

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ В БЕСКОНЕЧНОСТИ И В ТОЧКЕ

$$a_n = f(n)$$

Число A называется пределом функции $y=f(x)$, при x стремящемся к бесконечности, если для любого, сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$, найдется такое положительное число S , что при всех $|x| > S$, выполняется неравенство:

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

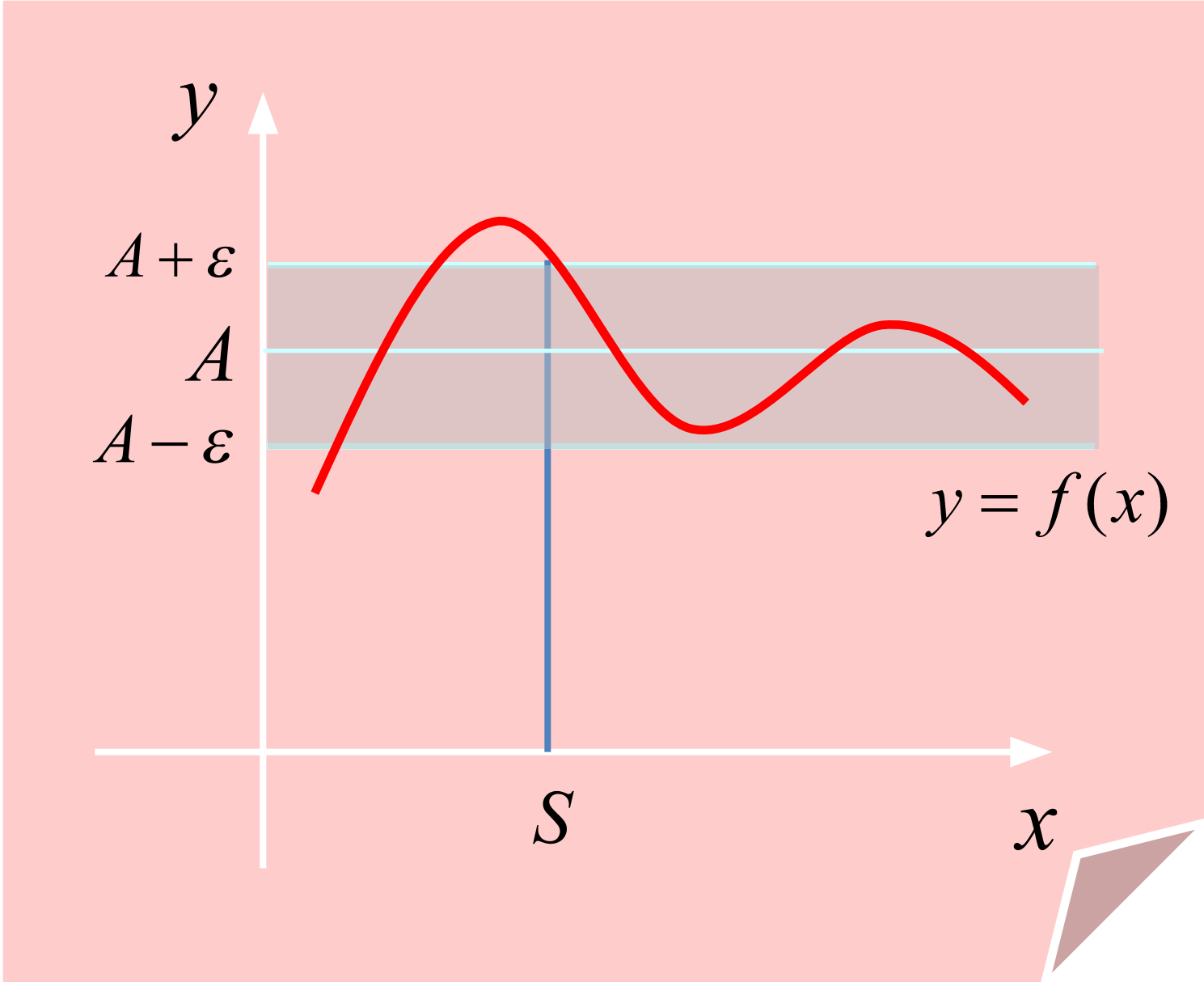
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$$

Смысл определения:

При достаточно больших по модулю значениях x , значения функции $f(x)$ очень мало отличаются от числа A (меньше, чем на число ε , каким бы малым оно не было).

