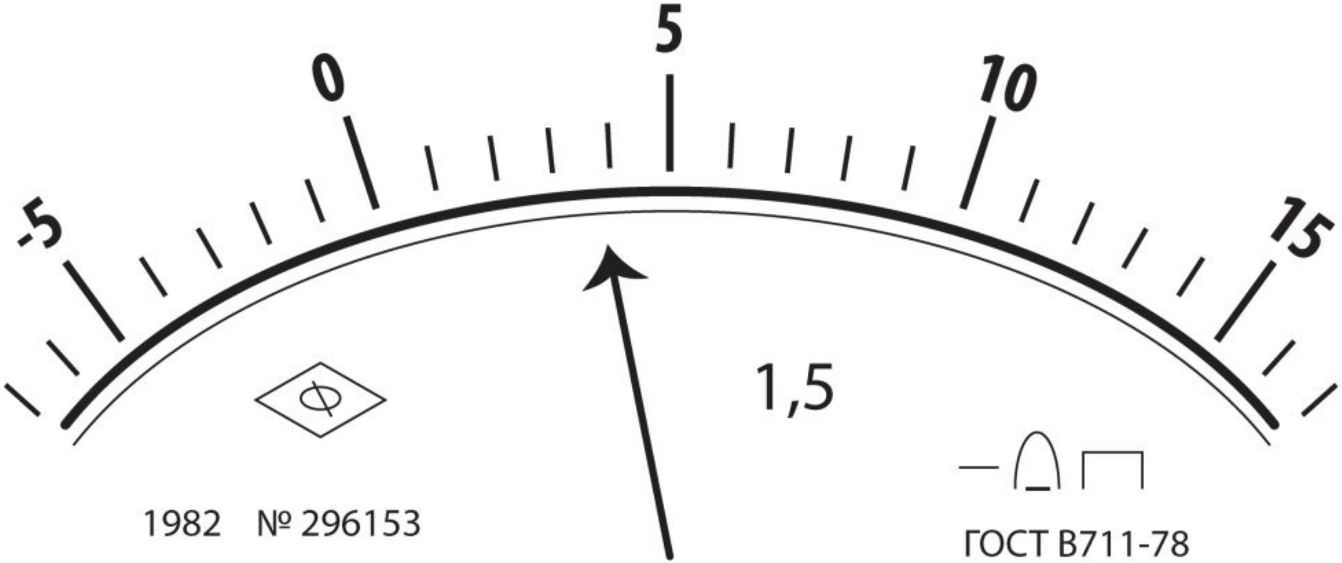
Нелинейные погрешности (зависят от измеряемой величины нелинейно)

Классификация погрешностей

Формула для определения пределов допускаемой погрешности	Примеры пределов допускаемой основной погрешности	Обозначение класса точности: В документах	Обозначение класса точности: На средствах
	Абсолютная погрешность		
$\Delta = \pm a$	$\Delta = \pm 2$ *Гц*	Класс точности М	М
$\Delta = \pm(a + bX)$	$\Delta = \pm(2 + 0{,}03 f)$ *Гц*	Класс точности С	С
	Приведенная погрешность		
$\gamma = \pm \frac{100\lvert\Delta\rvert}{X_N}\% = \pm p\%$	$\gamma = \pm 1{,}5\%$	Класс точности 1,5	1,5
	$\gamma = \pm 0{,}5\%$	Класс точности 0,5	$\underline{0{,}5}$
	Относительная погрешность		
$\delta = \pm \frac{100\lvert\Delta\rvert}{X}\% = \pm c\%$	$\delta = \pm 0{,}5\%$	Класс точности 0,5	0,5
$\delta = \pm \frac{100\lvert\Delta\rvert}{X}\% = \pm\left[c + d\left(\frac{X_k}{X} - 1\right)\right]\%$	$\delta = \pm[0{,}02 + 0{,}01(X_k / X) - 1]\%$	Класс точности 0,02/0,01	0,02/0,01

