Решение иррациональных уравнений

Иррациональным уравнением называется уравнение, содержащее неизвестную под знаком радикала, а также под знаком возведения в дробную степень. Например,

$$\sqrt{2x-3} = x+1$$

$$\sqrt[3]{x+5} - 12\sqrt{x-4} = 5$$

$$3x^{\frac{4}{7}} - \sqrt{x+8} = 15$$

Основные методы решения иррациональных уравнений:

- возведение в степень обеих частей уравнения;
- введение новой переменной;
- разложение на множители.

Дополнительные методы решения иррациональных уравнений:

- ✔ умножение на сопряженное;
- переход к уравнению с модулем;
- метод «пристального взгляда» (метод анализа уравнения);
- ✔использование монотонности функции.

$$\sqrt[4]{x+3}+2=0$$

Метод возведения в степень обеих частей уравнения:

1) Если иррациональное уравнение содержит только один радикал, то нужно записать так, чтобы в одной части знака равенства оказался только этот радикал. Затем обе части уравнения возводят в одну и ту же степень, чтобы получилась рациональное уравнение.

Метод возведения в степень обеих частей уравнения:

2) Если в иррациональном уравнении содержится два или более радикала, то сначала изолируется один из радикалов, затем обе части уравнения возводят в одну и ту же степень, и повторяют операцию возведения в степень до тех пор, пока не получится рациональное уравнение.

Пример №1 $\sqrt{3x-2}=x$

$3x-2=x^2$

$x^2-3x+2=0$

$x_1=1 \quad x_2=2$

Проверка: $x=1$: $\sqrt{3*1-2}=1$

$1=1$

$x=2$: $\sqrt{3*2-2}=2$

$2=2$

Ответ: $x_1=1$, $x_2=2$

Пример №2 $\sqrt{x^2 + 5x + 1} = 2x - 1$

$$x^2 + 5x + 1 = 4x^2 - 4x + 1$$

$$3x^2 - 9x = 0$$

$$3x(x - 3) = 0$$

$x = 0$ или $x = 3$.

Проверка: 1) $x = 0$: $\sqrt{0 + 5 * 0 + 1} = 2 * 0 - 1$

$1 \neq -1$

2) $x = 3$: $\sqrt{9 + 15 + 1} = 6 - 1$

$5 = 5$

Ответ: $x = 3$.

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g^2(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 (g(x) \geq 0) \end{cases}$$

Пример №3 Решите уравнение $\sqrt{2x-3} = 4 - x$

$$\begin{cases} 2x - 3 = (4 - x)^2 \\ 4 - x \geq 0 \end{cases} => \begin{cases} x^2 - 10x + 19 = 0 \\ x \leq 4 \end{cases}$$

$$\underline{x = 5 - \sqrt{6}}$$

$$x = 5 + \sqrt{6} > 4 - \text{посторонний корень}$$

Ответ: $x = 5 - \sqrt{6}.$

Пример№4

Решите уравнение $\sqrt{x^2 - 2} = \sqrt{x}$

$$\begin{cases} x^2 - 2 = x \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - x - 2 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} x = -1 < 0 - \text{посторонний корень} \\ x = 2 \end{array}$$

Ответ: 2.

Пример №5 Решите уравнение

$$\sqrt{3x-1}-\sqrt{x-2}=3$$

ОДЗ: $\begin{cases} 3x-1\geq 0 \\ x-2\geq 0 \end{cases} \Rightarrow x\geq 2$

$$\sqrt{3x-1}=3+\sqrt{x-2}$$
$$3x-1=9+6\sqrt{x-2}+x-2$$
$$3x-1=7+x+6\sqrt{x-2}$$
$$2x-8=6\sqrt{x-2}$$
$$x-4=3\sqrt{x-2}$$
$$x^2-8x+16=9(x-2)$$

$$x^2-17x+34=0$$

$$D=17^2-4*1*34=289-136=153$$

$$\sqrt{D}=\sqrt{153}=\sqrt{9*17}=3\sqrt{17}$$

$$x=\frac{17+3\sqrt{17}}{2}\in ОДЗ$$

$$x=\frac{17-3\sqrt{17}}{2}<4\notin ОДЗ - \text{посторонний корень}$$

Ответ: $\frac{17+3\sqrt{17}}{2}$

Метод введения новой переменной

Данный метод применяется в том случае, когда в уравнении неоднократно встречается некоторое выражение, зависящее от неизвестной величины. Тогда имеет смысл принять это выражение за новую переменную и решить уравнение сначала относительно введенной неизвестной, а потом найти исходную величину.

Пример №9 Решите уравнение

$$\sqrt[4]{x} + \sqrt[8]{x} - 2 = 0 \qquad\qquad x \geq 0$$

$$\sqrt[8]{x} = y, \quad y \geq 0$$

$$y^2 + y - 2 = 0$$

$$\underline{y = 1}$$

$$y = -2 < 0 - \text{посторонний корень}$$

$$y = 1, \qquad \sqrt[8]{x} = 1, \quad => x = 1$$

Ответ: $x = 1$.