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$$



$$y = f(x)$$

$$|x| < S$$

$$A - \varepsilon < y < A + \varepsilon$$

Пример.

Доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x + 1}{x} = 5$$

Première.

$$\left| \left(\frac{5x+1}{x} \right) - 5 \right| < \varepsilon \quad \longrightarrow$$

$$\left| 5 + \frac{1}{x} - 5 \right| < \varepsilon \quad \longrightarrow \quad \left| \frac{1}{x} \right| < \varepsilon \quad \longrightarrow \quad |x| > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$S = \frac{1}{\varepsilon} > 0$$

$$|f(x) - 5| < \varepsilon \quad \longrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x+1}{x} = 5$$

Замечание 1.

Рассмотренное определение предела при x стремящемся к бесконечности предполагает неограниченное возрастание x по абсолютной величине.

Можно сформулировать понятие предела при стремлении x к бесконечности любого знака, т. е. при

$$x \rightarrow +\infty$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$x \rightarrow +\infty$$

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

$$x \rightarrow -\infty$$

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

Число A называется пределом функции $y=f(x)$, при $x \rightarrow x_0$, (или в точке x_0) если для любого, сколь угодно малого числа $\varepsilon > 0$, найдется такое положительное число δ , что при всех $|x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство:

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

Смысл определения:

При всех значениях x , достаточно близких к x_0 , значения функции $y=f(x)$ очень мало отличаются по абсолютной величине от числа A (меньше, чем на число ε , каким бы малым оно не было).

