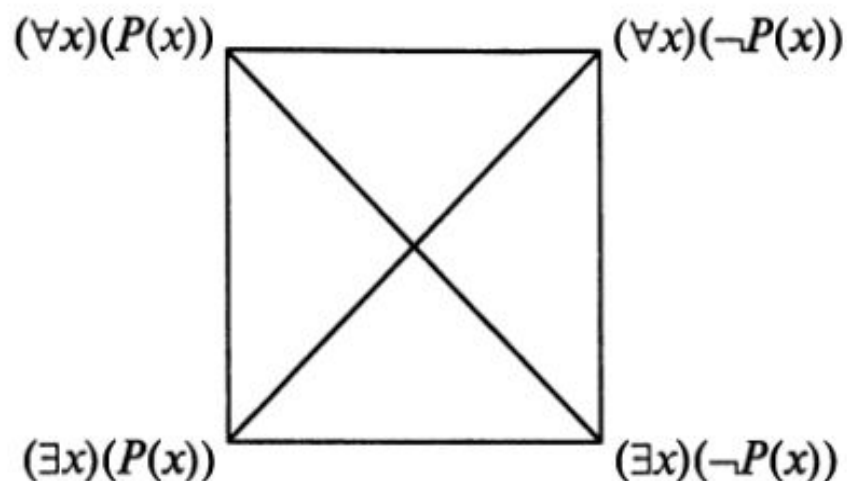


Лекция 10. Логический квадрат. Формулы логики предикатов. Тавтологии логики предикатов.

Логический квадрат. Кванторные операции (или операции квантификации) над предикатами — важнейший принципиальный шаг, отличающий теорию предикатов от теории высказываний. Систему взаимоотношений между универсальными и экзистенциальными высказываниями, возникающими при определении операций взятия квантора общности и квантора существования, схематично представляют в виде следующего так называемого «логического квадрата»:



Универсальные высказывания $(\forall x)(P(x))$ и $(\forall x)(\neg P(x))$, стоящие в двух верхних вершинах квадрата, не могут быть (ни для какого предиката $P(x)$) одновременно истинными (хотя конечно же могут быть одновременно ложными). Говорят, что эти высказывания являются *противными* или *контрарными*. Экзистенциальные высказывания $(\exists x)(P(x))$ и $(\exists x)(\neg P(x))$, стоящие в двух нижних вершинах квадрата, наоборот, не могут быть (ни для какого предиката $P(x)$) одновременно ложными (хотя конечно же могут быть одновременно истинными). Говорят, что эти высказывания *субпротивны* (или *субконтрарны*). Высказывания, стоящие в вершинах каждой диагонали квадрата, противоречат одно другому, т.е. одно является отрицанием другого. Наконец, под каждым из универсальных высказываний, стоящих у верхних вершин, стоит высказывание у нижней вершины, следующее из него, т.е. такое, что импликация этих высказываний (для любого предиката $P(x)$) является истинным высказыванием.

Формулы логики предикатов

Алфавит логики предикатов

предметные переменные: $x, y, z, x_i, y_i, z_i (i \in N)$;
нульместные предикатные переменные: $P, Q, R, P_i, Q_i, R_i (i \in N)$;
 n -местные ($n \geq 1$) предикатные переменные: $P(, \dots,), Q(, \dots,),$
 $R(, \dots,), P_i(, \dots,), Q_i(, \dots,), R_i(, \dots,) (i \in N)$ с указанием числа свободных мест в них;
символы логических операций: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$;
кванторы: \forall, \exists ;
вспомогательные символы: $(,)$ — скобки; $,$ — запятая.