Классификация погрешностей

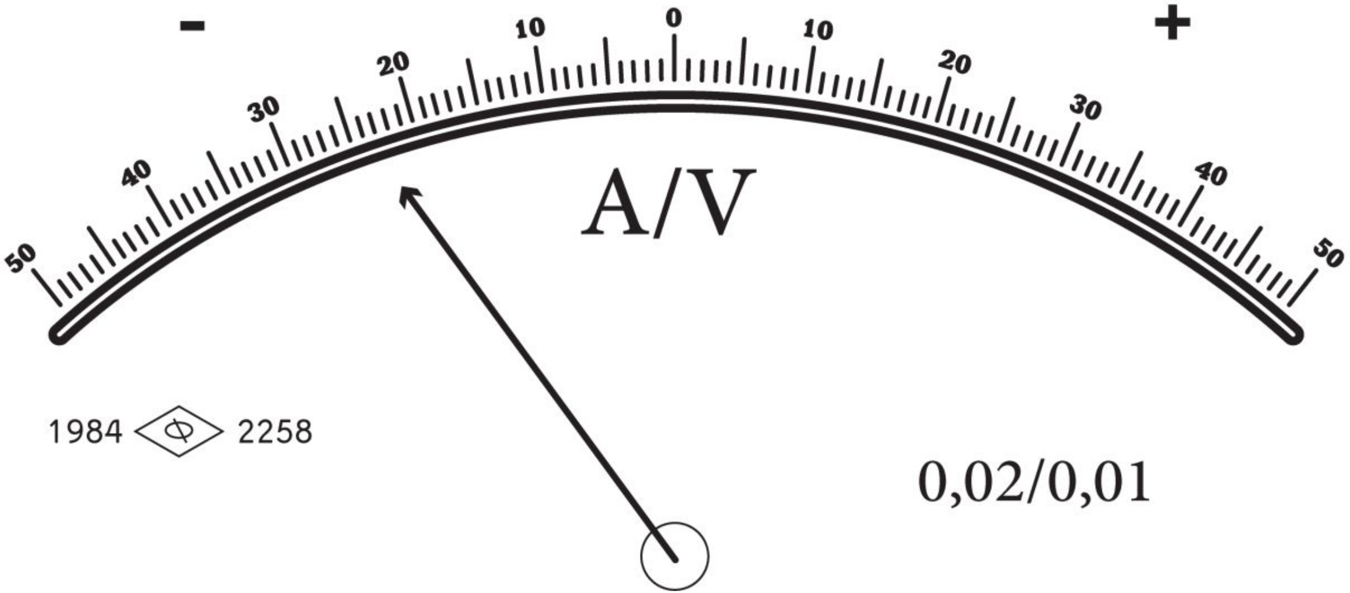
Обозначение классов точности



Лицевая панель амперметра
класса точности 1,5 с равномерной шкалой

Классификация погрешностей

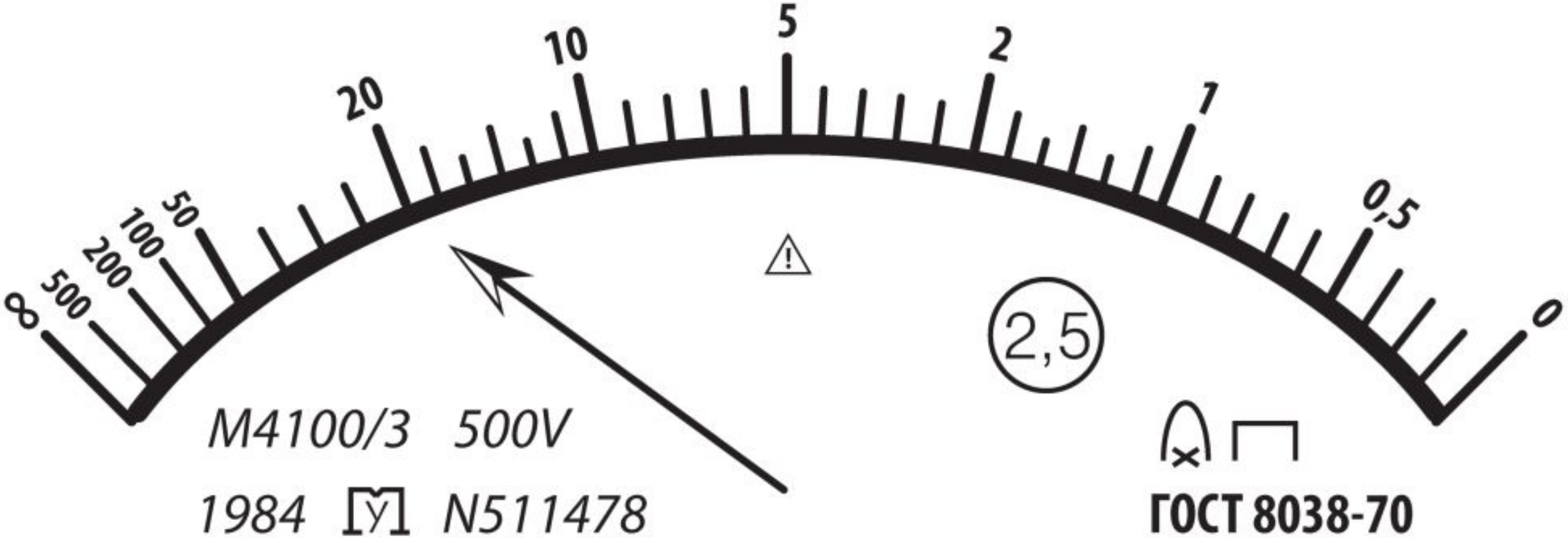
Обозначение классов точности



Лицевая панель ампервольтметра класса точности 0,02/0,01 с равномерной шкалой

Классификация погрешностей

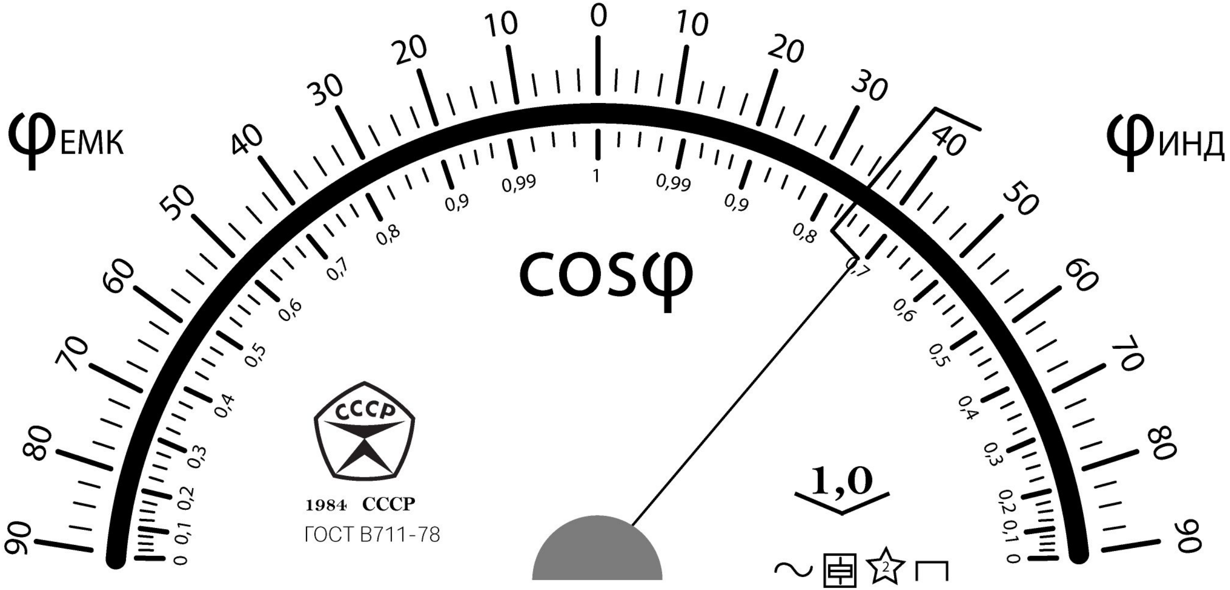
Обозначение классов точности



Лицевая панель мегаомметра класса точности 2,5

Классификация погрешностей

Обозначение классов точности



Лицевая панель фазометра класса точности 1,0 с существенно неравномерной шкалой

Классификация погрешностей

По влиянию внешних условий

Основные погрешности

Дополнительные погрешности

Классификация погрешностей

По влиянию внешних условий

Основная погрешность средства измерений – погрешность средства измерения, применяемого в нормальных условиях. Для каждого средства оговариваются условия эксплуатации, при которых нормируется его погрешность.

