ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ В БЕСКОНЕЧНОСТИ И В ТОЧКЕ

$$a_n = f(n)$$

Число А называется пределом функции y=f(x), при x стремящемся к бесконечности, если для любого, сколь угодно малого числа ε>0, найдется такое положительное число S, что при всех |x|>S, выполняется неравенство:

$$\left| f(x) - A \right| < \varepsilon$$

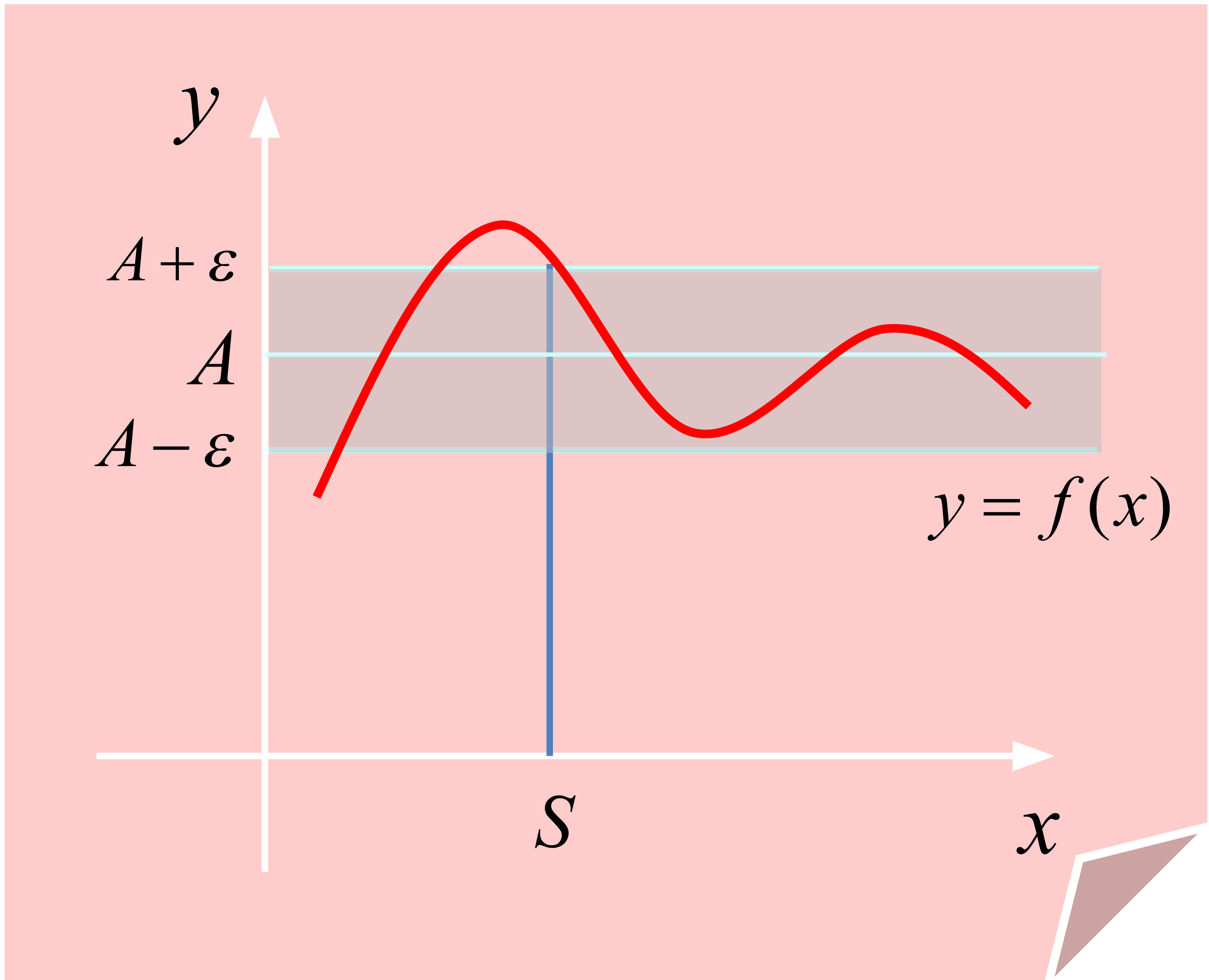
$$\lim_{x \to \infty} f(x) = A$$

смысл определения:

При достаточно больших по модулю значениях x, значения функции f(x) очень мало отличаются от числа A (меньше, чем на число ε, каким бы малым оно не было).

$$\left| f(x) - A \right| < \varepsilon$$

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$$



y
A + ε
A
A − ε
y = f(x)
S
x

$$y = f(x)$$

$$|x| < S$$

$$A - \varepsilon < y < A + \varepsilon$$

Пример.