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$$

$$|x - x_0| < \delta$$

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$

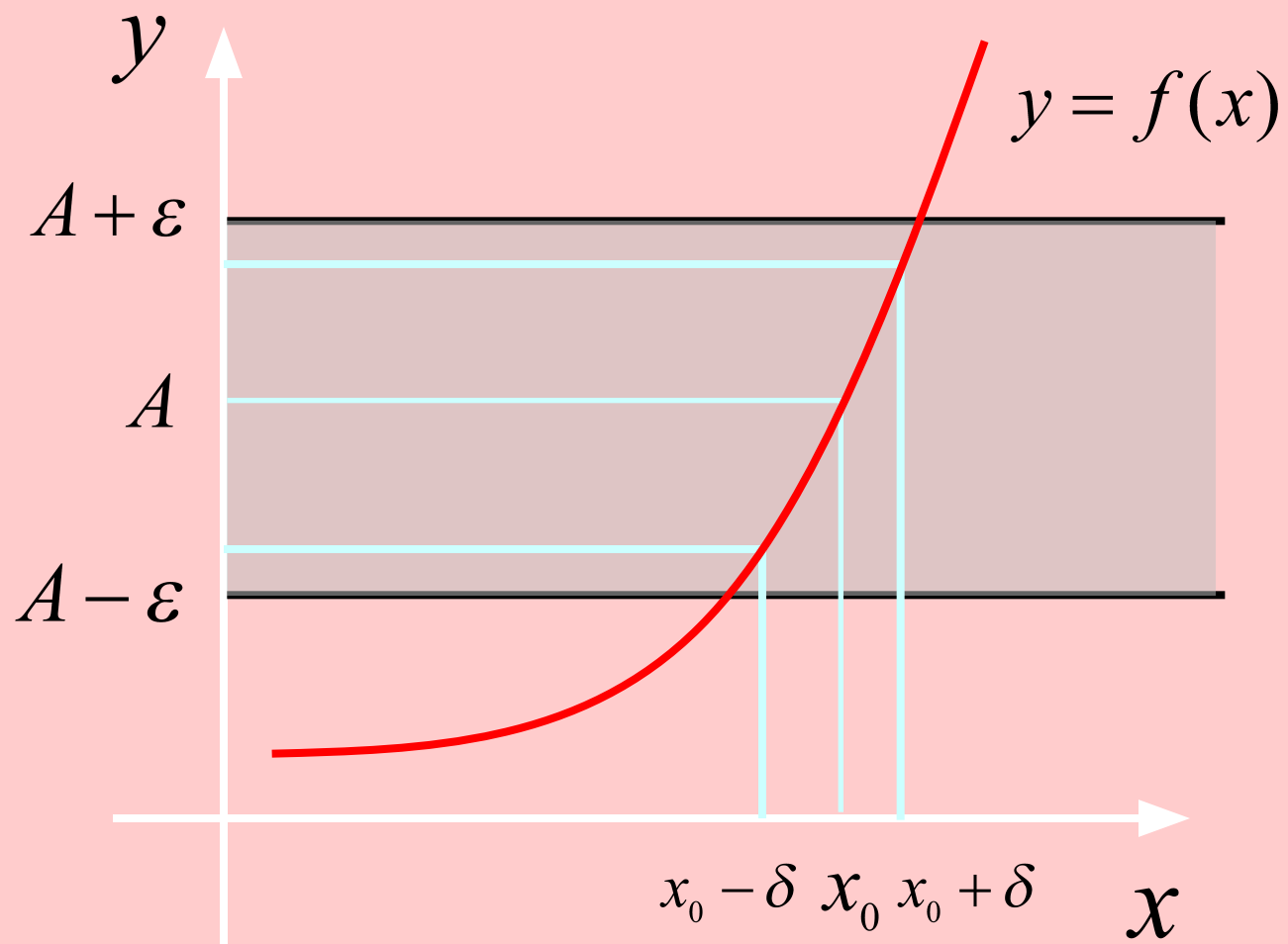
$$y = f(x)$$

$$y = f(x)$$

$$\varepsilon > 0$$

$$y = f(x)$$

$$A - \varepsilon < y < A + \varepsilon$$



Пример.

Доказать, что

$$\lim_{x \rightarrow 1} (2x + 3) = 5$$

Petite.

$$|2x + 3 - 5| < 0.1$$

$$|x - 1| < 0.05$$

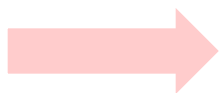
$$|x - 1| < 0.005$$

$$|2x + 3 - 5| < \varepsilon$$

$$|x - 1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2} > 0$$

$$|f(x) - 5| < \varepsilon$$



$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} (2x + 3) = 5$$

Замечание 2.

Определение предела не требует существования функции в самой точке x_0 , т. к. рассматриваются значения функции в некоторой окрестности точки x_0 .

Т.е. рассматривая предел $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

мы предполагаем, что $x \rightarrow x_0$

но не достигает значения x_0 .

Замечание 3.

Если при $x \rightarrow x_0$

переменная x принимает значения только меньше x_0 или, наоборот, больше x_0 , и при этом функция $f(x)$ стремится к некоторому числу A , то говорят об односторонних пределах соответственно справа и слева:

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A \qquad \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A$$

$$x \rightarrow x_0$$

$$|x - x_0| < \delta$$

$$x_0 - \delta < x < x_0$$

$$x \rightarrow x_0 - 0$$

$$x_0 < x < x_0 + \delta$$

$$x \rightarrow x_0 + 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A$$



$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

1. Составить уравнение прямой, удаленной от точки $A(4; -2)$ на расстояние $d = 4$ и параллельной прямой $8x - 15y = 0$.

$$8x - 15y = 0 \quad || \quad 8x - 15y + C = 0$$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad ; \quad \boxed{\begin{array}{l} A(4, -2), \quad d=4 \\ A=8, \quad B=-15 \end{array}}$$

$$4 = \frac{8 \cdot 4 - 15 \cdot (-2) + C}{\sqrt{8^2 + (-15)^2}}$$

$$4 = \frac{-(8 \cdot 4 - 15 \cdot (-2) + C)}{\sqrt{8^2 + (-15)^2}}$$

$$4 = \frac{32 + 30 + C}{\sqrt{289}}$$

$$4 = \frac{-32 - 30 - C}{\sqrt{289}}$$

$$4 = \frac{62 + C}{17}$$

$$4 = \frac{-62 - C}{17}$$

$$62 + C = 68$$

$$68 = -62 - C$$

$$\boxed{C = 6}$$

$$68 + 62 = -C$$

$$\boxed{C = -130}$$

$$8x - 15y + 6 = 0$$

$$8x - 15y - 130 = 0$$

БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Функция $f(x)$ называется бесконечно малой величиной, если при $x \rightarrow x_0$

или при $x \rightarrow \infty$ ее предел равен нулю:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$$

или

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$

ПРИМЕР.