Дополнительная погрешность средства измерений – составляющая погрешности средства измерения, возникающая дополнительно к основной погрешности, вследствие отклонения какой-либо из влияющих величин от нормального ее значения или вследствие ее выхода за пределы нормальной области значений.

Классификация погрешностей

По влиянию внешних условий

Нормальные условия, как правило, подразумевают выполнение в ходе измерений следующих условий:

– температура окружающей среды (20±5) °С;
– относительная влажность (60±15) %;
– напряжение питания сети (220,0±4,4) В;
– частота питания сети (50±1) Гц;
– отсутствие внешних электрических и магнитных полей;
– положение прибора горизонтальное, в пределах ±2°.

$\hat{X} = X + 0,01X$ – значение измеренного напряжения при нормальной температуре

Классификация погрешностей

По влиянию внешних условий

$$\Delta X_{доп} = X\left(\frac{T}{T_{норм}} - 1\right),$$

– дополнительная погрешность, возникающая при отклонении нормального значения температуры более чем на 10 °C

$$\hat{X} = X + 0,01X + X\left(\frac{T}{T_{норм}} - 1\right)$$

– значение измеренного напряжения при температуре, выходящей за пределы нормальной

Классификация погрешностей

В зависимости от влияния характера изменения измеряемых величин

Статистические погрешности

Динамические погрешности

Классификация погрешностей

В зависимости от влияния характера изменения измеряемых величин

Статическая погрешность средства измерений – погрешность средства измерений, применяемого при измерении физической величины, принимаемой за неизменную.

Динамическая погрешность средства измерений – погрешность средства измерений, возникающая при измерении изменяющейся (в процессе измерений) физической величины.

Правила представления результатов измерений

Значащие цифры данного числа – все цифры, кроме нуля слева. При этом нули, следующие из множителя 10^n (n – целое число), не учитываются.

Пример:

0,2396 – 4 значащие цифры, первая цифра – 2;

0,00173 – 3 значащие цифры, первая цифра – 1;

30170 – 5 значащих цифр, первая цифра – 3, последний нуль – также значащая цифра;

$301{,}7\cdot10^2$ – 4 значащие –цифры, первая цифра – 3, последняя – 7;

20000 – 5 значащих цифр, первая цифра – 2, все последующие нули – также значащие цифры;

$20\cdot10^3$ – 2 значащие цифры, первая цифра – 2, вторая цифра – 0, нули, следующие из множителя 10^3 , не учитывают;

$0{,}02\cdot10^6$ – одна и единственная значащая цифра – 2

Правила представления результатов измерений

Значащие цифры приближенного числа называются ***верными***, если абсолютная погрешность приближенного числа не превышает единицы последнего разряда.

Примеры:

1. Плотность ртути 13,5975 г/см^3. Округлим это значение до сотых: 13,60 г/см^3.

Абсолютная погрешность округления $\Delta X = 0{,}0045 \leq 0{,}01.$

2. Получен результат измерения (140±5). Цифра «0» не будет верной, так как абсолютная погрешность больше единицы последнего разряда.

Правила представления результатов измерений

Стандарт СЭВ СТ СЭВ 543-77

1. В случае, если первая из отбрасываемых цифр (считая слева направо) меньше 5, то последняя сохраняемая цифра не меняется. Лишние цифры в целых числах заменяются нулями, а в десятичных дробях отбрасываются.

До округления:	***После округления:***
3,4824	3,48
285,3	285
22,482	20
19,2400	19,24

Правила представления результатов измерений

Стандарт СЭВ СТ СЭВ 543-77

2. В случае, если первая из отбрасываемых цифр (считая слева направо) больше 5, либо 5, и после нее идут другие цифры, то последняя сохраняемая цифра увеличивается на единицу.