Доказать, что

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x+1}{x}=5$$

Решение.

$$\left|\left(\frac{5x+1}{x}\right)-5\right|<\varepsilon \Rightarrow$$

$$\left|5+\frac{1}{x}-5\right|<\varepsilon \Rightarrow \left|\frac{1}{x}\right|<\varepsilon \Rightarrow |x|>\frac{1}{\varepsilon}$$

$$S=\frac{1}{\varepsilon}>0$$

$$|f(x)-5|<\varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{5x+1}{x}=5$$

Замечание 1.

Рассмотренное определение предела при х стремящемся к бесконечности предполагает неограниченное возрастание х по абсолютной величине.

Можно сформулировать понятие предела при стремлении х к бесконечности любого знака, т. е. при

$$x \to +\infty$$

$$x \to -\infty$$

$$x \to +\infty$$

$$\left|f(x) - A\right| < \varepsilon$$

$$x \to -\infty$$

$$\left|f(x) - A\right| < \varepsilon$$

Число А называется пределом функции $y=f(x)$, при $x\to x_0$, (или в точке x_0) если для любого, сколь угодно малого числа $\varepsilon>0$, найдется такое положительное число δ, что при всех $|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство:

$$\left|f(x)-A\right|<\varepsilon$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A$$

смысл определения:

При всех значениях x, достаточно близких к x_0, значения функции $y=f(x)$ очень мало отличаются по абсолютной величине от числа A (меньше, чем на число ε, каким бы малым оно не было).

