ТЕМА 1
Предмет і задачі дослідження операцій

1.1 Історія виникнення дослідження операцій
1.2 Типові задачі дослідження операцій
1.3 Основні поняття дослідження операцій
1.4 Етапи проведення дослідження операцій
1.5 Математичні моделі операцій
1.6 Задачі оптимізації – визначення і класифікація

"Природа - як жива, так і нежива - рясніє прикладами оптимальності. Свої задачі оптимізації вона вирішує шляхом численних експериментів, протягом мільйона років випробуючи всілякі варіанти рослинних і тваринних конструкцій.

Нам не відпущено стільки часу і можливостей на процес створення, тому однією з актуальних завдань сьогодення є розробка методів оптимізації»

Жілінскас А.Г. Шалтяніс В.Р. "Пошук оптимуму"

1.1 Історія виникнення ДО

Дослідження операцій (ДО) як самостійний науковий напрям виник в роки другої світової війни з потреб найкращої організації бойових дій (*операцій*), а також прогнозування їх результату.

Витоки Дослідження Операцій

У витоків ДО лежали два математичні напрями:

- операційний аналіз
- теорія програмування (=планування)

Операційний аналіз

Виник в Англії на початку другої світової війни, коли багато спеціалістів з різних областей науки були залучені до розробки методів постачання армії та ведення бойових дій.

Задача знаходження оптимальної кількості кораблів при даному конвої

Програма ленд-лізу - система, за якою США, частково на безоплатній основі передавали своїм союзникам у Другій світовій війні боєприпаси, техніку, продовольство і стратегічну сировину

Теорія планування (програмування)

Розвилась в США в період війни, коли виникли проблеми постачання армії військовими матеріалами, продовольством тощо.

Задача про розміщення складів

Подальше застосування методів ДО

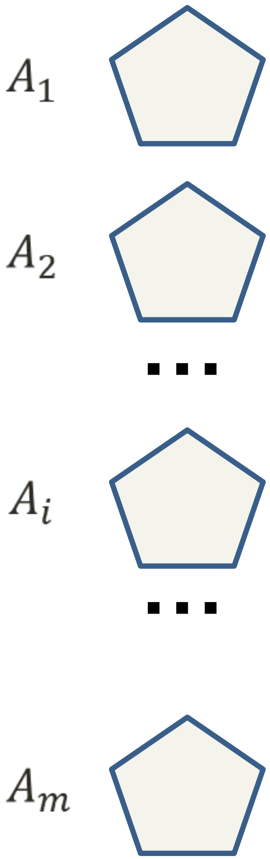
Методи, розроблені для вирішення військових задач

Раціональні методи ведення господарства

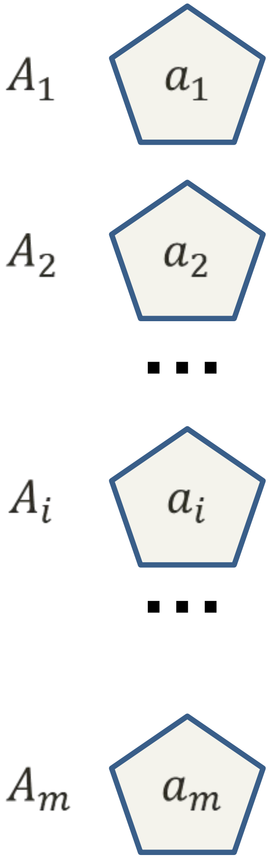
- Промисловість
- Сільське госп-во
- Будівництво
- Транспорт
- Торгівля
- Зв'язок

