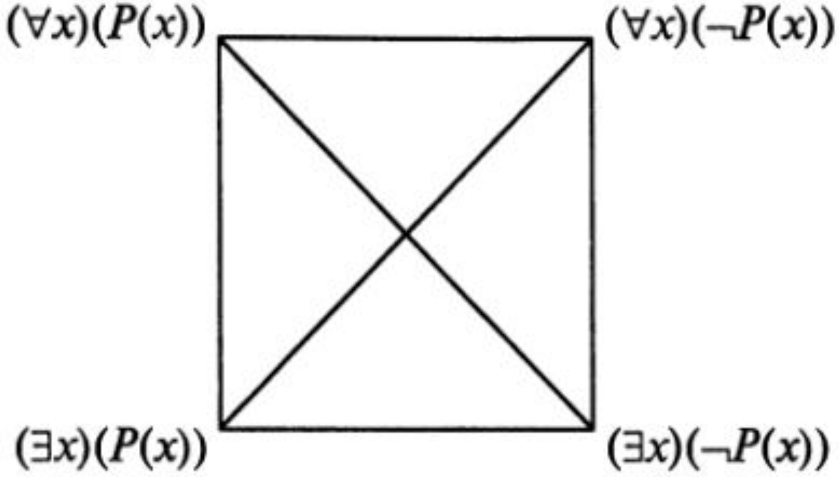
Лекция 10. Логический квадрат. Формулы логики предикатов. Тавтологии логики предикатов.

Логический квадрат. Кванторные операции (или операции квантификации) над предикатами — важнейший принципиальный шаг, отличающий теорию предикатов от теории высказываний. Систему взаимоотношений между универсальными и экзистенциальными высказываниями, возникающими при определении операций взятия квантора общности и квантора существования, схематично представляют в виде следующего так называемого «*логического квадрата*»:



Универсальные высказывания $(\forall x)(P(x))$ и $(\forall x)(\neg P(x))$, стоящие в двух верхних вершинах квадрата, не могут быть (ни для какого предиката $P(x)$) одновременно истинными (хотя конечно же могут быть одновременно ложными). Говорят, что эти высказывания являются *противными* или *контрарными*. Экзистенциальные высказывания $(\exists x)(P(x))$ и $(\exists x)(\neg P(x))$, стоящие в двух нижних вершинах квадрата, наоборот, не могут быть (ни для какого предиката $P(x)$) одновременно ложными (хотя конечно же могут быть одновременно истинными). Говорят, что эти высказывания *субпротивны* (или *субконтрарны*). Высказывания, стоящие в вершинах каждой диагонали квадрата, противоречат одно другому, т. е. одно является отрицанием другого. Наконец, под каждым из универсальных высказываний, стоящих у верхних вершин, стоит высказывание у нижней вершины, следующее из него, т. е. такое, что импликация этих высказываний (для любого предиката $P(x)$) является истинным высказыванием.

Формулы логики предикатов

Алфавит логики предикатов

предметные переменные: x, y, z, x_i, y_i, z_i ($i \in N$);

нульместные предикатные переменные: P, Q, R, P_i, Q_i, R_i ($i \in N$);

n-местные ($n \geq 1$) предикатные переменные: $P(\ , \ldots, \ )$, $Q(\ , \ldots, \ )$, $R(\ , \ldots, \ )$, $P_i(\ , \ldots, \ )$, $Q_i(\ , \ldots, \ )$, $R_i(\ , \ldots, \ )$ ($i \in N$) с указанием числа свободных мест в них;

символы логических операций: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$;

кванторы: $\forall$, $\exists$;

вспомогательные символы: (,) — скобки; , — запятая.