До округления:	*После округления:*
6783,6	6784
12,34701	12,35
12,452	12,5
19,98281	20,0

Правила представления результатов измерений

Стандарт СЭВ СТ СЭВ 543-77

3. В случае, если первая из отбрасываемых цифр равна 5 и она является крайней справа либо за ней идут нули, то последняя сохраняемая цифра увеличивается на единицу. Если отбрасываемая цифра получилась в результате предыдущего округления в большую сторону, то последняя сохраняемая цифра сохраняется. Если отбрасываемая цифра получилась в результате предыдущего округления в меньшую сторону, то последняя оставшаяся цифра увеличивается на единицу.

До округления:	***Предыдущий этап***	***После округления:***
0,145	-	0,15
0,15	0,149	0,1
0,25	0,252	0,3

Правила представления результатов измерений

Стандарт СЭВ СТ СЭВ 543-77

4. При записи результата измерения на первом этапе округляются погрешности измерений. Округление выполняется по следующему правилу: если первая значащая цифра — единица или двойка, то после округления оставляют две значащие цифры. Если же первая значащая цифра — тройка и более, то оставляют одну значащую цифру.

До округления:	***После округления:***
0,17295	0,17
4,8329	5
0,97283	1,0
0,006298	0,006 или $0{,}6\cdot10^{-2}$ или $6\cdot10^{-3}$

Правила представления результатов измерений

Стандарт СЭВ СТ СЭВ 543-77

5. Далее округляется само числовое значение ФВ, причем ее количество знаков после запятой должно совпадать с количеством знаков после запятой для погрешности.

До округления:	*После округления:*
3,4874±0,17295	3,49±0,17
285,396±4,8329	285±5
12,482±0,97283	12,5±1,0
19,98281±0,8138	20,0±0,8

Правила представления результатов измерений

Стандарт СЭВ СТ СЭВ 543-77

6. Если при округлении погрешности указан порядок, т.е. 10^n, то такой же порядок должен быть и у самой величины, при этом оба числа заключаются в скобки, и множитель 10^n указывается один раз.

До округления:	*После округления:*
0,283984±0,006298	0,284±0,006 или $(28{,}4\pm0{,}6)\cdot10^{-2}$ или $(284\pm6)\cdot10^{-3}$
72903±384,53	72900±400 или $(72{,}9\pm0{,}4)\cdot10^{3}$ или $(729\pm4)\cdot10^{2}$
2374±48	2370±50 или $(2{,}37\pm0{,}05)\cdot10^{3}$ или $(23{,}7\pm0{,}5)\cdot10^{2}$

Правила представления результатов измерений

Арифметические операции с приближенными числами

Возведение в степень и извлечение корня

При возведении в степень приближенного числа следует сохранить в результате столько десятичных знаков, сколько их у исходного числа.

Пример: $(3{,}4\cdot10^2)^3=39304000\approx3{,}9\cdot10^7$

Сложение и вычитание

При сложении и вычитании приближенных чисел сохраняется столько десятичных знаков, сколько их имеет слагаемое с минимальным количеством.

Пример: $5{,}14+12{,}1+6{,}353=23{,}593\approx26{,}6$

Умножение и деление

При умножении и делении приближенных чисел сохраняется столько десятичных знаков, сколько имеет приближенное число с минимальным количеством.

Пример: $1{,}5\cdot35=52{,}5\approx52$

Примеры заданий

1. Число 83,26 найдено с относительной погрешностью 0,3%. Найти абсолютную погрешность округления.

Примеры заданий

1. **Число 83,26 найдено с относительной погрешностью 0,3%. Найти абсолютную погрешность округления.**

Относительная погрешность $\delta = \dfrac{\Delta X}{X}$

В нашем случае *δ = 0,3%, X = 83,26,* отсюда $\Delta X = (X \cdot \delta)/100\%$

Получаем $\Delta X = 0{,}24978$

Примеры заданий

2. **Найти абсолютные и относительные погрешности числа e = 2,71828182…, заданного двумя и трёмя цифрами после запятой.**

Примеры заданий

2. **Найти абсолютные и относительные погрешности числа e = 2,71828182…, заданного двумя и трёмя цифрами после запятой.**

Две цифры после запятой

X = 2,72

ΔX = 0,0017118..≈ 0,0017

$$\delta = \frac{0{,}0017}{2{,}72} \cdot 100\% \approx 0{,}06\%$$

Три цифры после запятой

X = 2,718

ΔX = 0,0002818..≈ 0,00028

$$\delta = \frac{0{,}00028}{2{,}718} \cdot 100\% \approx 0{,}010\%$$

Примеры заданий

3. **Округлить число *x = 4,45575250* до шести, пяти и т.д. десятичных знаков и до целого числа.**