Определение 21.1 (формулы логики предикатов). 1) Каждая нуль-местная предикатная переменная есть *формула*;

2) если $P(, \dots,)$ — n -местная предикатная переменная, то $P(x_1, \dots, x_n)$ есть *формула*, в которой все предметные переменные x_1, \dots, x_n свободны;

3) если F — формула, то $\neg F$ — также *формула*. Свободные (связанные) предметные переменные в формуле $\neg F$ те и только те, которые являются свободными (связанными) в F ;

4) если F_1, F_2 — формулы и если предметные переменные, входящие одновременно в обе эти формулы, свободны в каждой из них, то выражения $(F_1 \wedge F_2)$, $(F_1 \vee F_2)$, $(F_1 \rightarrow F_2)$, $(F_1 \leftrightarrow F_2)$ также являются *формулами*. При этом предметные переменные, свободные (связанные) хотя бы в одной из формул F_1, F_2 , называются *свободными (связанными)* и в новых формулах;

5) если F — формула и x — предметная переменная, входящая в F свободно, то выражения $(\forall x)(F)$ и $(\exists x)(F)$ также являются *формулами*, в которых переменная x связанная, а все остальные предметные переменные, входящие в формулу F свободно или связано, остаются и в новых формулах соответственно такими же;

6) никаких других формул логики предикатов, кроме получающихся согласно пп. 1—5, нет.

Формулы, определенные в п. 1 и п. 2, называются *элементарными* (или *атомарными*). Формулы, не являющиеся элементарными, называются *составными*.

Например, P , $Q(x, y, z)$, $R(x_1, x_2)$ — элементарные формулы, а $(\exists y)(P(x, y, z))$, $(\forall x)(\exists y)(P(x, y, z))$, $((\forall x)(P(x)) \wedge Q) \rightarrow \neg(\exists y)(R(x, y))$ — составные формулы. При этом в первой составной формуле предметная переменная y связана, а переменные x, z — свободные. Во второй составной формуле свободна лишь переменная z , остальные — связаны. В третьей составной формуле первое вхождение переменной x связано, а второе — свободно. Переменная y связана. Последнюю формулу более целесообразно было бы записать в следующем виде (заменяя связанную переменную x какой-нибудь буквой, не входящей в данную формулу): $((\forall z)(P(z)) \wedge Q) \rightarrow \neg(\exists y)(R(x, y))$.

В формулах вида $(\forall \xi)(F)$ и $(\exists \xi)(F)$ формула F называется *областью действия квантора* $\forall \xi$ или $\exists \xi$ соответственно. Тогда ясно, что вхождение предметной переменной в формулу будет связанным, если эта переменная находится в области действия квантора по этой переменной.

Формулы, в которых нет свободных предметных переменных, называются *замкнутыми*, а формулы, содержащие свободные предметные переменные, — *открытыми*. Так, все приведенные выше формулы логики предикатов, кроме формулы P , являются открытыми.

Примеры замкнутых формул:

$$P, (\forall z)(R(z)), (\exists x)(\forall y)(P(x, y)), (\forall x)(Q(x)) \rightarrow \neg(\forall x)(\exists y)(R(x, y))$$

Интерпретация формул

- Интерпретация – получение высказывания из формулы логики предикатов
- Если формула замкнутая, то интерпретация состоит в подстановке конкретных предикатов
- Если формула открытая, то сначала подставляют конкретные предикаты, затем подставляют вместо свободных переменных конкретные объекты

Пример 21.2.

Дадим интерпретацию формуле:

$(\forall x)(\exists y)(P(x, y))$ - замкнутая формула

1) Пусть $P(x, y)$ - «человек x родился в месяце y ».

Тогда $(\forall x)(\exists y)(P(x, y))$ - «для любого человека существует месяц, в котором он родился» - истинное высказывание.

2) Пусть $P(x, y)$ - «человек x является отцом y ».

Тогда $(\forall x)(\exists y)(P(x, y))$ - «у каждого мужчины существует ребенок» - ложное высказывание.

Пример. 21.3

$(\exists z)(P(x, y, z) \rightarrow Q(x, y, z)) \rightarrow R$ - открытая формула, x и y - свободные переменные

Пусть

$$M = N$$

$$P(x, y, z) - "x + y = z"$$

$$Q(x, y, z) - "x \cdot y = z"$$

$$R - "2 = 4"$$

$(\exists z)(P(x, y, z) \rightarrow Q(x, y, z))$ - тождественно истинный предикат, зависящий от двух переменных (на множестве натуральных чисел всегда найдется число, равное сумме и произведению любых двух натуральных чисел). Тогда при подстановке любых x и y получим импликацию $1 \rightarrow 0 = 0$, ложное высказывание.