Функция $y = \cos x$

является бесконечно малой величиной при

$$x \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

поскольку

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos x = 0$$



ТЕОРЕМА

Если функция $f(x)$ имеет при $x \rightarrow x_0$ или при $x \rightarrow \infty$ предел, равный A , то ее можно представить в виде суммы этого числа A и бесконечно малой величины

$\alpha(x)$ при $x \rightarrow x_0$ или $x \rightarrow \infty$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \rightarrow \infty}} f(x) = A \quad \Rightarrow \quad f(x) = A + \alpha(x)$$

Верна и обратная

ТЕОРЕМА

Если функцию $f(x)$ можно представить как сумму числа A и бесконечно малой величины $\alpha(x)$ при $x \rightarrow x_0$ или $x \rightarrow \infty$ то число A является пределом этой функции при $x \rightarrow x_0$ или при $x \rightarrow \infty$

$$f(x) = A + \alpha(x) \quad \Rightarrow \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \rightarrow \infty}} f(x) = A$$

Свойства бесконечно малых величин



Алгебраическая сумма бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая.



*Произведение бесконечно малой
величины на ограниченную функцию
есть величина бесконечно малая.*



*Частное от деления бесконечно малой
величины на функцию, предел которой
отличен от нуля, есть величина
бесконечно малая.*



ПРИМЕР.

Пусть

$$\alpha(x) = 5x - 10 \quad \beta(x) = \lg(x - 1)$$

являются бесконечно малыми величинами

при

$$x \rightarrow 2$$

поскольку

$$\lim_{x \rightarrow 2} (5x - 10) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 2} \lg(x - 1) = 0$$

Функция

$$f(x) = \sin x$$

является ограниченной на любом промежутке, поскольку

$$|\sin x| \leq 1$$

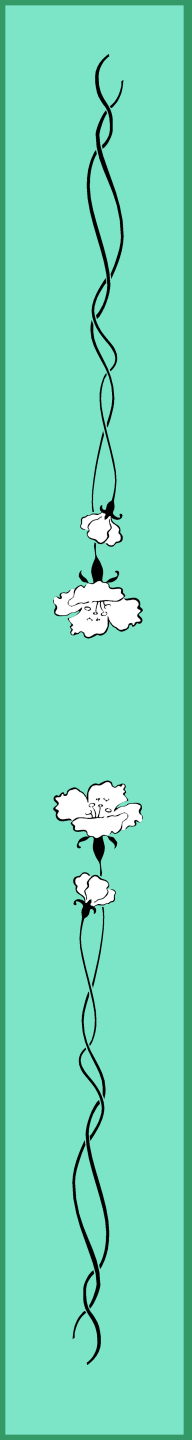
Функция $\varphi(x) = x^2 - 5$

имеет предел при $x \rightarrow 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 5) = -1$$

Тогда функции

$$\alpha(x) \pm \beta(x) = 5x - 10 \pm \lg(x - 1)$$


$$\alpha(x) \cdot f(x) = (5x - 10) \cdot \sin x$$

$$\beta(x) \cdot f(x) = \lg(x - 1) \cdot \sin x$$

$$\alpha(x) \cdot \beta(x) = (5x - 10) \cdot \lg(x - 1)$$

$$\frac{\alpha(x)}{\varphi(x)} = \frac{5x - 10}{x^2 - 5}$$

**являются бесконечно малыми величинами
при $x \rightarrow 2$**

Замечание

Предел отношения двух бесконечно малых величин

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \rightarrow \infty}} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$$

- может быть равен нулю, тогда $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка, чем $\beta(x)$;*
- может быть равен числу A , не равному нулю, тогда $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ имеют одинаковый порядок малости;*
- может быть равен бесконечности, тогда $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более низкого порядка, чем $\beta(x)$.*





БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ВЕЛИЧИНЫ

Функция $f(x)$ называется бесконечно большой величиной, если для любого, даже сколь угодно большого числа $M > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что для всех $x \neq x_0$ и удовлетворяющих условию $|x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство

$$|f(x)| > M$$



Если $f(x) > M$ то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

Если $f(x) < -M$ то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$



ПРИМЕР.

Функция

$$y = \operatorname{tg}x$$

является бесконечно большой величиной при

$$x \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

поскольку

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}x = \infty$$



Замечание

*Бесконечно большая величина
является неограниченной
функцией при*

$x \rightarrow x_0$ или при $x \rightarrow \infty$

*но в то же время
неограниченная функция не
обязательно бесконечно
большая.*



ПРИМЕР.