$$\left| f(x) - A \right| < \varepsilon$$

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$$

$$\left| x - x_0 \right| < \delta$$

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$

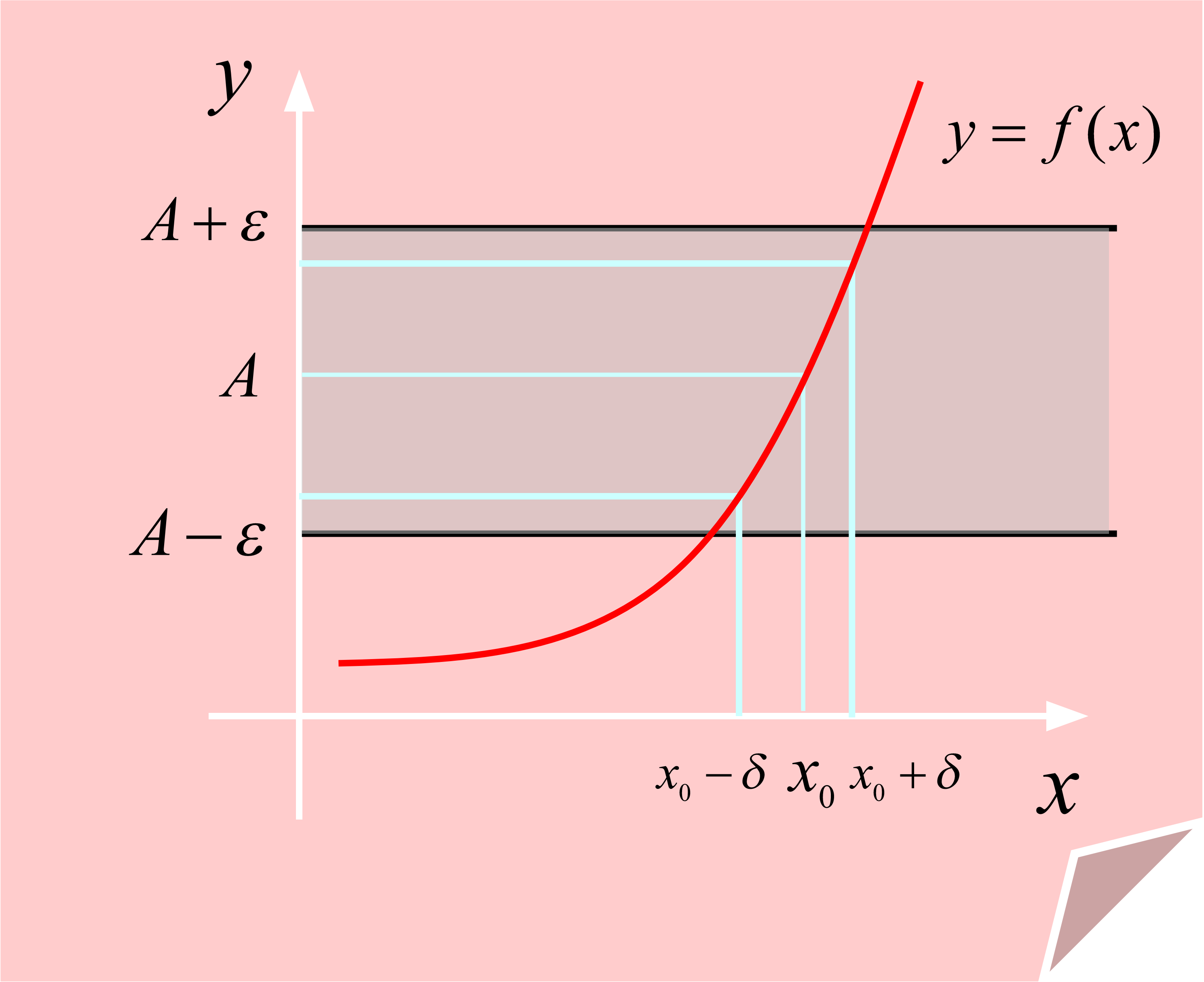
$$y = f(x)$$

$$y = f(x)$$

$$\varepsilon > 0$$

$$y = f(x)$$

$$A - \varepsilon < y < A + \varepsilon$$



y
$y = f(x)$
$A+\varepsilon$
A
$A-\varepsilon$
$x_0-\delta$
x_0
$x_0+\delta$
x

Пример.

Доказать, что

$$\lim_{x \to 1}(2x+3) = 5$$

Решение.

$$|2x+3-5|<0.1$$

$$|x-1|<0.05$$

$$|x-1|<0.005$$

$$|2x+3-5|<\varepsilon$$

$$|x-1|<\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\delta=\frac{\varepsilon}{2}>0$$

$$|f(x)-5|<\varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}(2x+3)=5$$

Замечание 2.

Определение предела не требует существования функции в самой точке x_0, т. к. рассматриваются значения функции в некоторой окрестности точки x_0.

Т.е. рассматривая предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

мы предполагаем, что $x \to x_0$

но не достигает значения x_0.

Замечание 3.

Если при $x \to x_0$

переменная х принимает значения только меньше x_0 ***или, наоборот, больше*** x_0***, и при этом функция f(x) стремится к некоторому числу А, то говорят об односторонних пределах соответственно справа и слева:***

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A \qquad \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$$

$$x \to x_0$$

$$|x - x_0| < \delta$$

$$x_0 - \delta < x < x_0$$

$$x \to x_0 - 0$$

$$x_0 < x < x_0 + \delta$$

$$x \to x_0 + 0$$

$$\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = A$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = A$$

1. Составить уравнение прямой, удаленной от точки A(4; -2) на расстояние $d = 4$ и параллельной прямой $8x - 15y = 0$.

$$8x - 15y = 0 \quad \parallel \quad 8x - 15y + C = 0$$

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}; \quad \boxed{\begin{array}{l} A(4, -2), \quad d = 4 \\ A = 8, \quad B = -15 \end{array}}$$

$$4 = \frac{8 \cdot 4 - 15 \cdot (-2) + C}{\sqrt{8^2 + (-15)^2}}$$

$$4 = \frac{32 + 30 + C}{\sqrt{289}}$$

$$4 = \frac{62 + C}{17}$$

$$62 + C = 68$$

$$\boxed{C = 6}$$

$$4 = \frac{-(8 \cdot 4 - 15 \cdot (-2) + C)}{\sqrt{8^2 + (-15)^2}}$$

$$4 = \frac{-32 - 30 - C}{\sqrt{289}}$$

$$4 = \frac{-62 - C}{17}$$

$$68 = -62 - C$$

$$68 + 62 = -C$$

$$\boxed{C = -130}$$

$$8x - 15y + 6 = 0$$

$$8x - 15y - 130 = 0$$

БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ВЕЛИЧИНЫ

Функция f(x) называется бесконечно малой величиной, если при $x \to x_0$

или при $x \to \infty$ ***ее предел равен нулю:***

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$$

или

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

ПРИМЕР.