ТЗ: Придумать по 2 интерпретации каких-нибудь формул с кванторами, так чтобы получались ложные и истинные высказывания (1 балл за формулу, до 5 формул)

Определение 21.4. Формула логики предикатов называется *выполнимой (опровержимой)* на множестве M , если при некоторой подстановке вместо предикатных переменных конкретных предикатов, заданных на этом множестве, она превращается в выполнимый (опровержимый) предикат.

Определение 21.5. Формула логики предикатов называется *тождественно истинной (тождественно ложной)* на множестве M , если при всякой подстановке вместо предикатных переменных любых конкретных предикатов, заданных на этом множестве, она превращается в тождественно истинный (тождественно ложный) предикат.

Определение 21.6. Формула логики предикатов называется *обезначимой, или тавтологией (тождественно ложной или противоречием)*, если при всякой подстановке вместо предикатных переменных любых конкретных предикатов, заданных на каких угодно множествах, она превращается в тождественно истинный (тождественно ложный) предикат. (Тот факт, что формула F является тавтологией, обозначается, как и в алгебре высказываний, $\models F$.)

Тавтологии алгебры предикатов

Теорема 21.8. *Всякая формула, получающаяся из тавтологии алгебры высказываний заменой входящих в нее пропозициональных переменных произвольными предикатными переменными, является тавтологией логики предикатов.*

Доказательство. Пусть $F(X_1, X_2, \dots, X_n)$ — тавтология алгебры высказываний и $P_1(x_1, x_2, \dots, x_{m_1}), P_2(y_1, y_2, \dots, y_{m_2}), \dots, P_n(z_1, z_2, \dots, z_{m_n})$ — предикатные переменные. Подставим их в данную формулу вместо пропозициональных переменных X_1, X_2, \dots, X_n соответственно. Получим формулу логики предикатов: $F(P_1(x_1, \dots, x_{m_1}), \dots, P_n(z_1, \dots, z_{m_n}))$. Если теперь вместо предикатных переменных подставить произвольные конкретные предикаты $A_1(x_1, x_2, \dots, x_{m_1}), \dots, A_n(z_1, z_2, \dots, z_{m_n})$, то формула превратится в конкретный предикат $F(A_1(x_1, \dots, x_{m_1}), \dots, A_n(z_1, \dots, z_{m_n}))$. Этот предикат тождественно истинный, потому что подстановка вместо предметных переменных $x_1, \dots, x_{m_1}, \dots, z_1, \dots, z_{m_n}$ любых конкретных предметов $a_1, \dots, a_{m_1}, \dots, c_1, \dots, c_{m_n}$ из соответствующих множеств превращает данный предикат в высказывание $F(A_1(x_1, \dots, x_{m_1}), \dots, A_n(z_1, \dots, z_{m_n}))$, которое может быть получено также в результате подстановки в исходную тавтологию $F(X_1, X_2, \dots, X_n)$ алгебры высказываний вместо пропозициональных переменных X_1, X_2, \dots, X_n конкретных высказываний $A_1(a_1, \dots, a_{m_1}), \dots, A_n(c_1, \dots, c_{m_n})$ соответственно и потому истинно. Следовательно, формула $F(P_1, P_2, \dots, P_n)$ логики предикатов также является тавтологией. Теорема доказана. \square

Теорема 21.9 (законы де Моргана для кванторов). *Следующие формулы логики предикатов являются тавтологиями:*

$$a) \neg(\forall x)(P(x)) \leftrightarrow (\exists x)(\neg P(x));$$

$$б) \neg(\exists x)(P(x)) \leftrightarrow (\forall x)(\neg P(x)).$$

Доказательство. Докажем тождественную истинность формулы *a*). (Тождественную истинность формулы *б*) предлагается проверить самостоятельно.) Данная формула замкнута, т. е. не имеет свободных предметных переменных. Поэтому, подставив в эту формулу вместо предикатной переменной $P(x)$ любой конкретный одноместный предикат $A(x)$, определенный на некотором множестве M , получим высказывание

$$\neg(\forall x)(A(x)) \leftrightarrow (\exists x)(\neg A(x)). \quad (1)$$

Для доказательства его истинности нужно убедиться, что обе части эквивалентности одновременно истинны или одновременно ложны. В самом деле, высказывание $\neg(\forall x)(A(x))$ истинно тогда и только тогда, когда высказывание $(\forall x)(A(x))$ ложно, что возможно на основании определения 20.1 тогда и только тогда, когда предикат $A(x)$ опровержим. Далее, опровержимость предиката