1.2 Типові задачі дослідження операцій

Задача 1. Транспортна задача



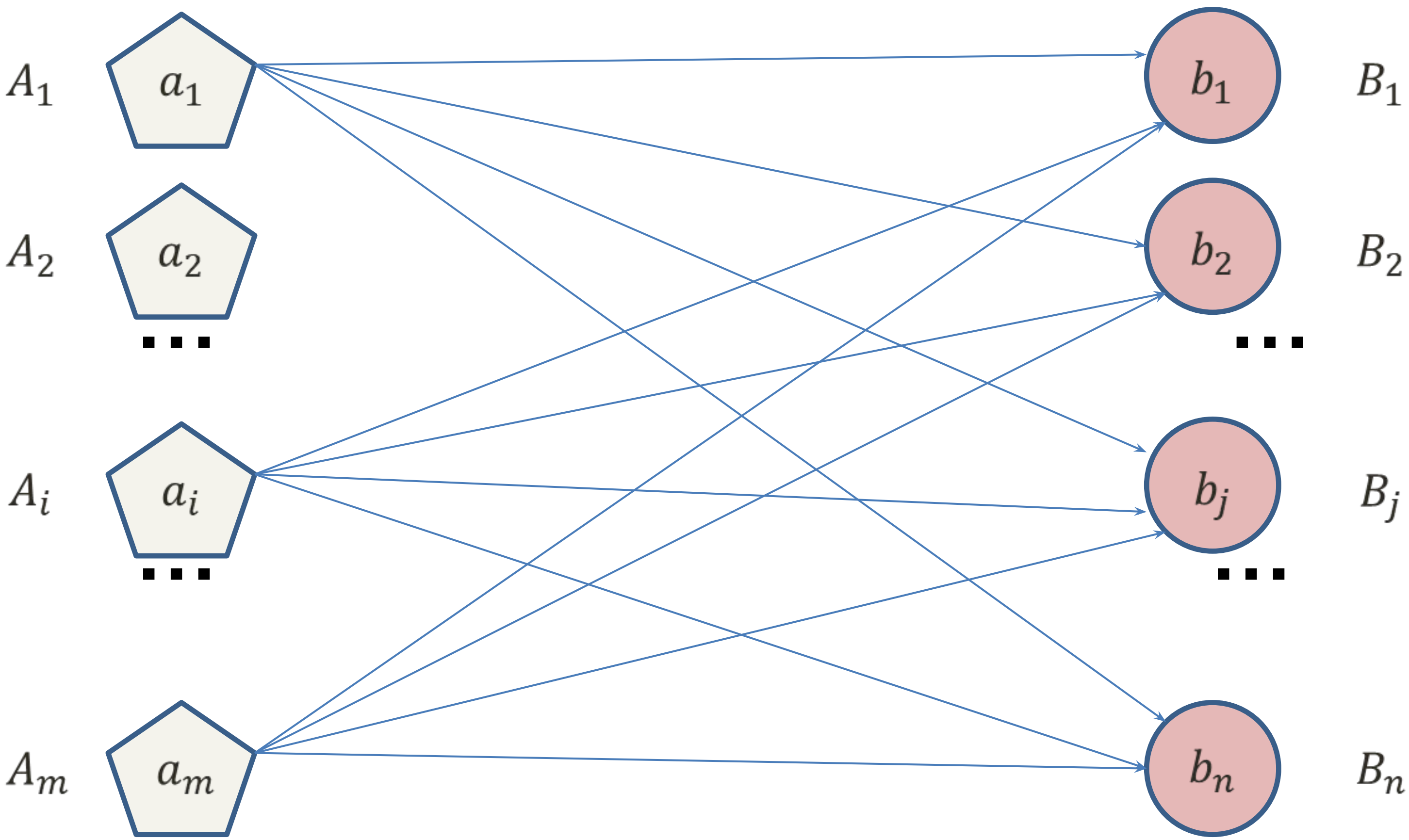
Задача 1. Транспортна задача



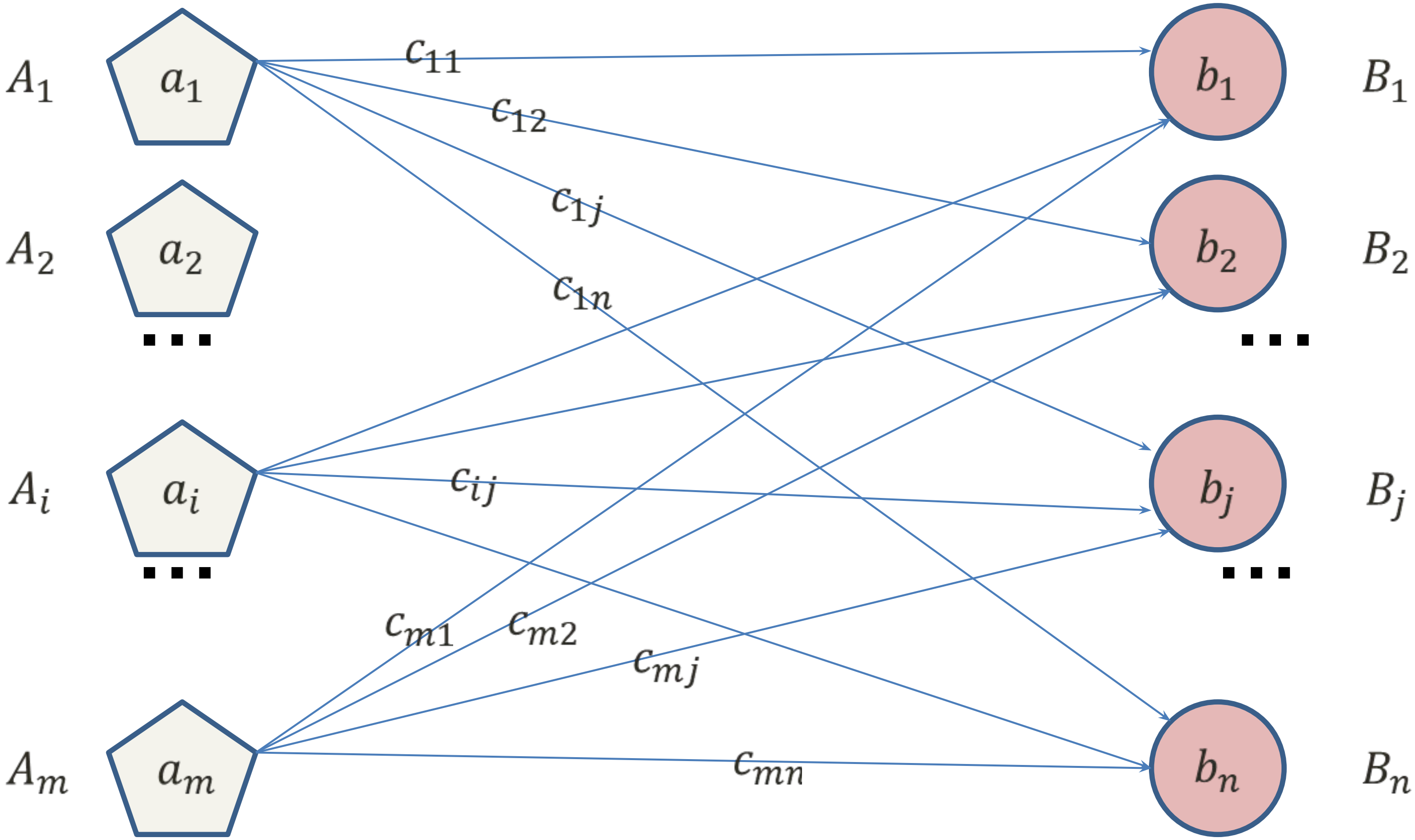
Задача 1. Транспортна задача

Задача 1. Транспортна задача

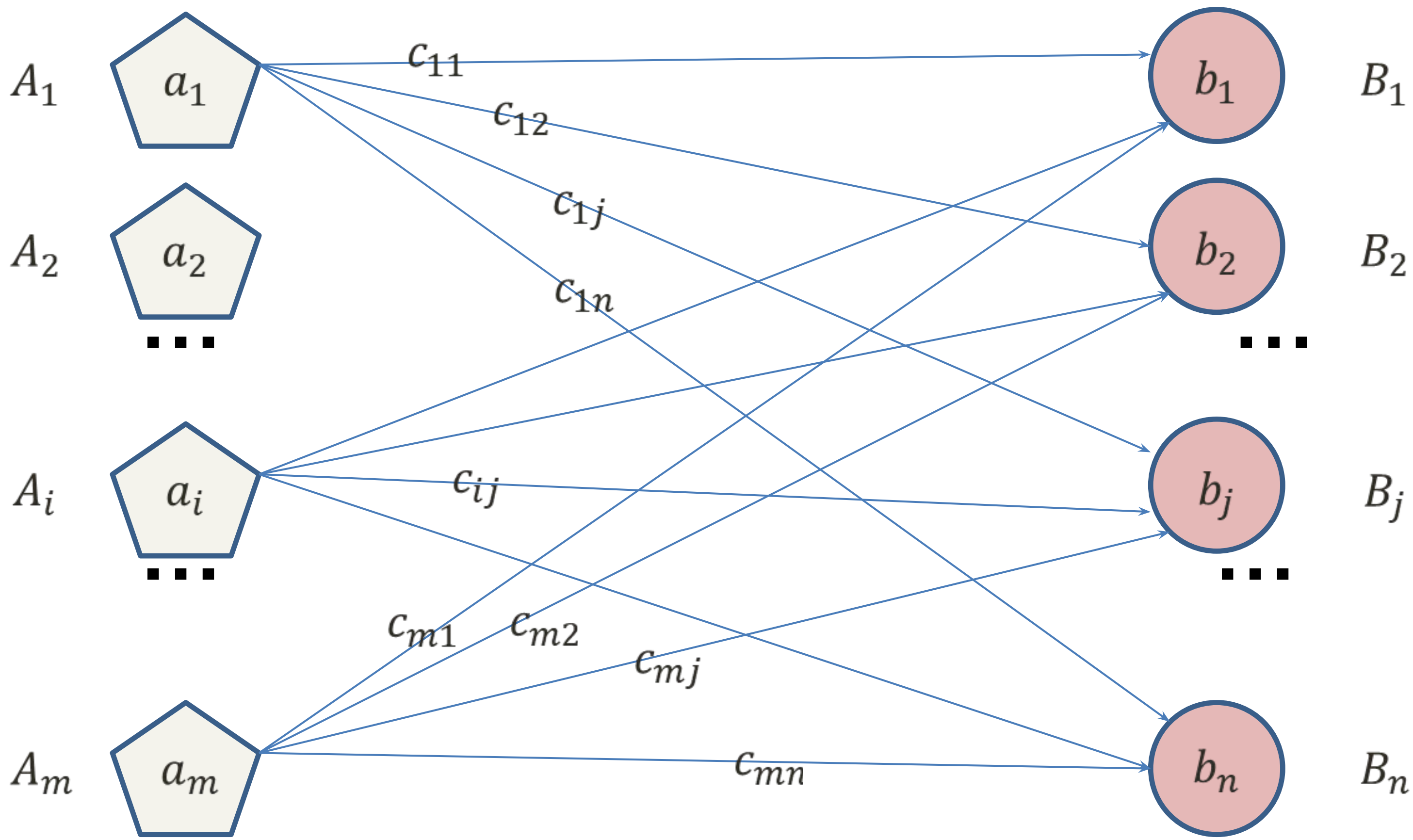
Задача 1. Транспортна задача



Задача 1. Транспортна задача



Задача 1. Транспортна задача



Необхідно *розробити* такий ***план постачання*** підприємствам продукції, щоб потреби споживачів в продукції були забезпечені при ***мінімальних*** сумарних витратах на перевезення продукції.

Задача 1. Транспортна задача (числовий приклад)

5	6	3	6	7
4	3	1	5	6
6	7	2	6	10
7	4	7	8	5
16	4	5	3	

План перевезень 1

5 7	6	3	6	7
4 6	3	1	5	6
6 3	7 4	2 3	6	10
7	4	7 2	8 3	5
16	4	5	3	

$$z = 5\times 7 + 4\times 6 + 6\times 3 + 7\times 4 + 2\times 3 + 7\times 2 + 8\times 3 = 156$$

Задача 1. Транспортна задача (числовий приклад)

5	6	3	6	7
4	3	1	5	6
6	7	2	6	10
7	4	7	8	5
16	4	5	3	

План перевезень 2

5 7	6	3	6	7
4	3 1	1 5	5	6
6 9	7	2	6 1	10
7	4 3	7	8 2	5
16	4	5	3	

$$z = 5\times 7 + 1\times 3 + 1\times 5 + 6\times 9 + 1\times 6 + 4\times 3 + 8\times 2 = 138$$

Задача 1. Транспортна задача (числовий приклад)

5	6	3	6	7
4	3	1	5	6
6	7	2	6	10
7	4	7	8	5
16	4	5	3	

План перевезень 3

5 / 7	6	3	6	7
4 / 6	3	1	5	6
6 / 2	7	2 / 5	6 / 3	10
7 / 1	4 / 4	7	8	5
16	4	5	3	

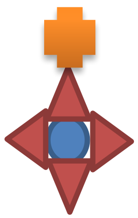
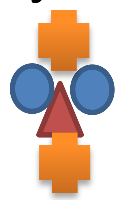
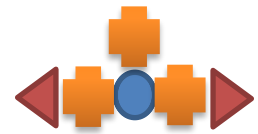
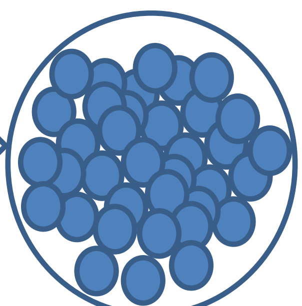
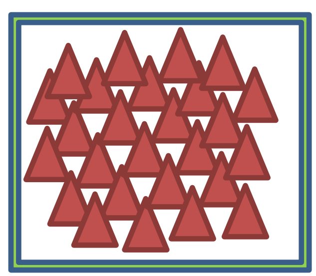
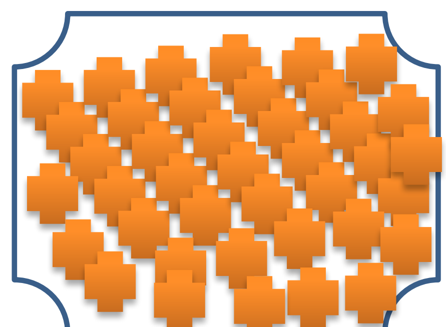
$$z = 5\times7+4\times6+6\times2+2\times5+6\times3+7\times1+4\times4=129$$

«… країни перемагають у війнах не тому, що вони хоробріші противника або більш незалежні або їм трохи більше благоволить Бог.
Як правило, переможцем стає той, у кого збивають на 5% менше літаків, або хто використовує на 5% менше палива, або хто забезпечує піхоті на 5% більш якісне харчування при 95% витрат».