Функция $y = \cos x$

является бесконечно малой величиной при

$$x \to \frac{\pi}{2}$$

поскольку $$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \cos x = 0$$

ТЕОРЕМА

Если функция f(x) имеет при

$x \to x_0$ **или при** $x \to \infty$

предел, равный А, то ее можно представить в виде суммы этого числа А и бесконечно малой величины

$\alpha(x)$ **при** $x \to x_0$ **или** $x \to \infty$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \to \infty}} f(x) = A \quad \Rightarrow \quad f(x) = A + \alpha(x)$$

Верна и обратная

ТЕОРЕМА

Если функцию f(x) можно представить как сумму числа А и бесконечно малой величины

$\alpha(x)$ ***при*** $x \to x_0$ ***или*** $x \to \infty$

то число А является пределом этой функции при

$x \to x_0$ ***или при*** $x \to \infty$

$$f(x) = A + \alpha(x) \quad \Rightarrow \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \to \infty}} f(x) = A$$

Свойства бесконечно малых величин

1

Алгебраическая сумма бесконечно малых величин есть величина бесконечно малая.

2

Произведение бесконечно малой величины на ограниченную функцию есть величина бесконечно малая.

3

Частное от деления бесконечно малой величины на функцию, предел которой отличен от нуля, есть величина бесконечно малая.

ПРИМЕР.

Пусть

$$\alpha(x) = 5x - 10 \qquad \beta(x) = \lg(x-1)$$

являются бесконечно малыми величинами при

$$x \to 2$$

поскольку

$$\lim_{x\to 2}(5x-10) = 0 \qquad \lim_{x\to 2}\lg(x-1) = 0$$

Функция

$$f(x) = \sin x$$

является ограниченной на любом промежутке, поскольку

$$|\sin x| \le 1$$

Функция $\varphi(x) = x^2 - 5$

имеет предел при $x \to 2$

$$\lim_{x \to 2}(x^2 - 5) = -1$$

Тогда функции

$$\alpha(x) \pm \beta(x) = 5x - 10 \pm \lg(x - 1)$$

$$\alpha(x)\cdot f(x)=(5x-10)\cdot\sin x$$

$$\beta(x)\cdot f(x)=\lg(x-1)\cdot\sin x$$

$$\alpha(x)\cdot\beta(x)=(5x-10)\cdot\lg(x-1)$$

$$\frac{\alpha(x)}{\varphi(x)}=\frac{5x-10}{x^2-5}$$

являются бесконечно малыми величинами при $x\to 2$

Замечание

Предел отношения двух бесконечно малых величин

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$$

- ***может быть равен нулю, тогда α(x) называется бесконечно малой более высокого порядка, чем β(x);***
- ***может быть равен числу А, не равному нулю, тогда α(x) и β(x) имеют одинаковый порядок малости;***
- ***может быть равен бесконечности, тогда α(x) называется бесконечно малой более низкого порядка, чем β(x).***

БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ВЕЛИЧИНЫ

Функция f(x) называется <u>бесконечно большой величиной</u>, если для любого, даже сколь угодно большого числа $M > 0$ ***найдется такое число*** $\delta > 0$ ***, что для всех*** $x \neq x_0$ ***и удовлетворяющих условию*** $|x - x_0| < \delta$ ***выполняется неравенство***

$$|f(x)| > M$$

Если $f(x) > M$ ***то***

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$$

Если $f(x) < -M$ ***то***

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

ПРИМЕР.

Функция $y = tgx$

является бесконечно большой величиной при

$$x \to \frac{\pi}{2}$$

поскольку $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} tgx = \infty$

Замечание

Бесконечно большая величина является неограниченной функцией при

$x \to x_0$ *или при* $x \to \infty$

но в то же время неограниченная функция не обязательно бесконечно большая.

ПРИМЕР.