Примеры заданий

3. **Округлить число $x = 4{,}45575250$ до шести, пяти и т.д. десятичных знаков и до целого числа.**

$x = 4{,}45575250$ – исходное число
$x \approx 4{,}4557526$ – правило 3 округления чисел
$x \approx 4{,}455753$ – правило 2 округления чисел
$x \approx 4{,}45575$ – правило 1 округления чисел
$x \approx 4{,}4558$ – правило 3 округления чисел
$x \approx 4{,}456$ – правило 2 округления чисел
$x \approx 4{,}46$ – правило 2 округления чисел
$x \approx 4{,}5$ – правило 2 округления чисел
$x \approx 4$ – правило 3 округления чисел

Примеры заданий

4. **Вычислить верные значащие цифры чисел.**

   $X = 0{,}004507$ при $\Delta = 0{,}00006$

   $X = 12{,}396$ при $\Delta = 0{,}03$.

   $X = 0{,}037862$ при $\Delta = 0{,}007$

Примеры заданий

4. Вычислить верные значащие цифры чисел.

$X = 0{,}004507$ при $\Delta = 0{,}00006$. $0{,}00006 < 0{,}0001$, следовательно, значащими цифрами будут $X = \underline{0{,}004\,5}07$

$X = 12{,}396$ при $\Delta = 0{,}03$. $0{,}03 < 0{,}1$, следовательно, значащими цифрами будут $X = \underline{12{,}3}96$

$X = 0{,}037862$ при $\Delta = 0{,}007$. $0{,}007 < 0{,}01$, следовательно, значащими цифрами будут $X = \underline{0{,}03}7862$

Примеры заданий

5. Получено значение физической величины 2,32540874 с погрешностью 0,162875. Записать результат согласно правилам представления погрешностей.

Примеры заданий

5. **Получено значение физической величины 2,32540874 с погрешностью 0,162875. Записать результат согласно правилам представления погрешностей.**

— Округляем погрешность до двух значащих цифр: 0,16;

— Округляем результат так, чтобы последняя значащая находилась на той же позиции, что и последняя значащая цифра погрешности: 2,33;

— Результат: 2,33±0,16

Оценка погрешностей при косвенных измерениях

Пусть представляющая интерес величина ξ является функцией ряда непосредственно измеримых величин *x, y, z, ...*

$$\xi = f(x, y, z....)$$

Для абсолютных погрешностей справедливы соотношения:

$$|\Delta X| << X, \quad |\Delta Y| << Y, \quad |\Delta Z| << Z...$$

Примем погрешность за малое приращение измеряемой величины:

$$\Delta X \approx dX, \quad \Delta Y \approx dY, \quad \Delta Z \approx dZ.... \quad \Delta\xi \approx d\xi$$

Оценка погрешностей при косвенных измерениях

Рассмотрим частные производные функции *ξ:*

$$\Delta\xi = \left|\frac{\partial f}{\partial X}\cdot\Delta X\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial Y}\cdot\Delta Y\right| + \left|\frac{\partial f}{\partial Z}\cdot\Delta Z\right| + \ldots$$

Слагаемое $\Delta\xi_X = \left|\frac{\partial f}{\partial X}\cdot\Delta X\right|$ соответствует погрешности, которую вносит в погрешность *Δξ* неточность измерения величины *X*.

Оценка погрешностей при косвенных измерениях

Формулы расчета погрешностей для ряда наиболее часто встречающихся функций (1)

$\xi = f(X,Y)$	$\Delta\xi$	$\delta_\xi = \dfrac{\Delta\xi}{\xi}$
$X+Y$	$\Delta X + \Delta Y$	$\dfrac{\Delta X + \Delta Y}{X+Y}$
$X-Y$	$\Delta X + \Delta Y$	$\dfrac{\Delta X + \Delta Y}{\lvert X-Y\rvert}$
$X \cdot Y$	$\Delta X \cdot X + \Delta Y \cdot Y$	$\dfrac{\Delta X}{X} + \dfrac{\Delta Y}{Y} = \delta_X + \delta_Y$