ТЗ: доказать б)

$A(x)$ означает выполнимость его отрицания $\neg A(x)$ (обдумайте это!), что равносильно на основании определения 20.3 истинности высказывания $(\exists x)(\neg A(x))$. Итак, высказывание $\neg(\forall x)(A(x))$ истинно тогда и только тогда, когда истинно высказывание $(\exists x)(\neg A(x))$. Следовательно, высказывание (1) истинно, что и доказывает тождественную истинность формулы a). \square

Непосредственно из этой теоремы и закона двойного отрицания (теорема 3.1, в) вытекает следствие.

Следствие 21.10 (выражение кванторов одного через другой).
Следующие формулы логики предикатов являются тавтологиями:

а) $(\forall x)(P(x)) \leftrightarrow \neg(\exists x)(\neg P(x))$;

б) $(\exists x)(P(x)) \leftrightarrow \neg(\forall x)(\neg P(x))$.

Заметим, что законы де Моргана для кванторов напоминают аналогичные законы для конъюнкции и дизъюнкции в алгебре высказываний. Можно считать, что эти законы для кванторов представляют собой обобщения соответствующих законов для конъюнкции и дизъюнкции, подобно тому как сами операции квантификации являются обобщениями операций конъюнкции и дизъюнкции, что отмечалось в § 20.

Теорема 21.11 (законы пронесения кванторов через конъюнкцию и дизъюнкцию). Следующие формулы логики предикатов являются тавтологиями:

$$a) (\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \leftrightarrow (\forall x)(P(x)) \wedge (\forall x)(Q(x));$$

$$б) (\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \leftrightarrow (\exists x)(P(x)) \vee (\exists x)(Q(x));$$

$$в) (\forall x)(P(x) \vee Q) \leftrightarrow (\forall x)(P(x)) \vee Q;$$

$$г) (\exists x)(P(x) \wedge Q) \leftrightarrow (\exists x)(P(x)) \wedge Q.$$

Доказательство. а) Подставим вместо предикатных переменных $P(x)$ и $Q(x)$ конкретные предикаты $A(x)$ и $B(x)$, определенные на некотором множестве M . Формула превратится в высказывание

$$(\forall x)(A(x) \wedge B(x)) \leftrightarrow (\forall x)(A(x)) \wedge (\forall x)(B(x)). \quad (1)$$

Докажем его истинность. На основании определения 20.1 высказывание $(\forall x)(A(x) \wedge B(x))$ истинно тогда и только тогда, когда предикат $A(x) \wedge B(x)$ тождественно истинен, что на основании следствия 19.7 возможно в том и только в том случае, когда оба предиката $A(x)$ и $B(x)$ тождественно истинны. Далее, тождественная истинность предикатов $A(x)$ и $B(x)$ равносильна, ввиду определения 20.1, истинности высказываний $(\forall x)(A(x))$ и $(\forall x)(B(x))$ соответственно, что равносильно истинности их конъюнкции $(\forall x)(A(x)) \wedge (\forall x)(B(x))$. Итак, левая и правая части эквивалентности (1) одновременно истинны и одновременно ложны, что дает истинность всего высказывания (1) и тождественную истинность доказываемой формулы.