Функция $y = x \sin x$

является неограниченной функцией, но при

$$x \rightarrow \infty$$

она не будет бесконечно большой, поскольку ее значения колеблются, переходя от положительных к отрицательным через ноль.



Свойства бесконечно больших величин



*Сумма бесконечно большой величины
и ограниченной функции есть величина
бесконечно большая.*



Произведение бесконечно большой величины на функцию, предел которой отличен от нуля, есть величина бесконечно большая.



Частное от деления бесконечно большой величины на функцию, имеющую предел, есть величина бесконечно большая.



ПРИМЕР.

Функция $f(x) = \operatorname{tg}x$

является бесконечно большой при

$$x \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

Функция $\varphi(x) = 4x - 3$

имеет предел при

$$x \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (4x - 3) = 2\pi - 3 \neq 0$$



Функция $\psi(x) = \sin x$

является ограниченной.

Тогда функции


$$f(x) \pm \psi(x) = \operatorname{tg}x \pm \sin x$$

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\operatorname{tg}x}{4x - 3}$$

являются бесконечно большими величинами

при

$$x \rightarrow \frac{\pi}{2}$$



ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ

Пусть $f(x)$ и $\varphi(x)$ – функции, для которых существуют пределы при

$$x \rightarrow x_0 \quad \text{или} \quad x \rightarrow \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$$

$$x \rightarrow \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = B$$

$$x \rightarrow \infty$$

Тогда справедливы следующие теоремы:





ТЕОРЕМА 1.


*Функция не может иметь более
одного предела.*





ТЕОРЕМА 2.


*Предел алгебраической суммы
(разности) конечного числа функций
равен сумме (разности) пределов этих
функций:*

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \rightarrow \infty}} (f(x) \pm \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = A \pm B$$
$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) \pm \varphi(x)) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = A \pm B$$




ТЕОРЕМА 3.

*Предел произведения конечного
числа функций равен произведению
пределов этих функций:*

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \rightarrow \infty}} (f(x) \cdot \varphi(x)) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \rightarrow \infty}} f(x) \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \rightarrow \infty}} \varphi(x) = A \cdot B$$




Следствие.


$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \rightarrow \infty}} (C \cdot f(x)) = C \cdot \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \rightarrow \infty}} f(x) = C \cdot A$$





ТЕОРЕМА 4.

Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \rightarrow \infty}} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \rightarrow \infty}} \varphi(x)} = \frac{A}{B}$$




ТЕОРЕМА 5.

Если $\lim_{u \rightarrow u_0} f(u) = A$ *и* $\lim_{x \rightarrow x_0} \varphi(x) = u_0$

*то предел сложной функции существует
и равен*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f[\varphi(x)] = A$$






Замечание

В этих теоремах полагается, что существуют пределы функций $f(x)$ и $\varphi(x)$, из чего следует существование пределов суммы, произведения или частного этих функций.

Однако из существования пределов суммы, произведения или частного еще не следует, что существуют пределы самих функций $f(x)$ и $\varphi(x)$.






Пример.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} 1 = 1$$

Но: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x$ - не существует



ПЕРВЫЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Примеры.

1

Вычислить

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{4x}$$

Решение:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{4x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{4x} \cdot \frac{6x}{6x} =$$

$$= \frac{3}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x}{6x} = \frac{3}{2}$$



2


Вычислить

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

Решение:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} 2 \cdot \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

A decorative border consisting of two vertical green bars on the left and right sides of the page. Each bar has a textured, ribbed appearance and is capped with a silver-colored band at the top and bottom.
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

Второй замечательный предел

Пусть $y = \frac{1}{x}$, тогда

$$\lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e$$

Второй замечательный предел

Примеры.

1

Вычислить

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x} \right)^{3x}$$

Решение:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{5}{x}\right)^{3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5}} \right]^{\frac{5}{x} \cdot 3x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5}} \right]^{15} = e^{15}$$

e

2

Вычислить

$$\lim_{y \rightarrow 0} (1 - 3y)^{\frac{2}{y}}$$

Решение:

$$\lim_{y \rightarrow 0} (1 - 3y)^{\frac{2}{y}} = \lim_{y \rightarrow 0} \left[(1 - 3y)^{-\frac{1}{3y}} \right]^{\frac{2}{y} \cdot (-3y)} =$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0} \left[(1 - 3y)^{-\frac{1}{3y}} \right]^{-6} = e^{-6}$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_e$