Определение 21.1 (формулы логики предикатов). 1) Каждая нульместная предикатная переменная есть ***формула***;

2) если $P(\ ,\ \ldots,\ )$ — n-местная предикатная переменная, то $P(x_1, \ldots, x_n)$ есть ***формула***, в которой все предметные переменные $x_1, \ldots, x_n$ ***свободны***;

3) если F — формула, то $\neg F$ — также ***формула***. ***Свободные*** (***связанные***) предметные переменные в формуле $\neg F$ те и только те, которые являются свободными (связанными) в F;

4) если F_1, F_2 — формулы и если предметные переменные, входящие одновременно в обе эти формулы, свободны в каждой из них, то выражения $(F_1 \wedge F_2)$, $(F_1 \vee F_2)$, $(F_1 \rightarrow F_2)$, $(F_1 \leftrightarrow F_2)$ также являются ***формулами***. При этом предметные переменные, свободные (связанные) хотя бы в одной из формул F_1, F_2, называются ***свободными*** (***связанными***) и в новых формулах;

5) если F — формула и x — предметная переменная, входящая в F свободно, то выражения $(\forall x)(F)$ и $(\exists x)(F)$ также являются ***формулами***, в которых переменная x связанная, а все остальные предметные переменные, входящие в формулу F свободно или связанно, остаются и в новых формулах соответственно такими же;

6) никаких других формул логики предикатов, кроме получающихся согласно пп. 1—5, нет.

Формулы, определенные в п. 1 и п. 2, называются *элементарными* (или *атомарными*). Формулы, не являющиеся элементарными, называются *составными*.

Например, P, $Q(x, y, z)$, $R(x_1, x_2)$ — элементарные формулы, а $(\exists y)(P(x, y, z))$, $(\forall x)(\exists y)(P(x, y, z))$, $(((\forall x)(P(x)) \wedge Q) \to \neg(\exists y)(R(x, y)))$ — составные формулы. При этом в первой составной формуле предметная переменная y связана, а переменные x, z — свободные. Во второй составной формуле свободна лишь переменная z, остальные — связаны. В третьей составной формуле первое вхождение переменной x связано, а второе — свободно. Переменная y связана. Последнюю формулу более целесообразно было бы записать в следующем виде (заменив связанную переменную x какой-нибудь буквой, не входящей в данную формулу): $(((\forall z)(P(z)) \wedge Q) \to \neg(\exists y)(R(x, y)))$.

В формулах вида $(\forall\xi)(F)$ и $(\exists\xi)(F)$ формула F называется *областью действия квантора* $\forall\xi$ или $\exists\xi$ соответственно. Тогда ясно, что вхождение предметной переменной в формулу будет связанным, если эта переменная находится в области действия квантора по этой переменной.

Формулы, в которых нет свободных предметных переменных, называются *замкнутыми*, а формулы, содержащие свободные предметные переменные, — *открытыми*. Так, все приведенные выше формулы логики предикатов, кроме формулы P, являются открытыми.

Примеры замкнутых формул :

P, $(\forall z)(R(z))$, $(\exists x)(\forall y)(P((x, y))$, $(\forall x)(Q(x)) \to \neg(\forall x)(\exists y)(R(x, y))$

Интерпретация формул

- Интерпретация – получение высказывания из формулы логики предикатов
- Если формула замкнутая, то интерпретация состоит в подстановке конкретных предикатов
- Если формула открытая, то сначала подставляют конкретные предикаты, затем подставляют вместо <u>свободных</u> переменных конкретные объекты

Пример 21.2.
Дадим интерпретацию формуле:
$(\forall x)(\exists y)(P(x, y))$ - замкнутая формула
1) Пусть $P(x, y)$ - «человек x родился в месяце y».
Тогда $(\forall x)(\exists y)(P(x, y))$ - «для любого человека существует месяц, в котором он родился» - истинное высказывание.
2) Пусть $P(x, y)$ - «человек x является отцом y».
Тогда $(\forall x)(\exists y)(P(x, y))$ - «у каждого мужчины существует ребенок» - ложное высказывание.

Пример. 21.3

$(\exists z)(P(x,y,z) \to Q(x,y,z)) \to R$ - открытая формула, x и y – свободные переменные

Пусть

$M = N$

$P(x,y,z) - "x + y = z"$

$Q(x,y,z) - "x \cdot y = z"$

$R - "2 = 4"$

$(\exists z)(P(x,y,z) \to Q(x,y,z))$ – тождественно истинный предикат, зависящий от двух переменных (на множестве натуральных чисел всегда найдется число, равное сумме и произведению любых двух натуральных чисел). Тогда при подстановке любых x и y получим импликацию $1 \to 0 = 0$, ложное высказывание.

