# Основы теории погрешности вычислений

Лекция 2

# План

- Абсолютная и относительная погрешности
- Запись и округление чисел
- Способы оценки погрешностей вычислений
  - Метод границ
  - Дифференциальная оценка
- Обратная задача теории погрешностей
- Инструменты приближенных вычислений

# *Абсолютная погрешность*

- Пусть Х  – точное значение некоторой величины (обычно неизвестное),   – число, принятое за ее приближенное значение ($X \approx x$).
- Разность $X – x$ называют погрешностью приближенного значения x, а модуль

$$\varepsilon_x = |X - x|$$

- абсолютной погрешностью величины x.

# *Предельные погрешности*

Предельной ***абсолютной погрешностью***, являющейся верхней границей, называют такое по возможности наименьшее число, для которого справедливо неравенство:

$$\Delta x \geq |X - x|$$

# Пример.

Число $\pi = 3.141592653589\ldots$

может округляться по-разному в зависимости от потребностей задачи:

$\pi \approx 3.14$ $\Delta\pi = 0.0016$ или $\Delta\pi = 0.002$

$\pi \approx 3.1416$ $\Delta\pi = 0.000008$ или $\Delta\pi = 0.00001$

# *Предельные погрешности*

Предельная ***относительная погрешность*** приближенного числа – это отношение предельной абсолютной погрешности к абсолютному значению приближения:

$$\delta x \geq \frac{\Delta x}{|x|}$$

Относительную погрешность обычно выражают в процентах.

# Пример.

Относительная погрешность округления числа $\pi \approx 3.14$ :

$$\delta\pi \geq \frac{0.0016}{3.14}, \delta\pi \geq 0.0005095...$$

В процентах: $\delta\pi \geq 0.05095...\%$

*Округление погрешностей рассмотрим позже*.

# Границы точного результата

Если известны x и $\Delta_x$ , то принято записывать:

$$X \in [\, x - \Delta_x , \quad + \Delta_x \,]$$

или

$$X = x \pm \Delta_x$$

**Опр.** Любая пара чисел $НГ_x$ и $ВГ_x$, такая, что $НГ_x \le x \le ВГ_x$ называется ***нижней и верхней границей*** приближенного числа x.

# Пример.

Ширина шкафа S известна приближенно с погрешностью $\Delta_s$ , ширина двери Н и её погрешность $\Delta_h$ . При каком условии шкаф гарантированно пройдет в дверь?

$$ВГ_{шкафа} < НГ_{двери}$$

$$s + \Delta s < h - \Delta h$$

# Значащие цифры

Определение. Все цифры десятичной записи числа, начиная с первой ненулевой слева, называются ***значащими***.

- ***308,6170 – 7 значащих цифр***
- ***0,00235 – 3 значащих цифры***

***!!! 57 000 – 5 з.ц., $5{,}7 \cdot 10^4$ – 2 з.ц.,***

***$570 \cdot 10^2$ – 3 з.ц.***

# Упражнение

Определите количество значащих цифр в записи чисел:

1. 0,0050

   2

2. - 38,412

   5

3. 4100

   4

4. $20*10^5$

   2

# Округление чисел

**Определение:** ***округлением*** числа называют замену его близким по величине, но с меньшим количеством значащих цифр.

Различают 3 вида округления:

***Симметричное*** округление – к ближайшему числу: 3,6≈4; 3,67≈3,7; 3,4≈3; 3,42≈3,4

***С избытком*** - к большему числу: 3,6≈4; 3,2≈4

***С недостатком*** - к меньшему числу (округление отсечением): 3,67≈3,6; 3,2≈3.

# Округление погрешностей

**Правило:**

В записи погрешности обычно оставляют ***только 1-2 значащие цифры***.

Для сохранения условия, соответствующего определению предельной погрешности, округление её всегда производят ***с избытком.***

Это правило распространяется как на абсолютную, так и на относительную погрешности.

# Пример.

В рассмотренном ранее примере вычисления площади относительная погрешность должна была округляться следующим образом:

$$\delta\pi \geq 0.05095...\%$$

$$\delta\pi = 0.051\% \quad \text{или} \quad \delta\pi = 0.06\%$$

НГ приближенного числа округляют с недостатком, ВГ - с избытком.

Абсолютная погрешность приближенного числа, полученного при округлении с недостатком (избытком) равна единице последнего сохраненного разряда: 1,2776≈1,27; $\Delta$=0,01.

Симметричное округление дает меньшую ошибку - половину единицы последнего разряда: 1,2776≈1,28; $\Delta$=0,005.