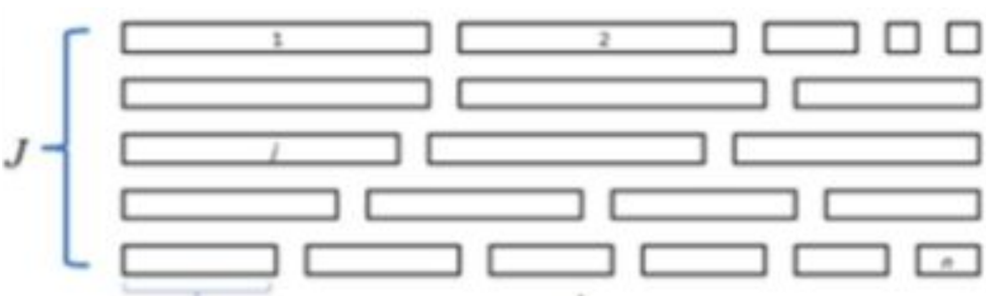
Джордан Елленберг Як не помилятися. Сила математичного мислення

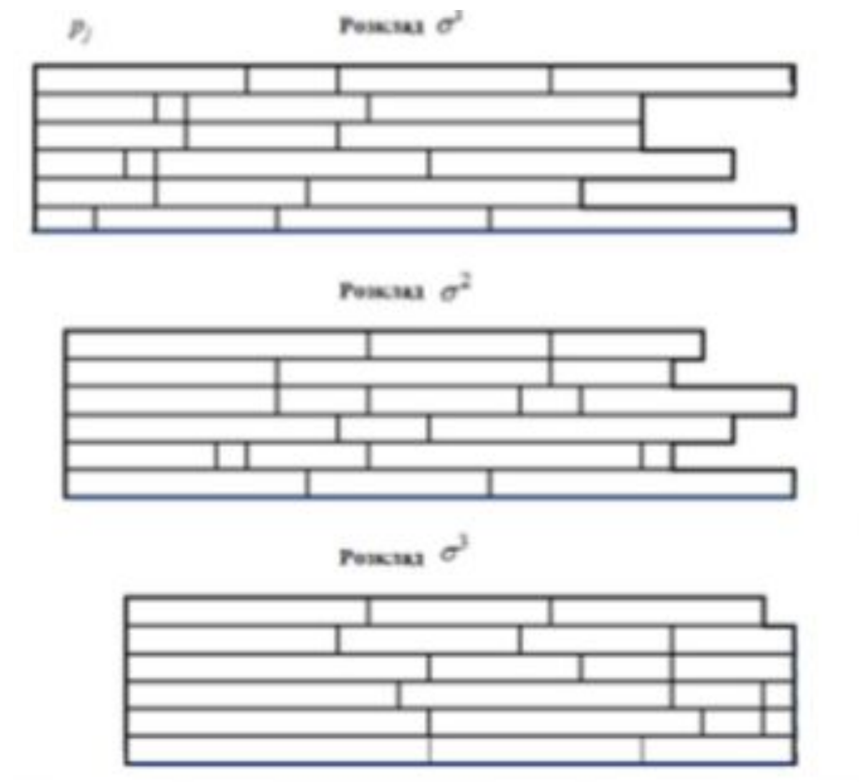
Задача 2. Визначення асортименту випуску продукції

Скласти **план виробництва** продукції, при якому досягає **максимуму** сумарний прибуток.

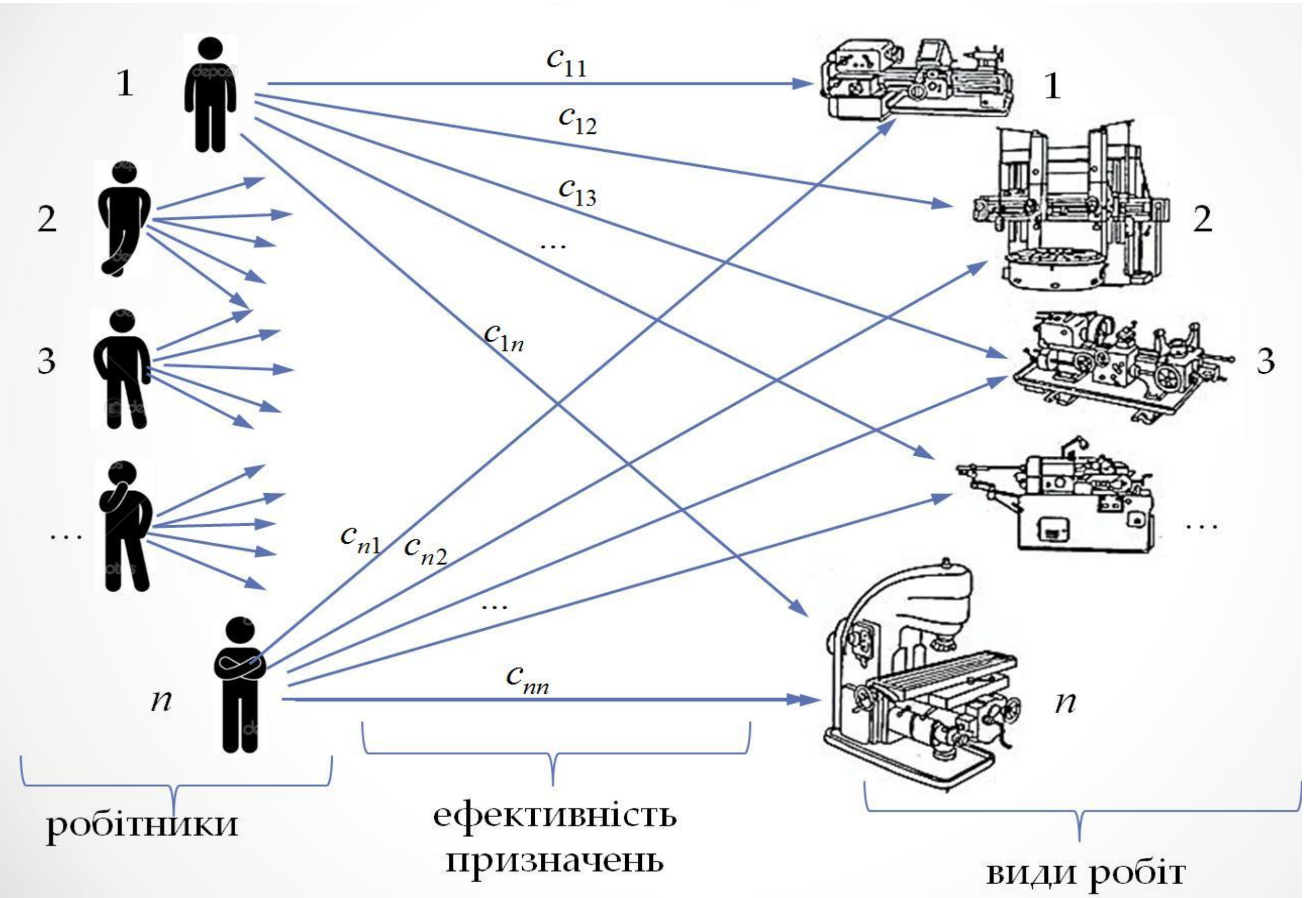
Види продукції			
Прибуток (од.варт.)	15	22	34
Ресурси			
Обсяги ресурсів (од.)	356	420	560

Задача 3. Задача складання розкладу виконання робіт



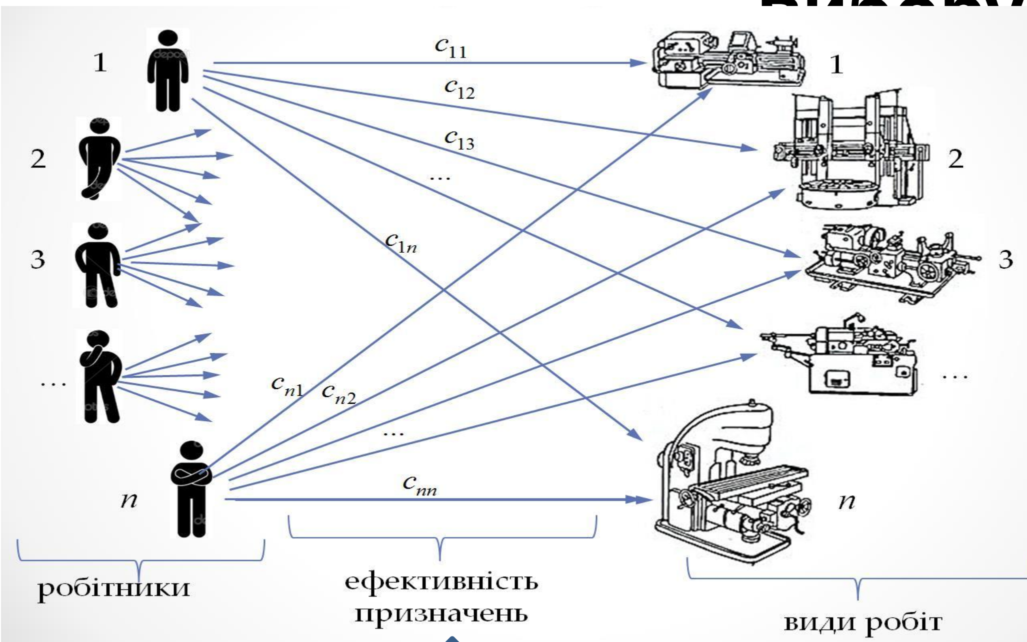


Задача 4. Задача про призначення (проблема вибору)

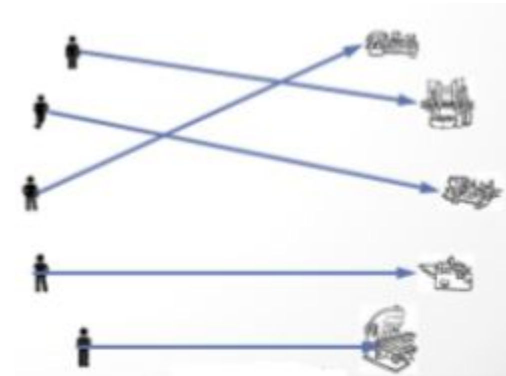


Необхідно *призначити робітників на роботи* так, щоб досягти ***максимальної*** ефективності виконання усіх робіт за умови: одночасно кожен робітник може виконувати тільки одну роботу і кожна робота може виконуватися тільки одним робітником.