ТЗ: Придумать по 2 интерпретации каких-нибудь формул с кванторами, так чтобы получались ложные и истинные высказывания (1 балл за формулу, до 5 формул)

Определение 21.4. Формула логики предикатов называется *выполнимой* (*опровержимой*) на множестве M, если при некоторой подстановке вместо предикатных переменных конкретных предикатов, заданных на этом множестве, она превращается в выполнимый (опровержимый) предикат.

Определение 21.5. Формула логики предикатов называется *тождественно истинной* (*тождественно ложной*) на множестве M, если при всякой подстановке вместо предикатных переменных любых конкретных предикатов, заданных на этом множестве, она превращается в тождественно истинный (тождественно ложный) предикат.

Определение 21.6. Формула логики предикатов называется *общезначимой*, или *тавтологией* (*тождественно ложной* или *противоречием*), если при всякой подстановке вместо предикатных переменных любых конкретных предикатов, заданных на каких угодно множествах, она превращается в тождественно истинный (тождественно ложный) предикат. (Тот факт, что формула F является тавтологией, обозначается, как и в алгебре высказываний, $\vDash F$.)

Тавтологии алгебры предикатов

Теорема 21.8. *Всякая формула, получающаяся из тавтологии алгебры высказываний заменой входящих в нее пропозициональных переменных произвольными предикатными переменными, является тавтологией логики предикатов.*

Доказательство. Пусть $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ — тавтология алгебры высказываний и $P_1(x_1, x_2, \ldots, x_{m_1})$, $P_2(y_1, y_2, \ldots, y_{m_2})$, ..., $P_n(z_1, z_2, \ldots, z_{m_n})$ — предикатные переменные. Подставим их в данную формулу вместо пропозициональных переменных $X_1, X_2, \ldots, X_n$ соответственно. Получим формулу логики предикатов: $F(P_1(x_1, \ldots, x_{m_1}), \ldots, P_n(z_1, \ldots, z_{m_n}))$. Если теперь вместо предикатных переменных подставить произвольные конкретные предикаты $A_1(x_1, x_2, \ldots, x_{m_1})$, ..., $A_n(z_1, z_2, \ldots, z_{m_n})$, то формула превратится в конкретный предикат $F(A_1(x_1, \ldots, x_{m_1}), \ldots, A_n(z_1, \ldots, z_{m_n}))$. Этот предикат тождественно истинный, потому что подстановка вместо предметных переменных $x_1, \ldots, x_{m_1}, \ldots, z_1, \ldots, z_{m_n}$ любых конкретных предметов $a_1, \ldots, a_{m_1}, \ldots, c_1, \ldots, c_{m_n}$ из соответствующих множеств превращает данный предикат в высказывание $F(A_1(x_1, \ldots, x_{m_1}), \ldots, A_n(z_1, \ldots, z_{m_n}))$, которое может быть получено также в результате подстановки в исходную тавтологию $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ алгебры высказываний вместо пропозициональных переменных $X_1, X_2, \ldots, X_n$ конкретных высказываний $A_1(a_1, \ldots, a_{m_1})$, ..., $A_n(c_1, \ldots, c_{m_n})$ соответственно и потому истинно. Следовательно, формула $F(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ логики предикатов также является тавтологией. Теорема доказана. □

Теорема 21.9 (законы де Моргана для кванторов). *Следующие формулы логики предикатов являются тавтологиями*:

а) $\neg(\forall x)(P(x)) \leftrightarrow (\exists x)(\neg P(x))$;
б) $\neg(\exists x)(P(x)) \leftrightarrow (\forall x)(\neg P(x))$.

