



ВОЗМУЩЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ И ПРОМАТРИЦЫ

Основные вопросы лекции #4

1. Постановка задачи синтеза регуляторов ММО-систем.
2. Основные этапы решения задачи синтеза систем управления.
3. Классификация современных задач\систем управления.
4. Модели динамических систем.
5. Структурные свойства динамических систем.
6. Основные формы математических моделей динамических систем
7. Постановка задачи синтеза регуляторов SISO-систем.

Рассмотрим непараметрические (сигнальные) и параметрические возмущения.

Структура обобщенного уравнения линейной системы и обобщенного входа позволяют введение до полнительных входных сигналов, которые можно интерпретировать как различные возмущающие воздействия на систему.

$$\begin{aligned}(pI_n - A)x(p) &= Bu(p) + Rw(p) + x_0 + \Delta, \\ y(p) &= Cx(p) + Du(p) + \delta(p)\end{aligned}$$

R – числовая матрица размера $n \times g$, характеризующая воздействие на систему возмущения, аналогичного по природе управляющему воздействию ;

Δ – непреднамеренное изменение начальных условий системы, возникающее по разным причинам;

$\delta(p)$ – m -мерный вектор возмущений, действие которых можно свести к выходу статического звена (алгебраического уравнения) модели системы.

$$Y(p) = \begin{bmatrix} x(p) \\ y(p) \\ u(p) \\ w(p) \end{bmatrix}$$

$$U(p) = \begin{bmatrix} x_0 + \Delta \\ \delta(p) \\ u(p) \\ w(p) \end{bmatrix}$$

$$\Omega(p) = \begin{bmatrix} pI_n - A & 0 & -B & -R \\ -C & I_m & -D & 0 \\ 0 & 0 & I_s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_g \end{bmatrix}$$

Определение 3.7. Матрица-столбец, составленная из субвекторов

$$U^*(p) = \begin{bmatrix} x_0 + \Delta \\ \delta(p) \\ u(p) \\ w(p) \end{bmatrix}$$

называется «обобщенным входом системы с непараметрическими возмущениями».

Таким образом, обобщенное уравнение линейной системы при внешних (непараметрических) возмущениях принимает вид

$$\Omega(p)Y(p) = U^*(p)$$

Заметим, что уравнение описывает влияние на линейную систему всех непараметрических возмущений. При этом наличие или отсутствие этих возмущений никак не влияет на структуру проматрицы.

К параметрическим возмущениям принято относить какие-либо изменения числовых или полиномиальных матриц коэффициентов, фигурирующих в формулах.

Рассмотрим только аддитивные возмущения этих матриц, когда, например, для пространства состояний новые, возмущенные, матрицы числовых коэффициентов принимают значения

$$A + \Delta A, \quad B + \Delta B, \quad C + \Delta C, \quad D + \Delta D$$

В результате при формировании проматрицы какой-либо системы получается проматрица с параметрическими возмущениями

$$\Omega(p) - \Delta\Omega(p)$$

где $\Delta\Omega(p)$ – аддитивная добавка к невозмущенной проматрице этой же системы

$$\Omega(p) = \begin{bmatrix} pI_n - A & 0_{n,m} & -B \\ -C & I_m & -D \\ 0_{s,n} & 0_{s,m} & I_s \end{bmatrix} \quad \Delta\Omega(p) = \begin{bmatrix} \Delta A & 0 & \Delta B \\ \Delta C & 0 & \Delta D \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Особенностью представленных параметрических возмущений является неразрушение общих свойств проматриц, рассмотренные ранее.

Определение 3.8. Блочнo-матричное уравнение

$$[\Omega(p) - \Delta\Omega(p)]Y(p) = U(p)$$

связывающее обобщенные вход $U(p)$ и выход $Y(p)$ системы, называется «обобщенным уравнением линейной параметрически возмущенной системы».

Таким образом, исследование влияния непараметрических возмущений на поведение линейной системы связано с использованием обобщенного уравнения линейной системы, а исследование влияния параметрических возмущений – с использованием обобщенного уравнения линейной системы.