Пример №10 Найдите сумму корней уравнения:

$$(x+4)(x+1)-3\sqrt{x^2+5x+2}=6$$

$$x^2+5x+4-3\sqrt{x^2+5x+2}=6$$

Обозначим $y=\sqrt{x^2+5x+2}\,, y\geq 0$ и перейдем к уравнению

$$y^2+2-3y=6$$

$$y^2-3y-4=0$$

$$y=-1<0 - \text{посторонний корень}$$

$$\underline{y=4}$$

$$\sqrt{x^2+5x+2}=4$$

$$x^2+5x+2=16$$

$$x^2+5x-14=0$$

$$x=-7$$

$$x=2$$

<u>Проверка: </u>1) $x=-7$, тогда $\sqrt{(-7)^2+5(-7)+2}=4$

$$\sqrt{16}=4;\quad 4=4\quad \text{верно}$$

2) $x=2$, тогда $\sqrt{2^2+5*2+2}=4$

$$\sqrt{16}=4;\quad 4=4\quad \text{верно}$$

Ответ: -5.

Пример №11 Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} - 2\sqrt{\frac{x-1}{2x+1}} = 1$$

$$\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} = a, \quad a > 0$$

$$a - 2 * \frac{1}{a} = 1$$

$$a^2 - a - 2 = 0$$

$a = -1 < 0$ – посторонний корень

$\underline{a = 2}$

$$\sqrt{\frac{2x+1}{x-1}} = 2$$

$$2x + 1 = 4(x - 1)$$

$$2x = 5 \quad => x = 2{,}5$$

Ответ: $x = 2{,}5$.

Метод разложения на множители

Для решения иррациональных уравнений данным методом следует пользоваться правилом:

Произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей, входящих в произведение; равен нулю; а остальные при этом имеют смысл.

Уравнение $\sqrt{f(x)} \cdot q(x) = 0$ **равносильно совокупности**

1) $\left[\begin{array}{l} f(x) = 0 \\ q(x) - \textit{определена} \end{array} \right.$

2) $\left[\begin{array}{l} q(x) = 0 \\ f(x) \geq 0 \end{array} \right.$

Пример №12

Решите уравнение: $(x^2 - 5x - 6)\sqrt{\frac{x+2}{x-5}} = 0$

Решение:

1) $\frac{x+2}{x-5} = 0$

$x = -2$

2) $\begin{cases} x^2 - 5x - 6 = 0 \\ \frac{x+2}{x-5} \geq 0 \end{cases}$ => $\begin{cases} x = 6, \ x = -1 \\ x \in (-\infty; -2] \cup (5; \infty) \end{cases}$

Ответ: {-2;6}

Пример №13

Решите уравнение: $\sqrt{x-3} * x^2 = 4\sqrt{x-3}$

Решение:

$$\sqrt{x-3} * (x^2 - 4) = 0$$

1) $x - 3 = 0$

$x = 3$

2) $\begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ x - 3 \geq 0 \end{cases} => \begin{cases} x = 2, \quad x = -2 \\ x \geq 3 \end{cases}$

Система решений не имеет.

Ответ: {3}

Пример №14 Решите уравнение:

$$\sqrt{x^2-5x+6}-3\sqrt{x-3}-5\sqrt{x-2}+15=0$$

Решение:

ОДЗ: $x \geq 3$

$$\sqrt{(x-3)(x-2)}-3\sqrt{x-3}-5\sqrt{x-2}+15=0$$

$$\sqrt{x-3}\left(\sqrt{x-2}-3\right)-5\left(\sqrt{x-2}-3\right)=0$$

$$\left(\sqrt{x-3}-5\right)\left(\sqrt{x-2}-3\right)=0$$

1) $\sqrt{x-3}=5$
   $x=28$
2) $\sqrt{x-2}=3$
   $x=11$

Ответ: {11;28}

Дополнительные методы решения иррациональных уравнений:

- метод «пристального взгляда» (метод анализа уравнения);
- использование монотонности функции;
- переход к уравнению с модулем.

Метод анализа уравнения

Свойства корней, которые используют при решении уравнений данным способом:

1. Все корни четной степени являются арифметическими, то есть если подкоренное выражение отрицательно, то корень лишен смысла; если подкоренное выражение равно нулю, то корень так же равен нулю; если подкоренное выражение положительно, то значение корня положительно.

2. Все корни нечетной степени определены при любом значении подкоренного выражения.

3. Функции $y = \sqrt[2n]{x}$ и $y = \sqrt[2n+1]{x}$

являются возрастающими в своей области определения.

Пример №15 $\sqrt{x+1}+\sqrt{20}=\sqrt{5}$

$$\sqrt{x+1}=-\sqrt{5}$$

Арифметический корень не может быть отрицательным числом, поэтому уравнение решений не имеет.

Пример №16 $\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+9}=4$

$$\sqrt{x^2+4}\geq 2$$

$$\sqrt{x^2+9}\geq 3$$

Уравнение не имеет решений.

Пример №17 $\sqrt{x^2+1}-\sqrt{2x^2+5}=1$

$$x^2+1<2x^2+5$$

Уравнение не имеет решений.