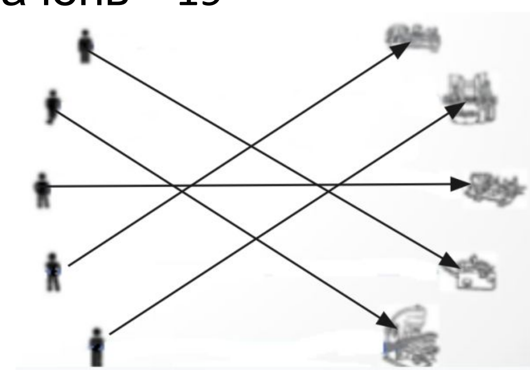
Задача 4. Задача про призначення (проблема вибору)



$$c = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 & 7 & 3 \\ 6 & 5 & 4 & 8 & 9 \\ 3 & 7 & 6 & 7 & 5 \\ 9 & 5 & 4 & 6 & 3 \\ 5 & 8 & 7 & 8 & 4 \end{pmatrix}$$



(2, 3, 1, 4, 5)
Сумарна ефективність призначень = 19



(4, 5, 3, 1, 2)
Сумарна ефективність призначень = 39

Задача 5. Задача комівояжера

- **Дано**

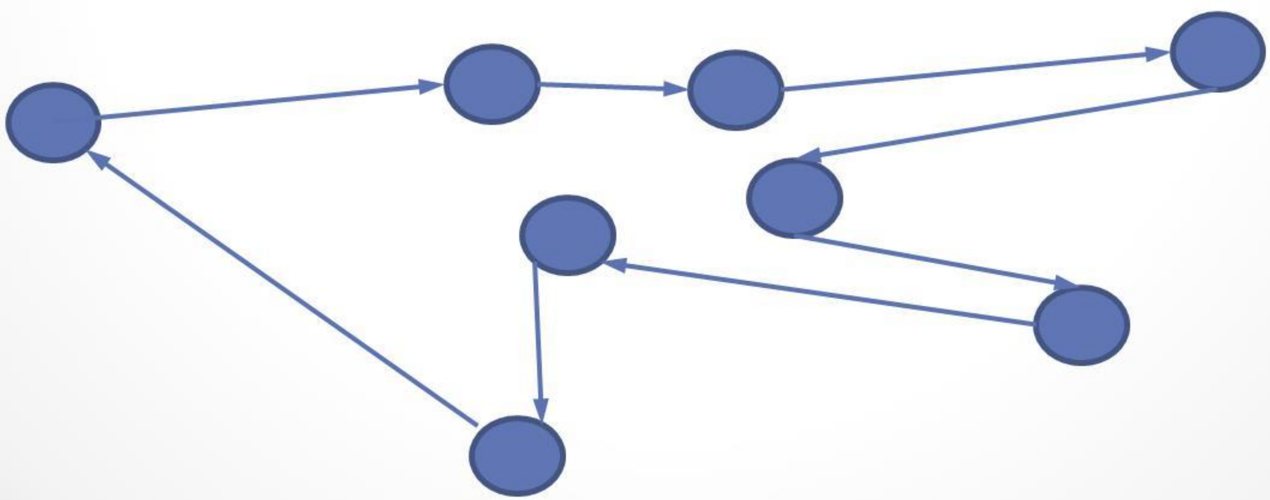
n − кількість міст (з номерами $1, 2, \dots, n$)

c_{ij} −відстань між містами i та j $(i,j = 1,2,\dots,n)$

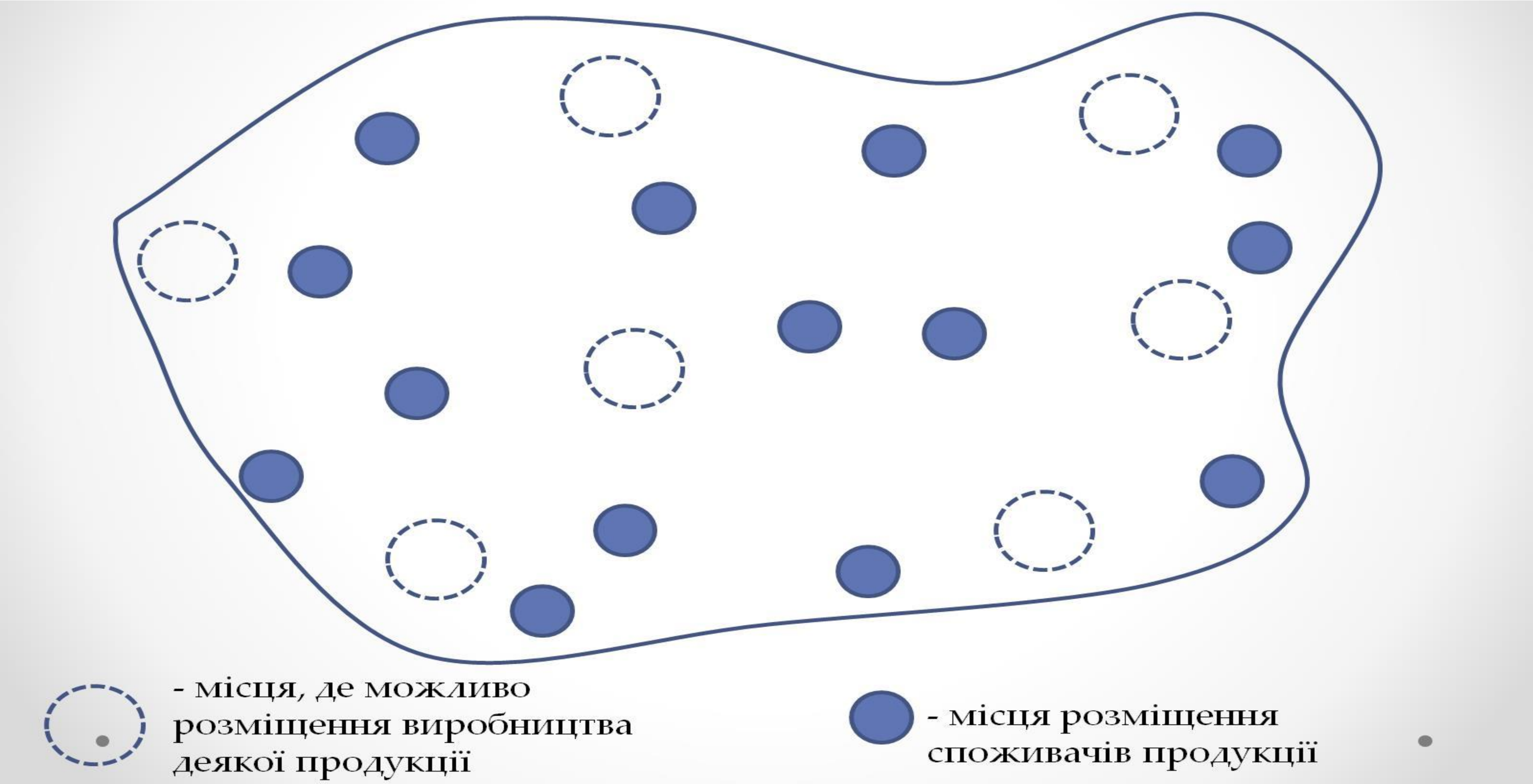
виїжджаючи з міста 1, комівояжер повинен побувати в усіх інших містах по одному разу і повернутися в початкове місто 1.

- **Необхідно**

визначити в якому порядку слід об'їжджати міста, щоб сумарна пройдена відстань була найменшою (найкоротший цикл обходу міст).

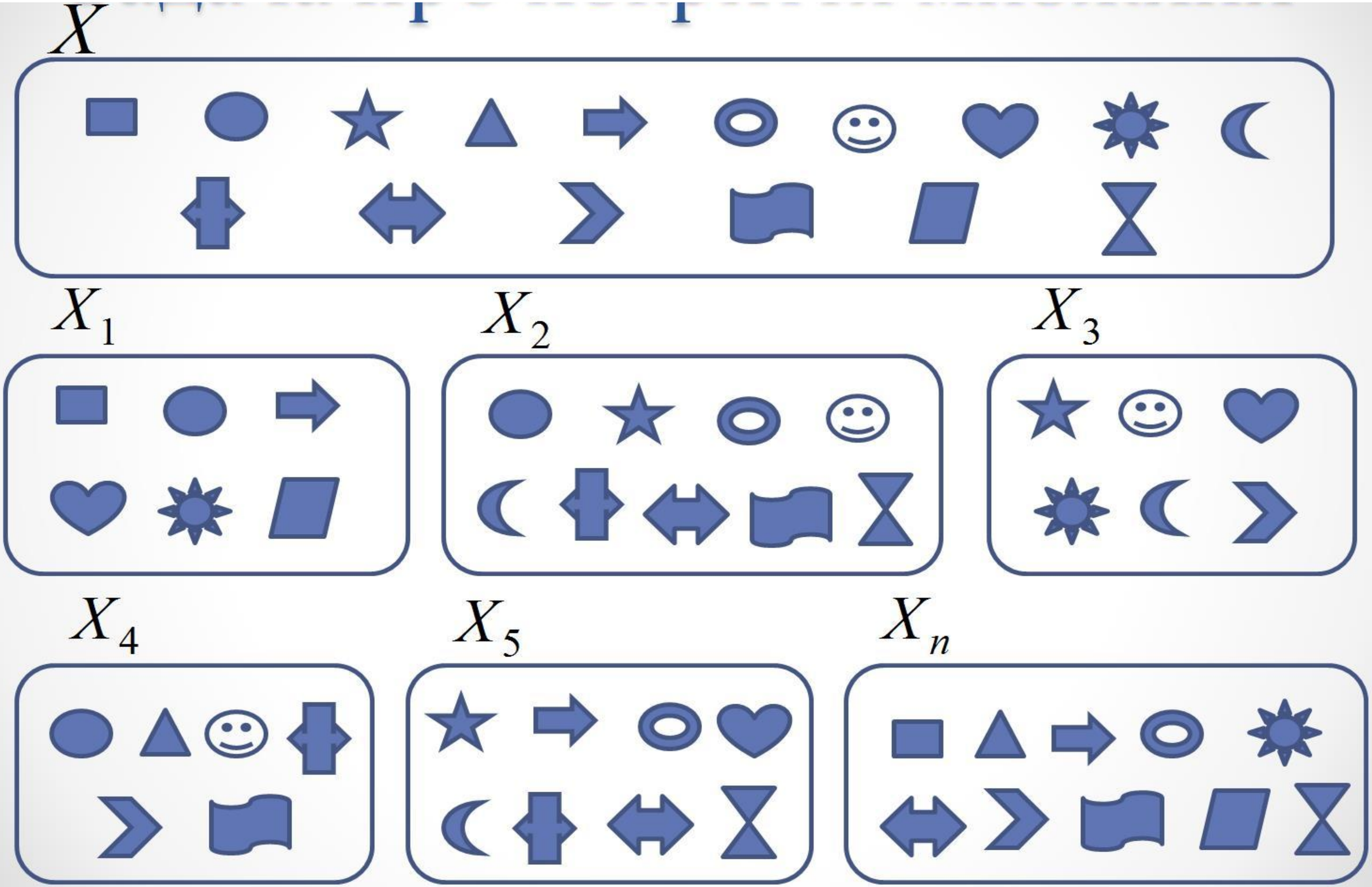


Задача 6. Задача розміщення виробництва



Необхідно **визначити** в яких місцях розмістити виробництво, щоб сумарні виробничо-транспортні витрати були **мінімальними**.