Реверсивная проблемная матрица системы

Обобщенное уравнение линейной системы

$$\Omega(p)Y(p) = U(p)$$

Обратное отображение

$$Y(p) = \Omega^{-1}(p)U(p)$$

***Определение 3.9.** Квадратная дробно-полиномиальная матрица $\Omega^{-1}(p)$, которая обобщенному входу $U(p)$ ставит в соответствие обобщенный выход $Y(p)$ по формуле $Y(p) = \Omega^{-1}(p)U(p)$, называется «**реверсивной проблемной матрицей**», или, кратко, «**репроматрицей**» рассматриваемой системы в конкретной задаче.*

репроматрицу $\Omega^{-1}(p)$ можно рассматривать как обобщенную передаточную матрицу от обобщенного входа $U(p)$ к обобщенному выходу $Y(p)$.

$$Y(p) = \Omega^{-1}(p)U(p)$$

Репроматрица (обобщенная передаточная матрица) содержит все возможные передаточные матрицы от всех субвекторов, включенных в обобщенный вход, ко всем субвекторам, включенным в обобщенный выход.

Принципиальное свойство репроматриц – взаимно-однозначное соответствие проматрицы и репроматрицы

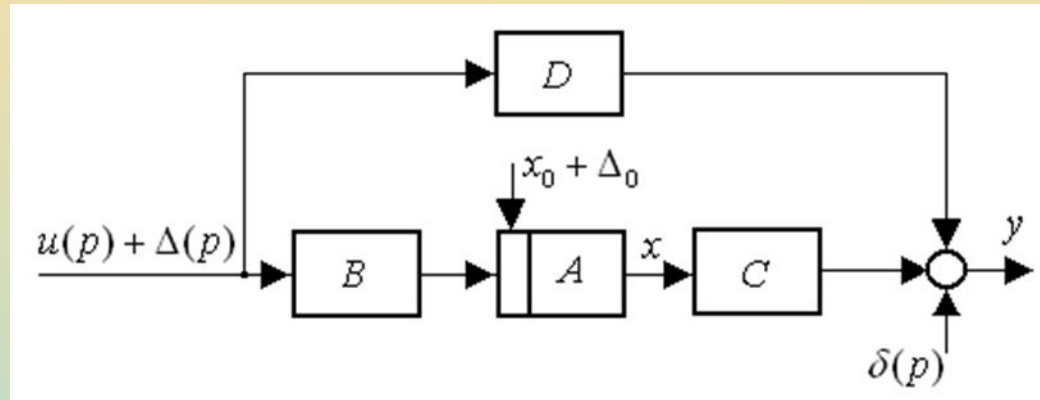
$$\Omega(p) \rightarrow \Omega^{-1}(p) \quad \Omega^{-1}(p) \rightarrow \Omega(p) \quad (\Omega^{-1})^{-1}(p) \rightarrow \Omega(p)$$

Принципиально важным является и то, что введенная в рассмотрение репроматрица допускает обобщение на случай действия непараметрических возмущений

$$U^*(p) = U(p) + \Delta U(p)$$

$$Y(p) = \Omega^{-1}(p)U^*(p)$$

Рассмотрим линейную динамическую систему



$$Y(p) = \Omega^{-1}(p)U^*(p)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x(p) \\ y(p) \\ u(p) \end{bmatrix} &= \Omega^{-1}(p) \begin{bmatrix} x_0 + \Delta_0 \\ \delta(p) \\ u(p) + \Delta(p) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} F_x^{x_0}(p) & F_x^\delta(p) & F_x^u(p) \\ F_y^{x_0}(p) & F_y^\delta(p) & F_y^u(p) \\ 0 & 0 & I_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 + \Delta_0 \\ \delta(p) \\ u(p) + \Delta(p) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Когда модели всех подсистем заданы уравнениями в пространстве состояния, то проматрица системы будет недробной.

В этом случае определены дополнительные общие свойства проматрицы, связанные с ее обращением:

- определитель проматрицы соответствует характеристическому полиному системы, т.е. $\det \Omega(p) = \chi(p)$
- присоединенная матрица от $\Omega(p)$ соответствует матрице несокращенных числителей всех передаточных функций системы $[y_i(p), p.e.]$.

Способы формального получения репроматрицы с использованием известных методов обращения матриц могут быть различны.

Один из них основан на вычислении присоединенной матрицы и делении ее на детерминант исходной матрицы:

$$\Omega^{-1}(p) = \frac{1}{\det \Omega(p)} \text{adj} \Omega(p)$$

Поэлементное обращение проматрицы по этой формуле позволяет получить любую из скалярных передаточных функций

$$f_{ij}(p) = \frac{y_i(p)}{u_j(p)} \quad i = \overline{1, m} \quad j = \overline{1, s}$$

Другой метод обращения матриц (**формула Фробениуса**) основан на разбиении матрицы на блоки с последующим вычислением блоков обратной матрицы

Для обращения невырожденных блочных матриц вида

$$G = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$

где A, B, C, D – матрицы (матричные блоки) соответствующих размеров, можно воспользоваться формулой Фробениуса:

– при условии невырожденности матрицы

A :

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} A^{-1} + A^{-1}BH^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}BH^{-1} \\ -H^{-1}CA^{-1} & H^{-1} \end{bmatrix}$$

$$H = D - CA^{-1}B$$

– при условии невырожденности матрицы

D

$$G^{-1} = \begin{bmatrix} K^{-1} & -K^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}CK^{-1} & D^{-1} + D^{-1}CK^{-1}BD^{-1} \end{bmatrix}$$

$$K = A - BD^{-1}C$$

Рассмотрим проматрицу задачи моделирования

$$\Omega(p) = \begin{bmatrix} (pI_n - A)_{n,n} & 0_{n,m} & -B_{n,s} \\ -C_{m,n} & I_m & -D_{m,s} \\ 0_{s,n} & 0_{s,m} & I_s \end{bmatrix}$$

Получение репроматрицы задачи моделирования можно осуществить, двукратно применяя формулу Фробениуса

Пусть проматрица представлена в блочном виде

$$\Omega = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ C_1 & D_1 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = [(pI_n - A)_{n,n}]$$

$$B_1 = [0_{n,m} \quad -B_{n,s}]$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} -C_{m,n} \\ 0_{s,n} \end{bmatrix}$$

$$D_1 = \begin{bmatrix} I_m & -D_{m,s} \\ 0_{s,m} & I_s \end{bmatrix}$$

... далее
самостоятельно

Окончательно репроматрица задачи моделирования в пространстве состояний принимает вид

$$\Omega^{-1}(p) = \begin{bmatrix} (pI_n - A)^{-1} & 0 & (pI_n - A)^{-1} B \\ C(pI_n - A)^{-1} & I_m & C(pI_n - A)^{-1} B + D \\ 0 & 0 & I_s \end{bmatrix}$$

$$F_x^\delta(p) = 0$$

$$F_y^\delta(p) = I_m$$

Методика построения проматриц

1. Все подсистемы задаются обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами и линейными алгебраическими уравнениями. Общее количество уравнений должно совпадать с числом внутренних и выходных сигналов динамической системы. При необходимости делаются дополнительные обозначения промежуточных переменных так, чтобы все уравнения содержали суммы произведений полиномиальных коэффициентов и компонент внутренних и выходных сигналов.
2. С помощью преобразования Лапласа осуществляется переход к операторной форме уравнений с учетом ненулевых начальных условий.
3. При наличии в системе входных сигналов $U(s)$, поступающих непосредственно на динамические подсистемы, к уравнениям системы добавляются регуляризирующие тождества типа $U(s) = U(s)$.
4. Из изображений выходных сигналов всех устройств (статических и динамических) и входных сигналов $U(s)$, подающихся непосредственно на динамические устройства, формируется обобщенный выход системы $Y(s)$.

5. Из изображений начальных условий динамических объектов $x_0(p)$, а также входных сигналов статических и динамических устройств в соответствии с очередностью компонент обобщенного выхода формируется обобщенный вход системы.
6. Уравнения моделей устройств системы переписываются в том порядке, в каком записаны выходы этих устройств в обобщенном выходе $Y(p)$.
7. Слагаемые с компонентами обобщенного выхода переносятся в левую часть уравнений, а в правой части остаются только компоненты обобщенного входа системы.
8. Осуществляется переход к обобщенной матричной записи операторных уравнений системы и выписывается проматрица этой системы.
9. С учетом поставленной задачи путем исключения из обобщенных входа и выхода системы избыточных переменных понижается размер проматрицы.

Наилучшим способом уменьшения размера проматриц составных динамических систем является упрощение их статических подсистем.

- по возможности число статических подсистем за счет подстановок должно быть минимизировано;
- каждую статическую подсистему, не подвергаемую непосредственному внешнему воздействию, необходимо включать в структуру следующей за ней динамической подсистемы;
- желательно не использовать самостоятельные обозначения для входов динамических подсистем, являющихся выходами других динамических подсистем.

Но всегда следует иметь в виду, что такое уменьшение размера проматриц снижает их характеристические свойства.

Репроматрица пониженного размера утрачивает передаточные функции, соответствующие исключаемым промежуточным точкам системы.

Вопросы для самостоятельной проработки

1. Изучение соответствующих разделов учебного пособия [3];
2. Применительно к индивидуальному объекту управления (ОУ):
 - разработать математическую модель ОУ в форме проматрицы;
 - выполнить обращение проматрицы – найти реверсивную проматрицу;
 - проверить корректность полученных передаточных функций каналов управления.