Пример №18 $\sqrt{4-x}-\sqrt{x-6}=2$

$$\begin{cases}4-x\geq 0\\ x-6\geq 0\end{cases} => \begin{cases}x\leq 4\\ x\geq 6\end{cases}$$

Уравнение не имеет решений.

Метод использования монотонности функции

Использование монотонности функций, входящих в уравнение, нередко значительно упрощают техническую часть решения.

Сформулируем два свойства монотонных функций:

1. Сумма возрастающих (убывающих) функций – функция возрастающая (соответственно, убывающая) на их общей области определения.

2. Разность возрастающей и убывающей (соответственно, убывающей и возрастающей) функций – функция возрастающая (убывающая) на их общей области определения.

Метод использования монотонности функций

<u>Теорема о корне</u>

Пусть $y=f(x)$ – монотонная на некотором промежутке функция. Тогда при любом значении а уравнение $f(x)=a$ имеет на этом промежутке не более одного корня.

Пример №19 Решите уравнение: $\sqrt{37x+12}-\sqrt{31-6x}=2.$

Ответ: {1}

Пример №20

Решите уравнение: $\sqrt{2x+5}+\sqrt{x-1}=8.$

Ответ: {10}

Пример №21

Решите уравнение:

$$\sqrt[3]{4x-1}+\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[9]{x-6}=6.$$

Ответ: {7}

Метод перехода к уравнению с модулем

<u>Пример №22</u> Найти наибольший корень уравнения

$$\sqrt{x^2+12x+36}=x^2-36$$

$$\sqrt{(x+6)^2}=x^2-36$$

$$|x+6|=x^2-36$$

1) $\begin{cases} x+6<0 \\ -x-6=x^2-36 \end{cases}$

$$\begin{cases} x<-6 \\ x^2+x-30=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x<-6 \\ x=7 \\ x=-6 \end{cases}$$

2) $\begin{cases} x+6\geq 0 \\ x+6=x^2-36 \end{cases}$

$$\begin{cases} x\geq -6 \\ x^2-x-42=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq -6 \\ x=-6 \\ x=5 \end{cases}$$

Ответ: наибольший корень уравнения $x=7$.

Пример №23

$$\sqrt{x+2+2\sqrt{x+1}}+\sqrt{x+2-2\sqrt{x+1}}=2$$

$$\sqrt{(\sqrt{x+1}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x+1}-1)^2}=2$$

$$\left|\sqrt{x+1}+1\right|+\left|\sqrt{x+1}-1\right|=2$$

$$\sqrt{x+1}+1+\left|\sqrt{x+1}-1\right|=2$$

1) $\begin{cases}\sqrt{x+1}-1\ge 0\\ x+1\ge 0\\ 2\sqrt{x+1}=2\end{cases}$

$$\begin{cases}\sqrt{x+1}\ge 1\\ x\ge -1\\ x=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\ge 0\\ x\ge -1\\ x=0\end{cases} \;=>\; x=0$$

2) $\begin{cases}\sqrt{x+1}-1<0\\ x+1\ge 0\\ 2=2\ (\text{верно})\end{cases}$

$$\begin{cases}\sqrt{x+1}<1\\ x\ge -1\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\ge -1\\ x+1<1\end{cases}$$

$$\begin{cases}x\ge -1\\ x<0\end{cases} \;=>\; x\in[-1;0)$$

Ответ: $x\in[-1;0]$

Пример №24

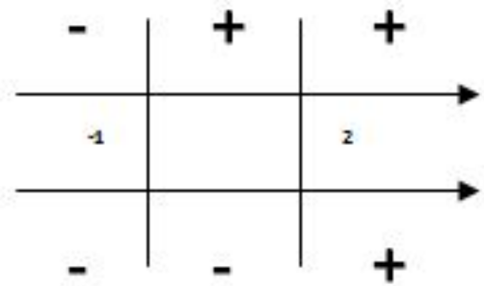
При каких значениях k уравнение имеет два корня?

$$|x+1| + \sqrt{x^2 - 4x + 4} = k$$

$$|x+1| + |x-2| = k$$

$$x = -1$$

$$x = 2$$



$$\begin{cases} x < -1 \\ -x - 1 - x + 2 = k \end{cases} \quad \begin{cases} -1 \le x \le 2 \\ x + 1 - x + 2 = k \end{cases} \quad \begin{cases} x \ge 2 \\ x + 1 + x - 2 = k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -1 \\ x = \dfrac{1-k}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} -1 \le x \le 2 \\ k = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \ge 2 \\ x = \dfrac{k+1}{2} \end{cases}$$

Условия существования двух корней:

$$\begin{cases} k \ne 3 \\ \dfrac{1-k}{2} < -1 \\ \dfrac{k+1}{2} \ge 2 \end{cases} \quad => \quad \begin{cases} k \ne 3 \\ k > 3 \\ k \ge 3 \end{cases} \quad => \quad k > 3$$

Ответ: при $k > 3$ уравнение имеет два корня.

Пример №6 Решить уравнение

$$x - 1 = \sqrt[3]{x^2 - x - 1}$$

Пример №8 Решите уравнение

$$\sqrt{1 - x\sqrt{x^2 - 1}} = x - 1$$