Функция $y = x\sin x$

является неограниченной функцией, но при

$$x \to \infty$$

она не будет бесконечно большой, поскольку ее значения колеблются, переходя от положительных к отрицательным через ноль.

Свойства бесконечно больших величин

1

Сумма бесконечно большой величины и ограниченной функции есть величина бесконечно большая.

2

Произведение бесконечно большой величины на функцию, предел которой отличен от нуля, есть величина бесконечно большая.

3

Частное от деления бесконечно большой величины на функцию, имеющую предел, есть величина бесконечно большая.

ПРИМЕР.

Функция $f(x) = tgx$

является бесконечно большой при $x \to \frac{\pi}{2}$

Функция $\varphi(x) = 4x - 3$

имеет предел при $x \to \frac{\pi}{2}$

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} (4x - 3) = 2\pi - 3 \neq 0$$

Функция $\psi(x) = \sin x$

является ограниченной.

Тогда функции

$$f(x) \pm \psi(x) = tgx \pm \sin x$$

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{tgx}{4x-3}$$

являются бесконечно большими величинами при

$$x \to \frac{\pi}{2}$$

ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ

Пусть *f(x)* и *φ(x)* – функции, для которых существуют пределы при

$$x \to x_0 \quad \text{или} \quad x \to \infty$$

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \to \infty}} f(x) = A \qquad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \to \infty}} \varphi(x) = B$$

Тогда справедливы следующие теоремы:

ТЕОРЕМА 1.

Функция не может иметь более одного предела.

ТЕОРЕМА 2.

Предел алгебраической суммы (разности) конечного числа функций равен сумме (разности) пределов этих функций:

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\to\infty}}\left(f(x)\pm\varphi(x)\right)=\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\to\infty}} f(x)\pm\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x\to\infty}}\varphi(x)=A\pm B$$

ТЕОРЕМА 3.

Предел произведения конечного числа функций равен произведению пределов этих функций:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}}\bigl(f(x)\cdot\varphi(x)\bigr)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}} f(x)\cdot\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}}\varphi(x)=A\cdot B$$

Следствие.

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \to \infty}} \left(C \cdot f(x) \right) = C \cdot \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \to \infty}} f(x) = C \cdot A$$

ТЕОРЕМА 4.

Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}} f(x)}{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\to\infty}}\varphi(x)}=\frac{A}{B}$$

ТЕОРЕМА 5.

Если $\lim\limits_{u \to u_0} f(u) = A$ ***и*** $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = u_0$

то предел сложной функции существует и равен

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = A$$

Замечание

В этих теоремах полагается, что существуют пределы функций f(x) и φ(x), из чего следует существование пределов суммы, произведения или частного этих функций.

Однако из существования пределов суммы, произведения или частного еще не следует, что существуют пределы самих функций f(x) и φ(x).

Пример.

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tgx\cdot ctgx\right)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}1=1$$

Но: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} tgx$ **- не существует**

ПЕРВЫЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

Примеры.

1

Вычислить

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{4x}$$

Решение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{4x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{4\cancel{x}}\cdot\frac{6\cancel{x}}{6x}=$$

$$=\frac{3}{2}\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{6x}}_{1}=\frac{3}{2}$$

2

Вычислить

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$$

Решение:

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}2\cdot\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$$

Второй замечательный пре

Пусть $y = \frac{1}{x}$ **, тогда**

$$\lim_{y \to 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e$$

Второй замечательный пре

Примеры.

1

Вычислить

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{3x}$$

Решение:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{3x} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5}}\right]^{\frac{5}{\cancel{x}}\cdot 3\cancel{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\underbrace{\left[\left(1+\frac{5}{x}\right)^{\frac{x}{5}}\right]^{15}}_{e} = e^{15}$$

2

Вычислить

$$\lim_{y\to 0}(1-3y)^{\frac{2}{y}}$$

Решение:

$$\lim_{y\to 0}(1-3y)^{\frac{2}{y}} = \lim_{y\to 0}\left[(1-3y)^{-\frac{1}{3y}}\right]^{\frac{2}{\cancel{y}}\cdot(-3\cancel{y})} =$$

$$= \lim_{y\to 0}{\underbrace{\left[(1-3y)^{-\frac{1}{3y}}\right]}_{e}}^{-6} = e^{-6}$$