Задача 7. Задача покриття множини



Характерні особливості задач дослідження операцій

1) мова йде про якийсь захід, що переслідує певну **мету**;

2) задані деякі **умови**, що характеризують обстановку;

3) в рамках цих умов потрібно знайти таке рішення, щоб задуманий захід був в певному сенсі **найбільш вигідним**.

Характерні особливості задач дослідження операцій

1) мова йде про якийсь захід, що переслідує певну мету;

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5
Складання плану перевезень	Складання плану виробництва продукції	Складання розкладу виконання робіт	Призначення робітників на роботи	Визначення порядку об'їзду міст

Характерні особливості задач дослідження операцій

2) задані деякі умови, що характеризують обстановку (зокрема, засоби, якими можна розпоряджатися);

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5
Обмеження на об'єми виробництва і споживання	Обмеження на об'єми використання ресурсів	Обмежена кількість пристроїв	Кожен робітник може виконувати тільки одну роботу ...	В кожному місті можна побувати тільки один раз

Характерні особливості задач дослідження операцій

3) в рамках цих умов потрібно прийняти таке рішення, щоб задуманий захід був в певному сенсі найбільш вигідним.

Задача 1	Задача 2	Задача 3	Задача 4	Задача 5
Мінімізація сумарних транспортних витрат	**Макс**имізація сумарного доходу	**Мін**імізація загального часу виконання робіт	**Макс**имізація сумарної ефективності виконання робіт	**Мін**імізація вартості об'їзду міст

1.3 Основні поняття ДО

- ***Дослідження операцій*** *(ДО)* - застосування математичних методів для обґрунтування рішень в будь-яких сферах людської діяльності.
- ***Операція*** - сукупність взаємоузгоджених дій, направлених на досягнення певної мети.
- **Керовані параметри** операції – параметри, значення яких ми можем встановлювати (значеннями яких ми можемо керувати)
- **Некеровані параметри** операції – параметри, значення яких ми НЕ можемо встановлювати (значення яких нам не підвладні, наприклад, погодні умови, ринкові ціни)

- ***Розв’язок*** - конкретний набір значень керованих параметрів.
- ***Оптимальним*** називається розв’язок, що найбільшою мірою сприяє досягненню мети операції.
- ***Метою дослідження операцій*** є кількісне обґрунтування оптимальних рішень.

- ***Елементами розв'язку*** називаються параметри, сукупність яких утворює розв'язок (всю сукупність елементів позначатимемо через x).
- ***Множина допустимих розв'язків*** X – множина розв'язків, яка задовольняє усім умовам операції.
- ***Критерій ефективності*** (***цільова функція)***– кількісна функція, яка відображає цільову спрямованість операції (є мірою відповідності результату, що досягається, меті операції).

- ***Математична модель операції*** -сукупність формальних співвідношень, що встановлюють взаємозв'язок керованих параметрів, некерованих параметрів і описують критерій ефективності.
- ***Основна задача ДО*** є пошук екстремальних значень критерію в рамках моделі.

1.4 Етапи проведення ДО

1) Ідентифікація проблеми

2) Побудова моделі

3) Вибір математичного методу

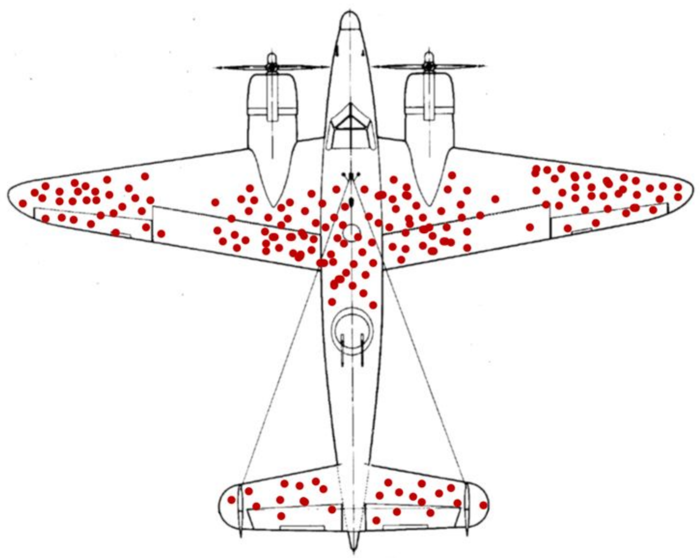
4) Розв’язання поставленої задачі

5) Перевірка адекватності моделі

6) Реалізація результатів на практиці

Етап 1. Ідентифікація проблеми

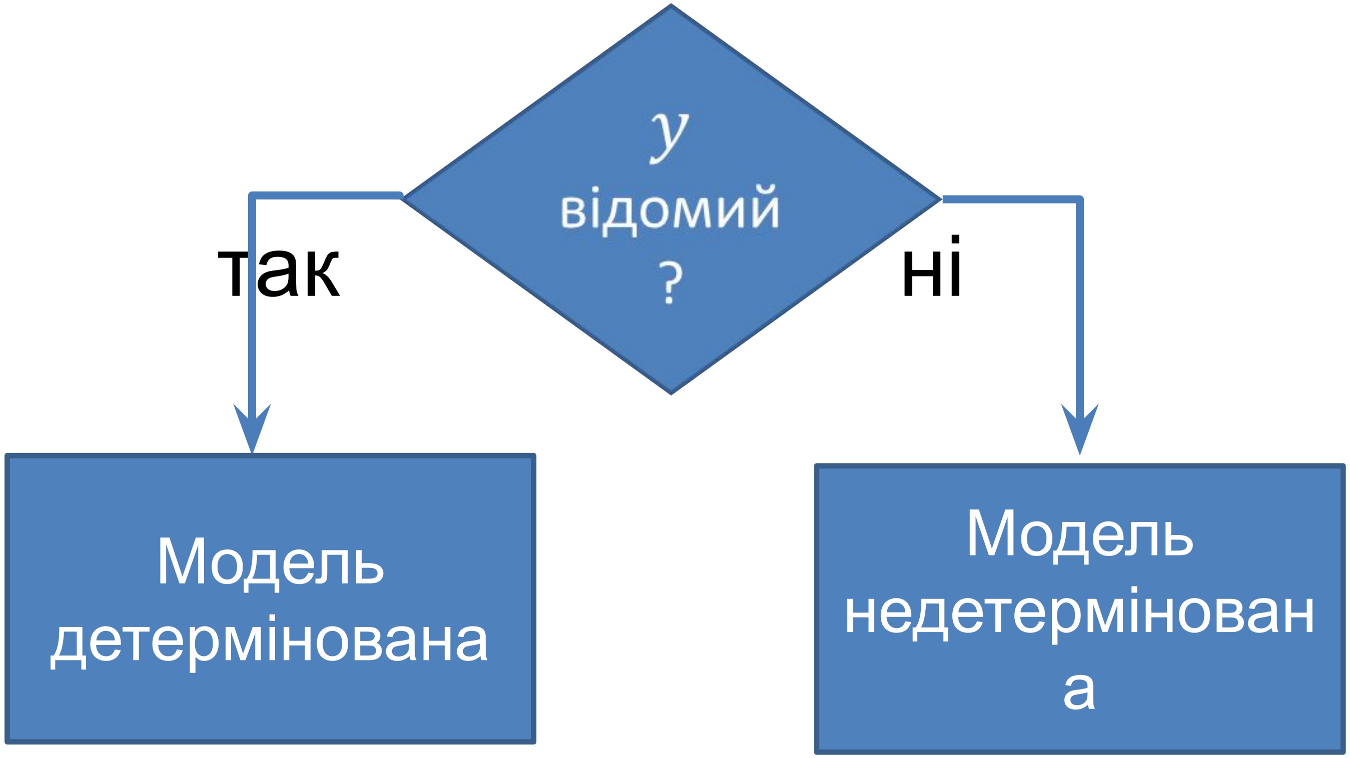
1. Визначення кількості зенітних установок
2. Систематична помилка того, хто вижив



1.5 Математичні моделі операцій

Позначення

- x – вектор керованих параметрів
- y – вектор некерованих параметрів
- X – множина допустимих значень векторної змінної x
- Y – множина допустимих значень векторної змінної y
- $F(x, y)$ – цільова функція


y відомий ?
так
ні
Модель детермінована
Модель недетермінован а

Детермінована модель

- Нехай y приймає значення y^0.