# Верные цифры

**Определение.** Цифра в записи числа а, называется ***верной***, если погрешность не превосходит единицы её разряда; цифра ***верная в строгом смысле*** - если погрешность не превосходит половины её разряда.

# Пример

Определить верные цифры: $a = 18.572, \Delta_a = 0.08$

Решение:

$$\left.\begin{array}{l} 1:\ 10 \geq 0.08 \text{ - верная} \\ 8:\ 1 \geq 0.08 \text{ - верная} \\ 5:\ 0.1 \geq 0.08 \text{ - верная} \end{array}\right\} \text{в широком смысле}$$

7: 0.01 ≤ 0.08 - сомнительная

2: 0.001 ≤ 0.08 - сомнительная

# Пример

Для приближённого числа $x=72,256$ известна абсолютная погрешность

$\Delta_x = 0,01$.

Требуется определить его верные значащие цифры в а) широком и б) строгом смыслах.

$x=72{,}256 \qquad \Delta_x = 0{,}01.$

а) Решение:

2: $0.1 \ge 0.01$ - верная

5: $0.01 = 0.01$ – верная

6: $0.001 \le 0.01$ - сомн.

Ответ: верные в широком смысле цифры 7;2;2;5

а 6 - сомнительная

б) Решение:

2: $0.05 \ge 0.01$ - верная

5: $0.005 \le 0.01$ – сомн.

Ответ: верные в строгом смысле цифры 7;2;2

а 5 и 6 - сомнительные

Верная цифра не обязательно буквально совпадает с соответствующей цифрой точного числа.

$X = 1{,}999$ – точное число, $x = 2{,}000$ – его приближение. Тогда $\Delta_x = 0{,}001$, и, следовательно, три первые цифры верные, хотя ни одна из них не совпадает с соответствующими цифрами точного числа.

Если исходные данные приводятся без указания погрешностей, но с известными верными цифрами, то погрешность можно определить, исходя из определения верной цифры.

Пример. $X=4,06$ $\Delta_x=0,01$ (в широком см.)

$X=4,06$ $\Delta_x=0,005$ (строгом см.)

Если не уточняется трактовка смысла (широкая, строгая), то по умолчанию принимается ***строгий*** вариант.

# Запись приближенных чисел

Точность приближенного числа зависит не от количества значащих цифр, а от количества верных значащих цифр.

Если полученный в результате вычислений результат содержит излишнее количество сомнительных значащих цифр, то его округляют.

# Запись приближённых чисел

**Правило:** в промежуточных результатах вычислений обычно сохраняют 1-2 сомнительные цифры, а окончательные результаты округляют с сохранением **не более одной сомнительной цифры**.

?

# Упражнение

Приближённое значение $x=24{,}6035$ имеет относительную погрешность $\delta=0{,}1\%$. Найти $\Delta_x$ и округлить число $x$ с точностью до верных цифр.

# Решение

$$\delta_x = \frac{\Delta_x}{|x|} \cdot 100\%$$

$$\Delta_x = \frac{\delta_x}{100\%} \cdot |x|$$

$$\Delta_x = \frac{0,1}{100\%} \cdot 24,6035 = 0,0246035 \approx 0,03$$

$6: \; 0,05 \geq 0,03$

$0: \; 0,005 \leq \; 0,03$

2,4,6 - верные цифры, округляем $x \approx 24,6.$

# Оценка погрешности вычисления функции

Определим, как вычислить погрешность функции, некоторые аргументы которой заданы приближенно.

Задачу нахождения погрешности функции по заданным погрешностям приближенных аргументов называют ***основной задачей*** теории погрешностей.

# Оценка погрешности по способу границ

Пусть $y=f(x)$ - функция, для которой необходимо найти погрешность, ***a*** - приближенное исходное данное и известны НГ$_a$ и ВГ$_a$.

Необходимо определить $y=f(x)$, НГ$_y$ и ВГ$_y$.

Для нахождения границ результата вычисляют $y_1=f($НГ$_x)$ и $y_2=f($ВГ$_x)$, а затем меньшее из этих значений принимают за НГ$_y$, а большее за ВГ$_y$ и округляют нижнее с недостатком, а верхнее с избытком.