Оценка погрешностей при косвенных измерениях

Формулы расчета погрешностей для ряда наиболее часто встречающихся функций

$\xi = f(X,Y)$	$\Delta\xi$	$\delta_\xi = \dfrac{\Delta\xi}{\xi}$
X/Y	$\dfrac{\Delta X \cdot X + \Delta Y \cdot Y}{Y^2}$	$\dfrac{\Delta X}{X} + \dfrac{\Delta Y}{Y} = \delta_X + \delta_Y$
X^n	$\lvert n\rvert \cdot X^{n-1}\Delta X$	$\lvert n\rvert \cdot \dfrac{\Delta X}{X} = n \cdot \delta_X$
$\sqrt[n]{X}$	$\left\lvert\dfrac{1}{n}\right\rvert \cdot X^{\frac{1}{n}-1}\Delta X$	$\left\lvert\dfrac{1}{n}\right\rvert \cdot \dfrac{\Delta X}{X} = \dfrac{1}{n} \cdot \delta_X$

Примеры заданий

1. **Размеры прямоугольника составляют *a*=3,3±0,1 см и *b*=5,2±0,1 см. Найти площадь и периметр прямоугольника**

Периметр прямоугольника: $p = 2 \cdot (a + b) = 2 \cdot (3{,}3 + 5{,}2) = 17$

Абсолютная погрешность: $\Delta p = 2 \cdot (\Delta a + \Delta b) = 2 \cdot (0{,}1 + 0{,}1) = 0{,}4$

Относительная погрешность: $$\delta p = \frac{\Delta X + \Delta Y}{X + Y} = \frac{0{,}1 + 0{,}1}{3{,}3 + 5{,}2} = 0{,}0235294117\ldots \approx 0{,}024$$

Ответ: периметр прямоугольника составляет 17,0±0,4 см, δ=2,4%.

Примеры заданий

1. **Размеры прямоугольника составляют *a*=3,3±0,1 см и *b*=5,2±0,1 см. Найти площадь и периметр прямоугольника**

Площадь прямоугольника: $s = a \cdot b = 3{,}3 \cdot 5{,}2 = 17{,}16$

Относительная погрешность: $\delta s = \delta_a + \delta_b = \dfrac{0{,}1}{3{,}3} + \dfrac{0{,}1}{5{,}2} = 0{,}049261 \approx 0{,}050$

Абсолютная погрешность: $\Delta s = \Delta s \cdot s = 17{,}16 \cdot 0{,}050 = 0{,}858 \approx 0{,}9$

Ответ: площадь прямоугольника составляет 17,2±0,9 см^2, δ=5%.

Примеры заданий

2. **Дан цилиндр массой m=60,01±0,01 г, диаметром d=25,010±0,005 мм и высотой h=30,000±0,005 мм. Найти плотность цилиндра.**

Плотность цилиндра: $$\rho = \frac{4\cdot m}{\pi\cdot d^2\cdot h} = \frac{4\cdot 60{,}01}{\pi\cdot(25{,}01)^2\cdot 30} = 4073{,}8\ кг/м^3$$

Найдем логарифм от выражения плотности цилиндра:

$$\ln\rho = \ln 4 - \ln\pi + \ln m - 2\ln d - \ln h$$

Возьмем дифференциал:

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} = \frac{\Delta m}{m} + 2\frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta h}{h} = \delta_m + 2\delta_d + \delta_h = \delta_\rho$$

Примеры заданий

2. Дан цилиндр массой m=60,01±0.01 г, диаметром d=25,010±0,005 мм и высотой h=30.000±0.005 мм. Найти плотность цилиндра.

Относительная погрешность:

$$\delta_\rho = \delta_m + 2\delta_d + \delta_h = \frac{0{,}01}{60{,}01} + 2\frac{0{,}005}{25{,}01} + \frac{0{,}005}{30} = 0{,}07\%$$

Абсолютная погрешность: $\Delta\rho = \delta_\rho \cdot \rho = 4073{,}8 \cdot 0{,}0007 = 2{,}9\,кг/м^3$

Плотность цилиндра составляет 4073,8±2,9 кг/м^3