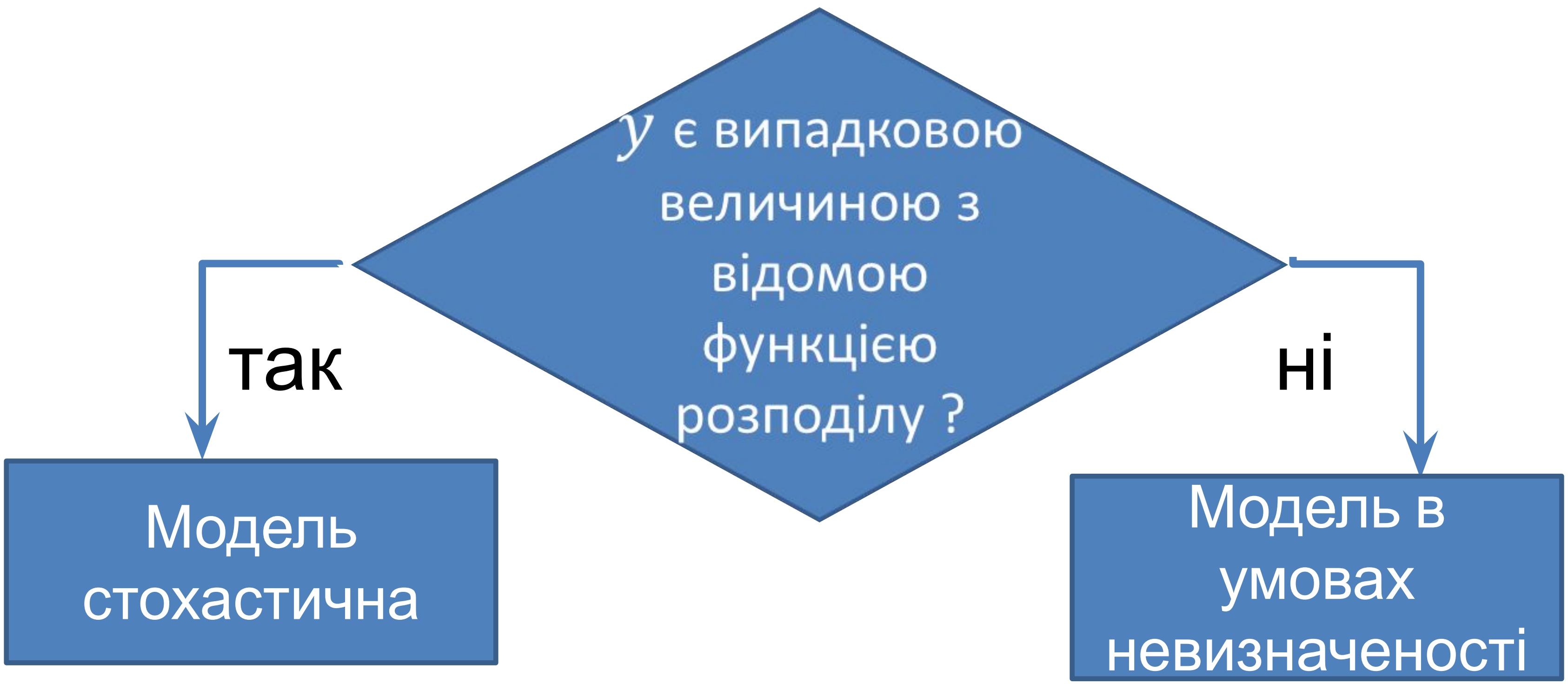
Позначимо : $f(x) = F(x, y^0)$

Детермінована модель має вигляд:

$$f(x) \to min$$
$$x \in X$$

Ця модель називається також ***задачею оптимізації***

Недетермінована модель (1)



Треба розділяти ситуації:

- **має або не має сенс середній результат**
- **операція проводиться одноразово або неодноразово**

?

- Критерій якості роботи реаніматологів: середня температура пацієнтів в палаті інтенсивної терапії.
- Критерій якості роботи постачальників: мінімізація моментів відхилення моментів поставок від їх директивних термінів.
- Три економіста пішли на полювання. Побачивши кабана, перший економіст вистрілив і промазав на метр вправо. Другий вистрілив і промазав на метр вліво. Третій, побачивши це, не став стріляти, а радісно заволав: «Хлопці, в середньому ми його пристрелили!»

- Приклад 1. Ви воліли б взяти 50 тисяч доларів, або укласти парі 50 на 50 між втратою 100 тисяч доларів і отриманням 200 тисяч доларів?
- Приклад 2. Ви воліли б взяти 50 тисяч доларів, або укласти парі 50 на 50 між втратою 100 тисяч доларів і отриманням 250 тисяч доларів?
- Приклад 3. Ви, власник великої корпорації, вважали за краще б взяти 50 тисяч доларів, або мати можливість багаторазово проводити операції, в результаті яких з ймовірністю 0,5 на 0,5 втрачали 100 тисяч доларів або отримували 250 тисяч доларів?

Недетермінована модель (2)

Модель стохастична

Операція проводиться неодноразово і має сенс середній результат?

так

$$M\{F(x,y)\} \rightarrow \min$$
$$P\{x \in X(y)\} \geq 1-\varepsilon$$

ні

$$\max\{F(x,y)\} \rightarrow \min$$
$$P\{x \in X(y)\} \geq 1-\varepsilon$$

Модель в умовах невизначеності

$$\max\{F(x,y)\} \rightarrow \min$$
$$x \in \bigcap_{y} X(y)$$

Стохастична модель економічного розміру замовлення (1)

Змістовна постановка

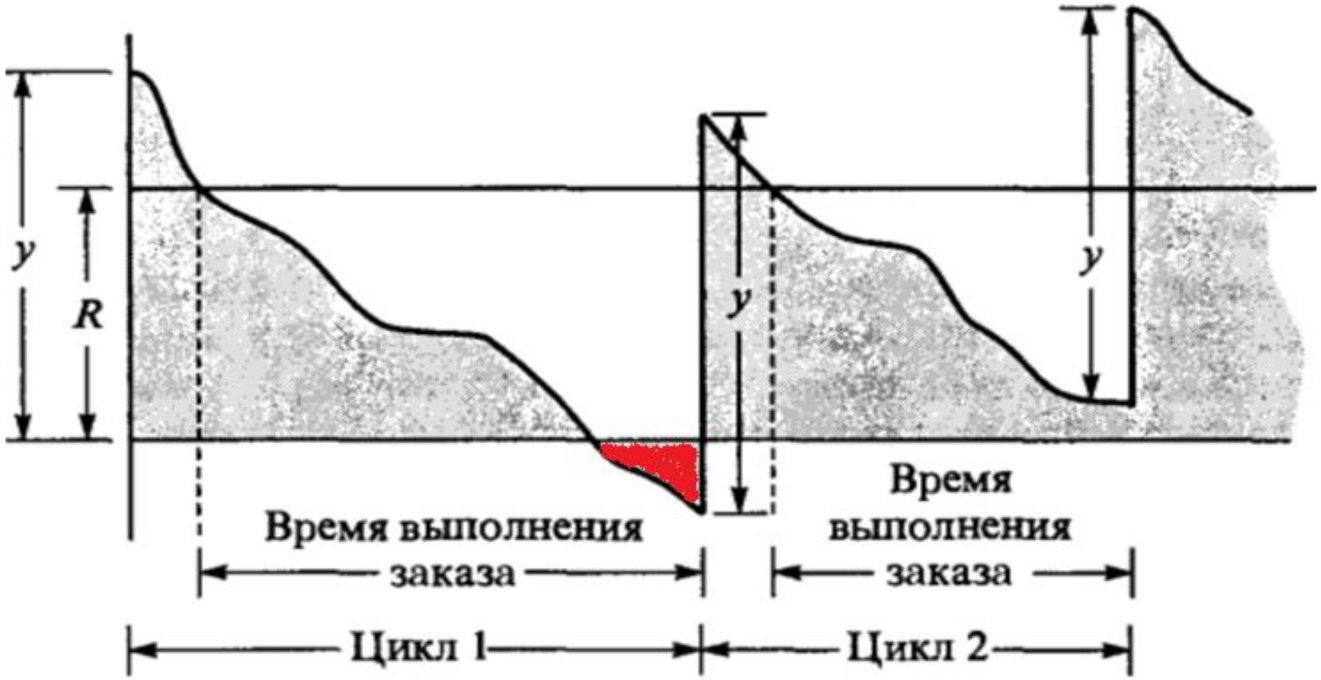
Електротехнічна компанія використовує у виробничому процесі каніфоль.

Розміщення замовлення на нову поставку каніфолі обходиться фірмі в 1000 дол. Час виконання замовлення коливається від 3-х до 5-ти діб. Вартість зберігання одного галону каніфолі протягом одного місяця становить 5 дол., а питомі втрати від її дефіциту – 20 дол. за один галон.

Статистичні дані свідчать про те, що попит на каніфоль є випадковою величиною, рівномірно розподіленою від 0 до 100 галонів за добу.

Визначити оптимальну політику управління запасами для компанії.

Стохастична модель економічного розміру замовлення (2)



Випадкові величини: кількість продукту, яка споживається в одиницю часу; час виконання замовлення

Визначити: такі y – розмір замовлення, R – рівень запасу, при якому приймається рішення про розміщення нового замовлення, щоб досягали мінімуму очікувані витрати в одиницю часу (вартість замовлень + штрафи за незадоволений попит + витрати на зберігання)

1.5 Задачі оптимізації – визначення

- $$f(x) \to min$$
  $$x \in X \qquad (1)$$

$$X \in R^n$$

$$\begin{gathered} f(x) \to min \\ x \in X \end{gathered} \qquad (1)$$

Точка $x^* \in X$ називається ***точкою глобального мінімуму*** функції $f(x)$ на множині X або ***глобальним розв'язком*** задачі **(1)**, якщо

$$f(x^*) \le f(x) \qquad \forall x \in X \qquad (2)$$

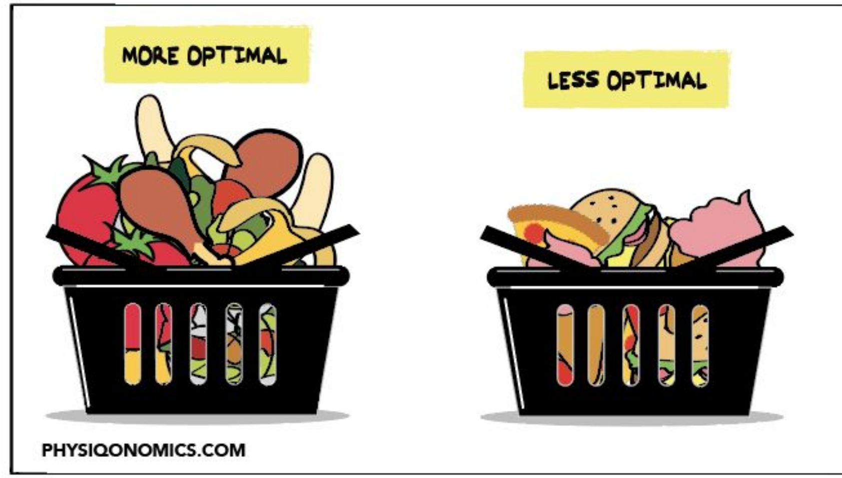
Якщо нерівність в (2) виконується як строга при $x \neq x^*$, то x^* - ***точка строгого глобального мінімуму*** (строгий розв'язок).