Доказательство. Докажем тождественную истинность формулы *а*). (Тождественную истинность формулы *б*) предлагается проверить самостоятельно.) Данная формула замкнута, т. е. не имеет свободных предметных переменных. Поэтому, подставив в эту формулу вместо предикатной переменной $P(x)$ любой конкретный одноместный предикат $A(x)$, определенный на некотором множестве M, получим высказывание

$$\neg(\forall x)(A(x)) \leftrightarrow (\exists x)(\neg A(x)). \tag{1}$$

Для доказательства его истинности нужно убедиться, что обе части эквивалентности одновременно истинны или одновременно ложны. В самом деле, высказывание $\neg(\forall x)(A(x))$ истинно тогда и только тогда, когда высказывание $(\forall x)(A(x))$ ложно, что возможно на основании определения 20.1 тогда и только тогда, когда предикат $A(x)$ опровержим. Далее, опровержимость предиката

ТЗ: доказать б)

$A(x)$ означает выполнимость его отрицания $\neg A(x)$ (обдумайте это!), что равносильно на основании определения 20.3 истинности высказывания $(\exists x)(\neg A(x))$. Итак, высказывание $\neg(\forall x)(A(x))$ истинно тогда и только тогда, когда истинно высказывание $(\exists x)(\neg A(x))$. Следовательно, высказывание (1) истинно, что и доказывает тождественную истинность формулы *а*). □

Непосредственно из этой теоремы и закона двойного отрицания (теорема 3.1, *в*) вытекает следствие.

Следствие 21.10 (выражение кванторов одного через другой). *Следующие формулы логики предикатов являются тавтологиями*:

а) $(\forall x)(P(x)) \leftrightarrow \neg(\exists x)(\neg P(x))$;

б) $(\exists x)(P(x)) \leftrightarrow \neg(\forall x)(\neg P(x))$.

Заметим, что законы де Моргана для кванторов напоминают аналогичные законы для конъюнкции и дизъюнкции в алгебре высказываний. Можно считать, что эти законы для кванторов представляют собой обобщения соответствующих законов для конъюнкции и дизъюнкции, подобно тому как сами операции квантификации являются обобщениями операций конъюнкции и дизъюнкции, что отмечалось в § 20.

Теорема 21.11 (законы пронесения кванторов через конъюнкцию и дизъюнкцию). *Следующие формулы логики предикатов являются тавтологиями*:

а) $(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \leftrightarrow (\forall x)(P(x)) \wedge (\forall x)(Q(x))$;
б) $(\exists x)(P(x) \vee Q(x)) \leftrightarrow (\exists x)(P(x)) \vee (\exists x)(Q(x))$;
в) $(\forall x)(P(x) \vee Q) \leftrightarrow (\forall x)(P(x)) \vee Q$;
г) $(\exists x)(P(x) \wedge Q) \leftrightarrow (\exists x)(P(x)) \wedge Q$.

Доказательство. *а*) Подставим вместо предикатных переменных $P(x)$ и $Q(x)$ конкретные предикаты $A(x)$ и $B(x)$, определенные на некотором множестве M. Формула превратится в высказывание

$$(\forall x)(A(x) \wedge B(x)) \leftrightarrow (\forall x)(A(x)) \wedge (\forall x)(B(x)). \qquad (1)$$

Докажем его истинность. На основании определения 20.1 высказывание $(\forall x)(A(x) \wedge B(x))$ истинно тогда и только тогда, когда предикат $A(x) \wedge B(x)$ тождественно истинен, что на основании следствия 19.7 возможно в том и только в том случае, когда оба предиката $A(x)$ и $B(x)$ тождественно истинны. Далее, тождественная истинность предикатов $A(x)$ и $B(x)$ равносильна, ввиду определения 20.1, истинности высказываний $(\forall x)(A(x))$ и $(\forall x)(B(x))$ соответственно, что равносильно истинности их конъюнкции $(\forall x)(A(x)) \wedge (\forall x)(B(x))$. Итак, левая и правая части эквивалентности (1) одновременно истинны и одновременно ложны, что дает истинность всего высказывания (1) и тождественную истинность доказываемой формулы.