# Пример:

$$y = \frac{e^x}{1+x^2}$$

$$1,25 < x < 1,28,$$

Решение.

$$y(НГ_x) = \frac{e^{1,25}}{1+1,25^2} = 1,3620849...$$

$НГ_y$ =1.362

$$y(ВГ_x) = \frac{e^{1,28}}{1+1,28^2} = 1,3631896...$$

$ВГ_y$ =1.364

$$\Delta_y = \frac{ВГ_y - НГ_y}{2} = \frac{1,364 - 1,362}{2} = 0,001$$

$$y \approx \frac{ВГ_y + НГ_y}{2} \approx 1,363$$

$$y = 1,363 \pm 0,001$$

# Рассмотрим случай двух переменных

$$НГ_a \le a \le ВГ_a$$
$$НГ_b \le b \le ВГ_b$$

$$z = f(a,b) - ?$$

$$\left.\begin{array}{l} z = f(НГ_a, НГ_b) \\ z = f(НГ_a, ВГ_b) \\ z = f(ВГ_a, ВГ_b) \\ z = f(ВГ_a, НГ_b) \end{array}\right\} \min \longrightarrow НГ_z, \max \longrightarrow ВГ_z$$

# Замечание

Прежде чем производить расчет для всех возможных вариантов (для n – переменных это $2^n$), необходимо попытаться оценить характер зависимости от некоторых переменных.

Пример. Как оценить, какие границы аргументов использовать для $НГ_F$ и $ВГ_F$?

$$f(a,b,c)=\frac{a^2+\sqrt{b}}{c+\dfrac{e^a}{b}}$$

# Дифференциальная оценка погрешности

*Теорема.* Пусть ***x, y*** являются приближениями к точным значениям аргументов ***X, Y*** с абсолютными погрешностями $\boldsymbol{\Delta_x}$ и $\boldsymbol{\Delta_y}$. Если функция ***z=f(x,y)*** дифференцируема, $M_x$ и $M_y$ – максимумы частных производных

$$\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right| \text{ и } \left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|$$

$$\text{в прямоугольнике } \begin{cases} x-\Delta x \le x \le x+\Delta x \\ y-\Delta y \le y \le y+\Delta y \end{cases}$$

то абсолютная *дифференциальная погрешность функции*

$$\Delta_z \le M_1 \cdot \Delta_x + M_2 \cdot \Delta_y$$

# Дифференциальная оценка погрешности

***Замечание.*** При малых значениях $\boldsymbol{\Delta_x}$ и $\boldsymbol{\Delta_y}$ можно вместо максимумов частных производных в прямоугольнике брать значения производных с приближенными значениями аргументов:

$$\Delta_z = \left| f'_x(x, y) \right| \cdot \Delta_x + \left| f'_y(x, y) \right| \cdot \Delta_y .$$

# Пример

Пусть $x=-0,68 \pm 0,004$, $y=1,134 \pm 0,0003$. Требуется найти значение $z$ для $f(x,y)= x^2+\sin y$ и оценить погрешность дифференциальным способом.

$f(x,y) = x^2 + \sin y$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 \cdot x,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cos(y).$$

$$\Delta_z = \left|2 \cdot (-0,68)\right| \cdot 0,004 + \left|\cos(1,134)\right| \cdot 0,003 = 0,00556691163...$$

$$\approx 0,006$$

$$z = (-0,68)^2 + \sin(1,134) = 1,368511588...$$

$$\approx 1,37$$

$$z = 1,37 \pm 0,006.$$

$$\delta = \frac{0,006}{1,37} = 0,004379562...$$

$$\approx 0,0044 = 0,44\%$$

# Пример

Пусть в выражении $d = 2{,}63 - 1{,}026 \cdot \sqrt{5{,}40}$

все числа приближённые и записаны верными цифрами. Требуется найти значение ***d*** и определить абсолютную и относительную погрешности.

# Решение

Для функции трех переменных:

$$d = 2,63 - 1,026 \cdot \sqrt{5,40}$$

$$f(x, y, z) = x - y \cdot \sqrt{z}$$

$$f(x,y,z) = x - y \cdot \sqrt{z}$$

$$f'_x = 1$$

$$f'_y = -\sqrt{z}$$

$$f'_z = -\frac{y}{2 \cdot \sqrt{z}}$$

$$\Delta_d = |1| \cdot 0,01 + \left| -\sqrt{5,40} \right| \cdot 0,001 + \left| -\frac{1,026}{2 \cdot \sqrt{5,40}} \right| \cdot 0,01 =$$

$$= 0,01 + 0,002323790007\ldots + 0,0022076\ldots \approx 0,0145\ldots$$

$$\Delta_d = 0,015, \; d = 2,63 - 1,026 \cdot \sqrt{5,40} = 0,24579146 \approx 0,25.$$

$$\delta_d = \frac{0,015}{0,25} = 0,06 = 6\%.$$

# Обратная задача теории погрешностей

Обратная задача теории погрешностей состоит в том, что по заданной абсолютной погрешности функции необходимо определить, каковы должны быть абсолютные погрешности ее аргументов.

# Обратная задача теории погрешностей

Одна и та же суммарная оценка погрешности функции нескольких аргументов, вычисляемая, например, дифференциальным способом, может быть получена при различных распределениях погрешностей аргументов.