ТЗ Доказать б),в),г)

Теорема 21.12 (законы пренесения кванторов через импликацию).
Следующие формулы логики предикатов являются тавтологиями:

$$a) (\forall x)(P(x) \rightarrow Q) \leftrightarrow ((\exists x)(P(x)) \rightarrow Q);$$

$$б) (\exists x)(P(x) \rightarrow Q) \leftrightarrow ((\forall x)(P(x)) \rightarrow Q);$$

$$в) (\forall x)(Q \rightarrow P(x)) \leftrightarrow (Q \rightarrow (\forall x)(P(x)));$$

$$г) (\exists x)(Q \rightarrow P(x)) \leftrightarrow (Q \rightarrow (\exists x)(P(x))).$$

Доказательство. Отметим, что предикатная переменная Q в этих формулах может быть не только нульместной, но и любой n -местной, важно лишь, чтобы в нее не входила предметная переменная x . Итак, пусть Q есть $Q(y_1, \dots, y_n)$. Будем считать для краткости, что Q есть одноместная предикатная переменная $Q(y)$. Тогда:

а) предположим, что данная формула не является тавтологией. В этом случае существуют такие конкретные предикаты $A(x)$ и $B(y)$, определенные на множествах M и M_1 соответственно, что предикат (от y)

$$(\forall x)(A(x) \rightarrow B(y)) \leftrightarrow ((\exists x)(A(x)) \rightarrow B(y))$$

опровержим, т.е. обращается в ложное высказывание при подстановке вместо предметной переменной y некоторого конкретного предмета $b \in M_1$:

$$\lambda[(\forall x)(A(x) \rightarrow B(b)) \leftrightarrow ((\exists x)(A(x)) \rightarrow B(b))] = 0.$$

Эквивалентность ложна, если ее члены принимают разные значения истинности, т. е. здесь могут представиться две возможности:

первая

$$\lambda[(\forall x)(A(x) \rightarrow B(b))] = 1; \quad (1)$$

$$\lambda[(\exists x)(A(x)) \rightarrow B(b)] = 0 \quad (2)$$

и вторая

$$\lambda[(\forall x)(A(x) \rightarrow B(b))] = 0; \quad (3)$$

$$\lambda[(\exists x)(A(x)) \rightarrow B(b)] = 1. \quad (4)$$

Рассмотрим первую возможность. Из формулы (2), по определению 1.7 импликации, имеем

$$\lambda[(\exists x)(A(x))] = 1; \quad (5)$$

$$\lambda[B(b)] = 0. \quad (6)$$

Далее, из формулы (5) и по определению 20.3 квантора существования заключаем, что предикат $A(x)$ выполним, т.е.

$$\lambda[A(a)] = 1 \quad (7)$$

для некоторого $a \in M$. Вернемся к соотношению (1). По определению 20.1 квантора общности предикат $A(x) \rightarrow B(b)$ тождественно истинен. В частности, если вместо предметной переменной x подставить $a \in M$, то получим истинное высказывание $\lambda[A(a) \rightarrow B(b)] = 1$. Но, учитывая (6) и (7), получаем $\lambda[A(a) \rightarrow B(b)] = \lambda[A(a)] \rightarrow \lambda[B(b)] = 1 \rightarrow 0 = 0$. Противоречие.

ТЗ: доказать для второго случая

Теорема 21.13 (законы удаления квантора общности и введения квантора существования). Следующие формулы логики предикатов являются тавтологиями:

а) $(\forall x)(P(x)) \rightarrow P(y)$;

б) $P(y) \rightarrow (\exists x)(P(x))$.

Доказательство. Проверим, что формула а) тождественно истинна (соответствующую проверку для формулы б) выполнить самостоятельно). Предположим, что формула а) не тождественно истинна. Это значит: существует такой предикат $A(x)$, определенный на некотором множестве M , что предикат (от y) $(\forall x)(A(x)) \rightarrow A(y)$ опровержим, т.е. превращается в ложное высказывание при подстановке вместо y некоторого $a \in M$: $\lambda[(\forall x)(A(x)) \rightarrow A(a)] = 0$. Последнее означает, что

$$\lambda[(\forall x)(A(x))] = 1; \quad (1)$$

$$\lambda[A(a)] = 0. \quad (2)$$

Из соотношения (1) заключаем, что предикат $A(x)$ тождественно истинный. Но это противоречит соотношению (2). Следовательно, сделанное предположение неверно, и данная формула — тавтология. \square

ТЗ: доказать б)