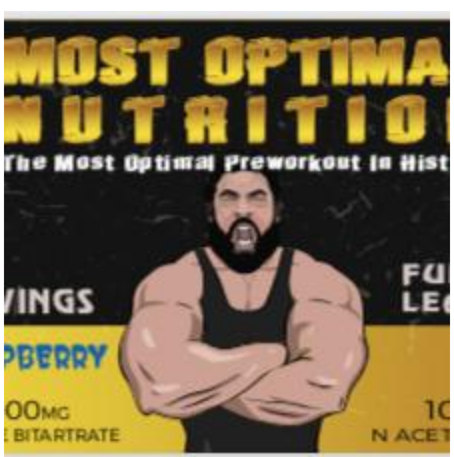
Більш оптимальний, менш оптимальний, найоптимальніший

20 СЕРПНЯ, 2018, 15:17

Подобається 3 Поширити Tweet

Розділити продукти на більш і менш оптимальні і почати харчуватися правильно: експерти вигадали концепцію двох кошиків, дотримуючись якої легше скинути зайві кілограми

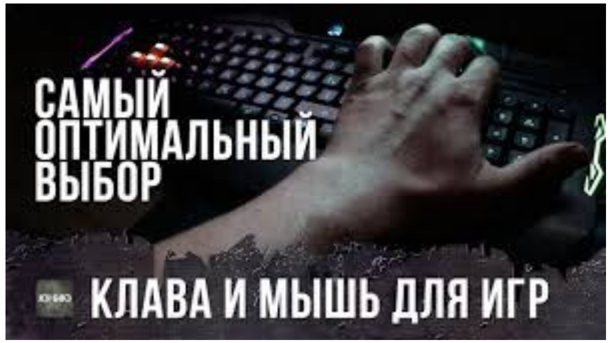


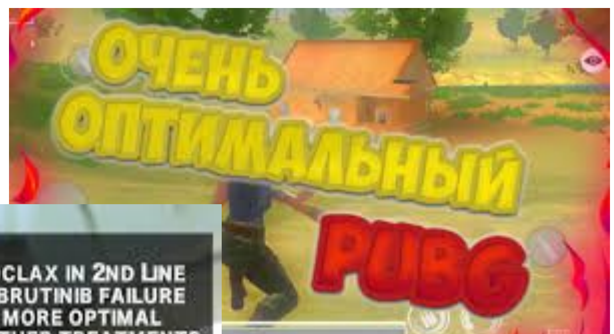


Further steps

- development of PRTRs at local and regional levels is the most optimal way for introduction of a system of environmental reporting in Russia.

Более оптимальный, менее оптимальный, самый оптимальный





2 Рецензії/відгуки
Написати рецензію

Плеоназми

Українська без помилок.

Говоримо і пишемо правильно.

Сучасний довідник з ...

Проте надлишковість у мові — це не тільки спеціальний художній прийом. Здебільшого в усному й писемному мовленні трапляються невдалі плеоназми, які свідчать про мовну невправність і безпорадність. Такі лексеми належать до стилістичних помилок. Отже, під час розгляду явища плеонастичності в мові треба виходити з того, що існує стилістично виправдана надлишковість, яка становить норму, і надлишковість, яка порушує норми стилю.

Головна причина появи плеоназмів — незнання людиною точного значення вживаних слів, особливо якщо вони були запозичені з інших мов, наприклад: *правильний правопис, сталий фразеологізм, персоніфікована особа, пантеон богів, селяни села, пам'ятний сувенір, бібліотека книжок, вільна вакансія* тощо.

Окрім того, плеоназми трапляються в іншомовних абревіатурах (наприклад, *CD-диск, SMS-повідомлення, VIP-персона*) і граматичних формах (*найбільш ідеальний, найбільш найкращий, найбільш оптимальний, найбільш бездоганний*).

$$f(x) \to min$$
$$x \in X$$

Точка $x^* \in X$ називається ***точкою локального мінімуму*** функції $f(x)$ на множині X або ***локальним розв'язком*** задачі (1), якщо існує таке $\varepsilon > 0$, що:

$$f(x^*) \le f(x) \qquad \forall x \in X \cap B_\varepsilon(x^*) \qquad (3)$$

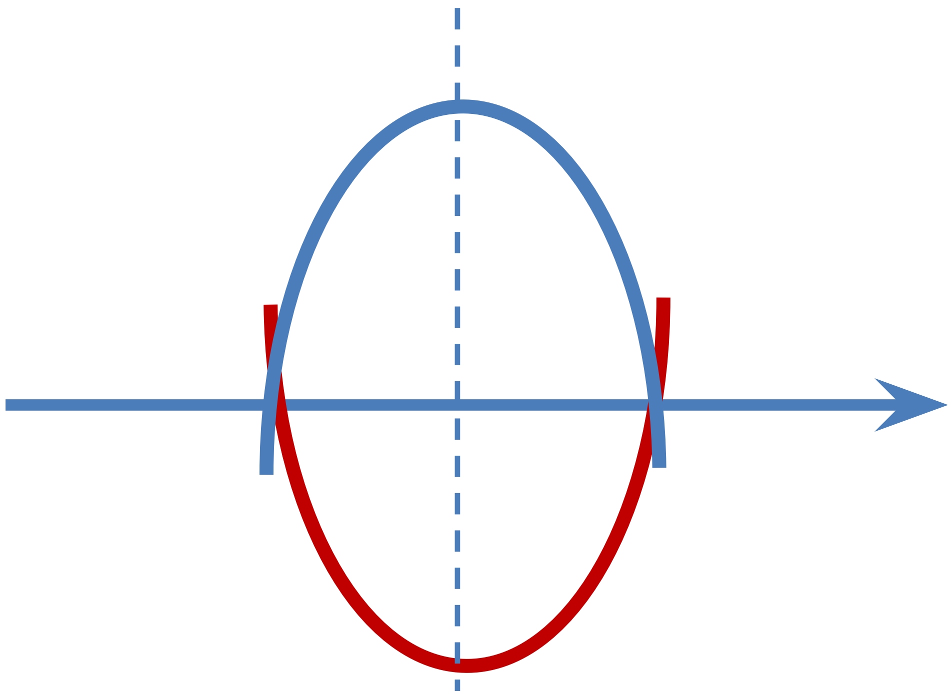
де $B_\varepsilon(x^*) = \left\{ x \in R^n \,\middle|\, \|x - x^*\| \le \varepsilon \right\}$ - куля радіуса ε з центром в x^*.

Якщо нерівність в (3) виконується як строга при $x \ne x^*$, то x^* - ***точка строгого локального мінімуму***.

Еквівалентність max та min

$$\begin{gathered} f(x) \to \max \\ x \in X \end{gathered} \qquad (4)$$

$$\begin{gathered} -f(x) \to \min \\ x \in X \end{gathered} \qquad (5)$$



Точна нижня грань функції

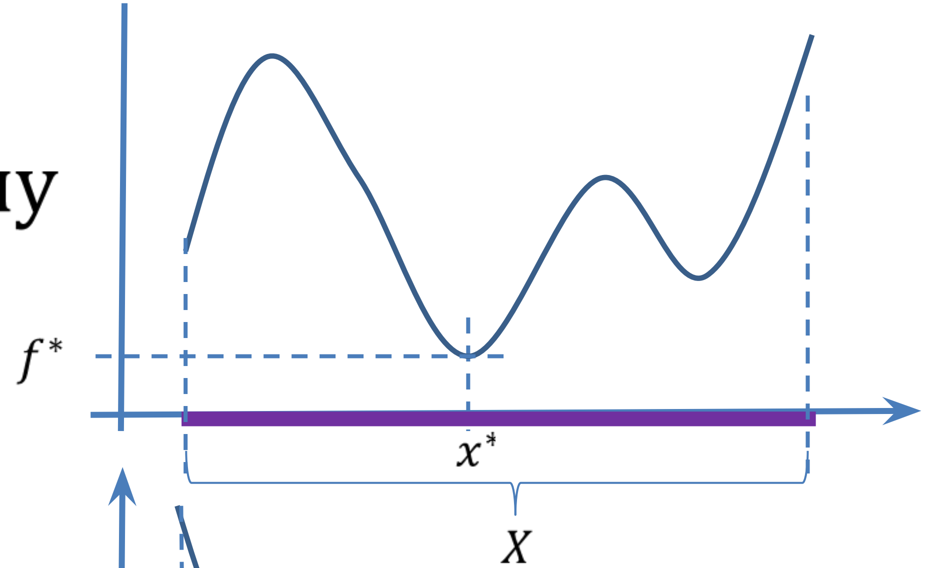
- Точна нижня грань функції f на X, тобто величина