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta x_i .$$

# Обратная задача теории погрешностей

Для решения обратной задачи обычно пользуются принципом «равных влияний»:

$$\frac{\Delta f}{n} = \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right| \cdot \Delta x_i,$$ т.е. все слагаемые оценки равны.

Тогда

$$\Delta x_i = \frac{\Delta f}{n} \Big/ \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|.$$

# Инструменты приближенных вычислений

Электронные таблицы

Математические пакеты

Среды программирования

# Точность представления чисел в компьютере

Для вещественных чисел используется нормализованное представление в форме с плавающей запят

порядок

$$x = \pm M \cdot 10^{P}$$

мантисса

Точность представления чисел зависит от длины разрядной сетки. Данные с одинарной точностью имеют не более 7 верных десятичных знаков, с двойной точностью – 16.

# Вычисление функций

```python
import math

def f(x, y):
    return x**2 + math.sin(y)

print(f(-0.68, math.pi/3))
```

```python
from math import sin, pi

def f(x, y):
    return x**2 + sin(y)

print(f(-0.68, pi/3))
```

```
>>> %Run L1_ex_2.py
 1.3284254037844387
```

$$f := (x, y) \rightarrow x^2 + \sin(y)$$

$$(x, y) \rightarrow x^2 + \sin(y)$$

$$f\left(-0.68, \frac{\mathrm{Pi}}{3}\right)$$

$$0.4624 + \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$evalf(\%)$$

$$1.328425404$$

# Вычисление производных

```python
"""
Производная функции в символьном представлении

"""

import sympy as sym

x = sym.Symbol('x')

f = sym.exp(x) / (1 + x**2)
df = f.diff(x)

sym.pprint(f)
sym.pprint(df)

```

Результат:

```
  x
 e
──────
 2
x  + 1
           x          x
    2·x·e            e
- ────────── + ──────
           2        2
   ⎛ 2    ⎞        x  + 1
   ⎝x  + 1⎠
```

# Вычисление производных

```
"""
Вычисление функции и производной

"""

import sympy as sym

x = sym.Symbol('x')

f = sym.exp(x) / (1 + x**2)
df = f.diff(x)

print('Функция: ', f.subs(x, 2.4), 'Производная: ', df.subs(x, 2.4))

```

Результат:

```
Функция:  1.63064739358604 Производная:  0.472791256128495
```

# Функции округления

- round(number [, ndigits]) - округляет число number до ndigits знаков после запятой (по умолчанию, до нуля знаков, то есть, до ближайшего целого)
- math.ceil(number) – округление до ближайшего большего числа
- math.floor(number) - округление вниз
- math.trunc(number) - усекает значение X до целого

- **round(x) -** округляет x до ближайшего целого
- **ceil(x)**
- **floor(x)**
- **trunc(x) -** возвращает:
  floor(x) для x >= 0
  floor(-x) для x < 0

# Примеры

```
>>> round(-11.416051)
-11
>>> round(2.75645)
3
>>> round(3.1415, 2)
3.14
```

```
>>> 0.2 + 0.3 == 0.5
True
>>> 0.2 + 0.1 == 0.3
False
```

```
>>> 0.2 + 0.1
0.30000000000000004
```

```
>>> round(3.5)
4
>>> round(8.5)
8
```

округление происходит до ближайшего чётного (банковское округление)

# Особенности машинной арифметики

В машинных вычислениях:

- числа представлены с ограниченным числом разрядов
- выполняется огромное число арифметических операций, что приводит к накоплению ошибок
- промежуточные результаты обычно не отражаются.

# Источники вычислительной погрешности

1. Представление чисел в 2-й системе (конечное 10-ое число может стать бесконечным.)
2. Результаты отдельных арифметических операций не подвергаются правильному округлению (для сокращения задержек из-за переноса единицы в старшие разряды).
3. Ограниченный диапазон чисел, представимых в разрядной сетке компьютера (проблема машинного нуля и переполнения).

# Рекомендации

Для исключения неблагоприятного влияния на порядок организации вычислений прибегают к следующим приемам, уменьшающим вычислительную погрешность:

- суммирование нужно начинать **с малых по модулю слагаемых**: в противном случае они могут оказаться несоизмеримыми с накопленной суммой и не окажут на нее должного влияния
- следует избегать **вычитания близких чисел**, при котором происходит катастрофическая потеря верных цифр.
- последовательное умножение упорядоченных чисел может также привести к потере точности, поэтому целесообразно нарушать **порядок** умножения таких сомножителей
- нельзя **сравнивать на равенство** числа в нормализованном формате