ТЗ Доказать б),в),г)

Теорема 21.12 (законы пронесения кванторов через импликацию). *Следующие формулы логики предикатов являются тавтологиями*:

а) $(\forall x)(P(x) \to Q) \leftrightarrow ((\exists x)(P(x)) \to Q)$;
б) $(\exists x)(P(x) \to Q) \leftrightarrow ((\forall x)(P(x)) \to Q)$;
в) $(\forall x)(Q \to P(x)) \leftrightarrow (Q \to (\forall x)(P(x)))$;
г) $(\exists x)(Q \to P(x)) \leftrightarrow (Q \to (\exists x)(P(x)))$.

Доказательство. Отметим, что предикатная переменная Q в этих формулах может быть не только нульместной, но и любой n-местной, важно лишь, чтобы в нее не входила предметная переменная x. Итак, пусть Q есть $Q(y_1, ..., y_n)$. Будем считать для краткости, что Q есть одноместная предикатная переменная $Q(y)$. Тогда:

а) предположим, что данная формула не является тавтологией. В этом случае существуют такие конкретные предикаты $A(x)$ и $B(y)$, определенные на множествах M и M_1 соответственно, что предикат (от y)

$$(\forall x)(A(x) \to B(y)) \leftrightarrow ((\exists x)(A(x)) \to B(y))$$

опровержим, т.е. обращается в ложное высказывание при подстановке вместо предметной переменной y некоторого конкретного предмета $b \in M_1$:

$$\lambda[(\forall x)(A(x) \to B(b)) \leftrightarrow ((\exists x)(A(x)) \to B(b))] = 0.$$

Эквивалентность ложна, если ее члены принимают разные значения истинности, т.е. здесь могут представиться две возможности:

п е р в а я

$$\lambda[(\forall x)(A(x) \to B(b))] = 1; \tag{1}$$
$$\lambda[(\exists x)(A(x)) \to B(b)] = 0 \tag{2}$$

и в т о р а я

$$\lambda[(\forall x)(A(x) \to B(b))] = 0; \tag{3}$$
$$\lambda[(\exists x)(A(x)) \to B(b)] = 1. \tag{4}$$

Рассмотрим первую возможность. Из формулы (2), по определению 1.7 импликации, имеем

$$\lambda[(\exists x)(A(x))] = 1; \tag{5}$$
$$\lambda[B(b)] = 0. \tag{6}$$

Далее, из формулы (5) и по определению 20.3 квантора существования заключаем, что предикат $A(x)$ выполним, т.е.

$$\lambda[A(a)] = 1 \tag{7}$$

для некоторого $a \in M$. Вернемся к соотношению (1). По определению 20.1 квантора общности предикат $A(x) \to B(b)$ тождественно истинен. В частности, если вместо предметной переменной x подставить $a \in M$, то получим истинное высказывание $\lambda[A(a) \to B(b)] = 1$. Но, учитывая (6) и (7), получаем $\lambda[A(a) \to B(b)] = \lambda[A(a)] \to \lambda[B(b)] = 1 \to 0 = 0$. Противоречие.

ТЗ: доказать для второго случая

Теорема 21.13 (законы удаления квантора общности и введения квантора существования). *Следующие формулы логики предикатов являются тавтологиями:*

а) $(\forall x)(P(x)) \to P(y)$;

б) $P(y) \to (\exists x)(P(x))$.

Доказательство. Проверим, что формула *а*) тождественно истинна (соответствующую проверку для формулы *б*) выполнить самостоятельно). Предположим, что формула *а*) не тождественно истинна. Это значит: существует такой предикат $A(x)$, определенный на некотором множестве M, что предикат (от y) $(\forall x)(A(x)) \to$ $\to A(y)$ опровержим, т.е. превращается в ложное высказывание при подстановке вместо y некоторого $a \in M$: $\lambda[(\forall x)(A(x)) \to A(a)] = 0$. Последнее означает, что

$$\lambda[(\forall x)(A(x))] = 1; \qquad (1)$$

$$\lambda[A(a)] = 0. \qquad (2)$$

Из соотношения (1) заключаем, что предикат $A(x)$ тождественно истинный. Но это противоречит соотношению (2). Следовательно, сделанное предположение неверно, и данная формула — тавтология. □

ТЗ: доказать б)