$$f^* = \inf_{x \in X} f(x)$$

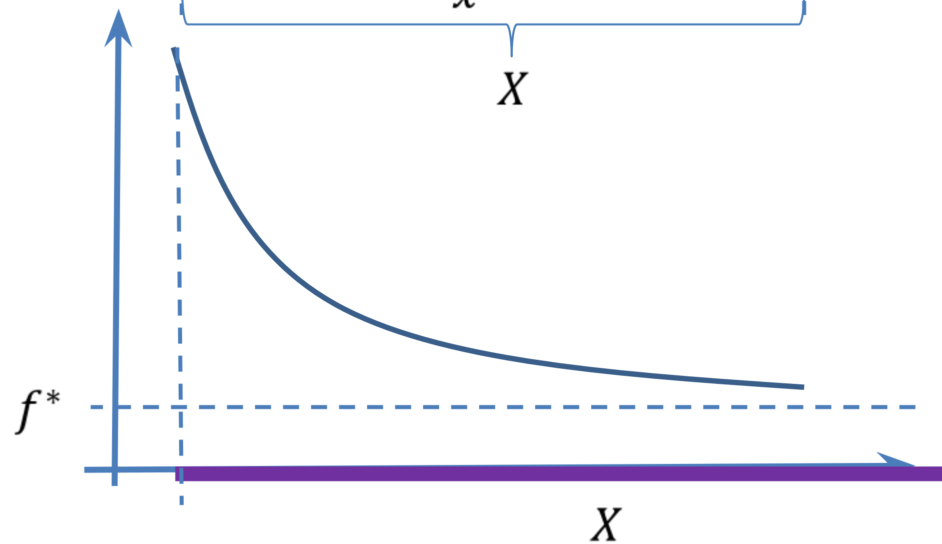
називається ***значенням*** задачі

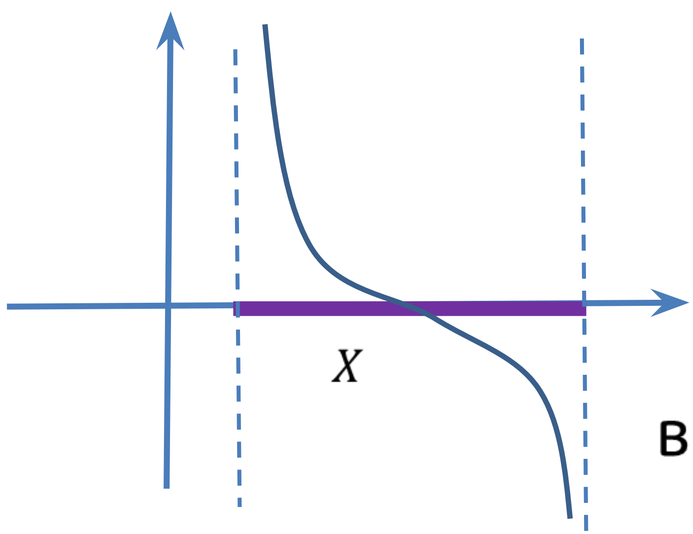
$$f(x) \to min, x \in X$$

а) $f^* > -\infty$,
$f(x^*) = f^*$ при деякому
$x^* \in X$



б) $f^* > -\infty$,
$f(x^*) > f^*$ при $\forall x \in X$





в) $f^* = -\infty$

Класифікація задач оптимізації (1)

$f(x) \to min$ $x \in X$	
	задача безумовної оптимізації
	задача умовної оптимізації
$X = \{x \in R^n \mid g_i(x) = 0, i = \overline{1,m}\}$,	***задача класичної оптимізації***
$X = \left\{ x \in P \left| \begin{array}{ll} g_i(x) \le 0, & i = \overline{1,k} \\ g_i(x) = 0, & i = \overline{k+1,m} \end{array} \right. \right\}$	***загальна задача математичного програмування***

Під ***множиною простої структури*** в R^n будемо розуміти множини типу:

а) невід'ємного октанта: $P = \{x \in R^n \mid x_j \ge 0, j = \overline{1,n}\}$

б) n-мірного паралелепіпеда: $P = \{x \in R^n \mid a_j \le x_j \le b_j, j = \overline{1,n}\}$

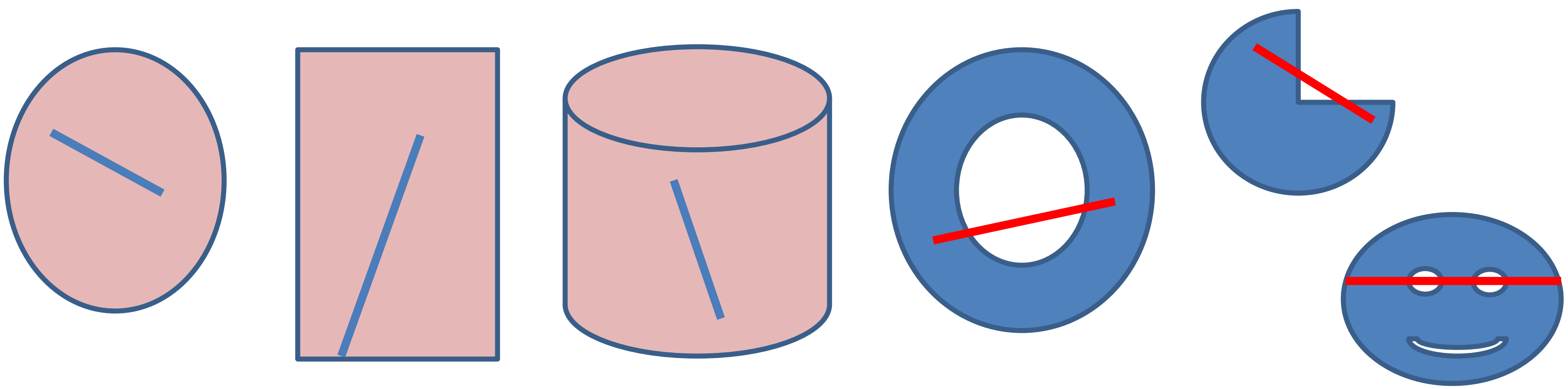
в) n-мірної кулі.

Опукла множина

Визначення 1. Множина $X \subset R^n$ називається ***опуклою***, якщо разом з кожними двома точками $x^1, x^2 \in X$ вона містить і всі точки вигляду $\boxed{x = \lambda x^1 + (1-\lambda)x^2, 0 \le \lambda \le 1}$.

Опукла лінійна комбінаціє точок x^1 та x^2

Визначення 2. Множина $X \subset R^n$ називається ***опуклою***, якщо з будь-якими двома своїми точками x^1, x^2 вона містить весь відрізок, кінцями якого служать ці точки.



Опукла функція

Нехай $X \subset R^n$ - опукла множина.

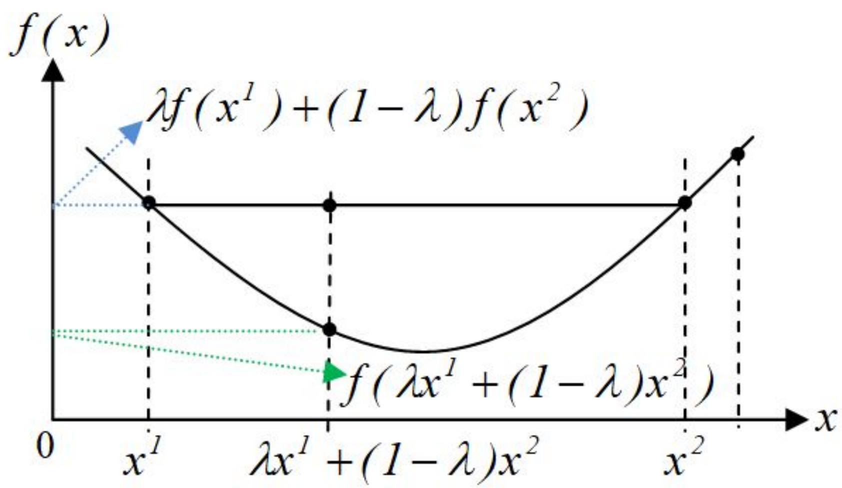
Визначення 3. ***Функція*** $f: X \to R^1$ ***опукла на множині*** X,

якщо для будь-яких двох точок $x^1, x^2 \in X$

$$f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \le \lambda f(x^1) + (1-\lambda) f(x^2),$$

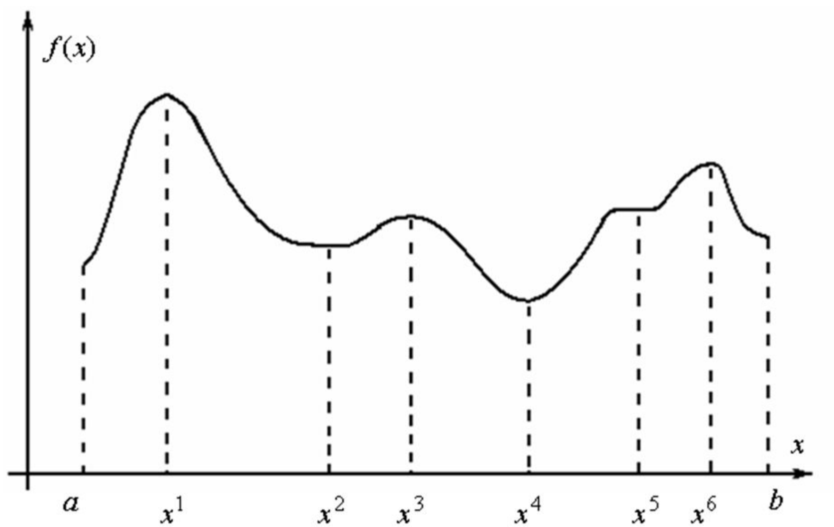
$$\lambda \in R^1, 0 \le \lambda \le 1$$

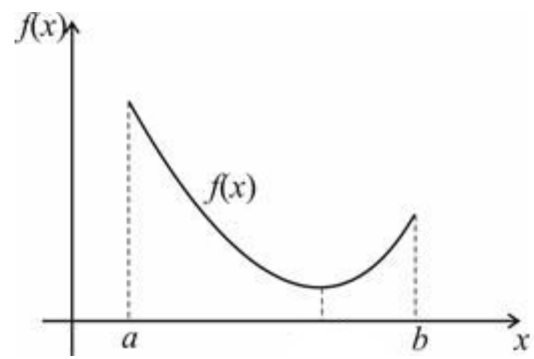
якщо $X = R^n$, просто кажуть, що f ***опукла***.



Класифікація задач оптимізації (2)

$f(x) \to min$ $x \in X$	
	задача опуклої оптимізації





Підкласи задач математичного програмування

$$f(x) \to \min$$
$$g_i(x) \le 0, i = \overline{1,k}$$
$$g_i(x) = 0, i = \overline{k+1,m}$$
$$x \in P$$

	Задача лінійного програмування
	Задача квадратичного програмування

Функція $f(x) = \sum_j a_j x_j + b$ називається ***афінною***.

Якщо $b = 0$, то функція $f(x)$ називається ***лінійною***.