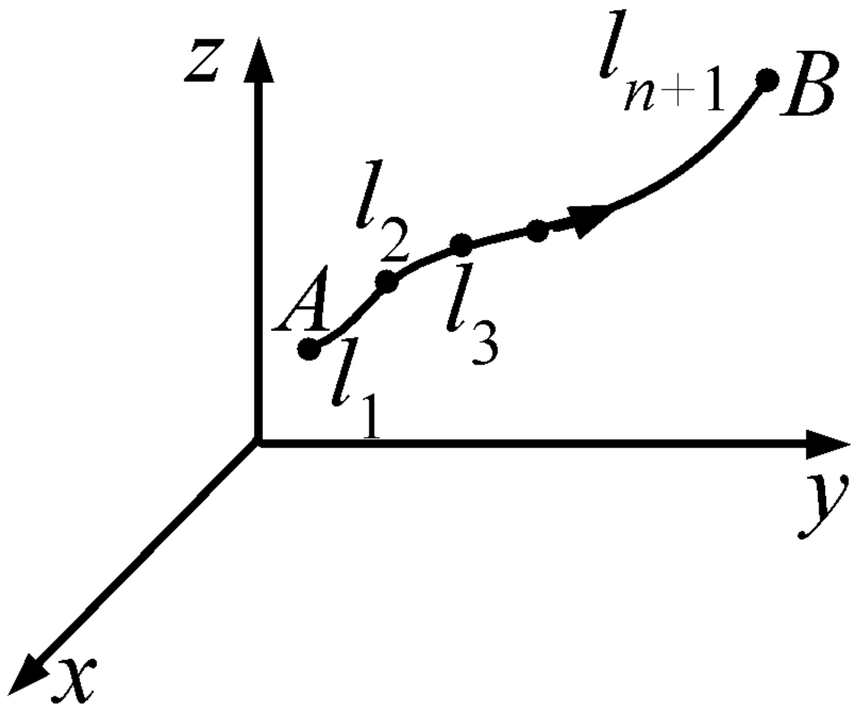
Лекция 28. Криволинейные интегралы 1 и 2 рода, их основные свойства и их вычисление. Связь между криволинейными интегралами 1 и 2 рода, формула Грина.

Криволинейные интегралы первого рода.

§ 1. Задача, приводящая к понятию криволинейного интеграла первого рода.

Пусть дана в трехмерном пространстве линия AB.



Дуга AB такая, что:

1. Гладкая (т.е. в любой точке существует касательная);
2. Спрямляемая (т.е. имеющую длину).

Пусть в любой точке дуги задана линейная плотность материала, из которой может быть изготовлена дуга AB. Найти массу дуги AB.

Разобьем дугу AB точками: $l_1, l_2, \dots l_{n+1.}$ Между 2-мя соседними точками лежат элементарные участки дуги AB.

$\Delta l_i = l_{i+1} - l_i$, $i=1,2,\dots n+1$. Выберем на каждом участке точки $P_1, P_2, \dots P_n$, $P_i = P_i(x,y,z)$.

Найдем значение линейной плотности материала в каждой из этих точек.

Умножим длину элементарного участка дуги на элементарную плотность.

$\mu(P_1)\Delta l_1$, $\mu(P_2)\Delta l_2 \dots$ Это масса каждого элементарного участка, при условии, что плотность на участке считается постоянной.

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(P_i)\Delta l_i \approx m$$

Если просуммировать, то получим приближенное значение массы. Значение массы зависит от разбиения и от выбора точкиP_i

Но масса это физическая величина и не зависит от способа разбиения и выбора точек P_i. Надо ввести характеристику не зависящую от этих величин. Назовем сумму

$$\sum_{i=1}^{n} \mu(P_i)\Delta l_i$$ - интегральной суммой.

Определение (предела интегральной суммы): Число I называется пределом интегральной суммы $\sum_{i=1}^{n} \mu(P_i)\Delta l_i$

если для всех $\varepsilon > 0$ существует δ_ε (не зависящая от способа разбиения и выбора точек P_i, такая, что из неравенства

$$\max_{i=1,2,\dots n} \Delta l_i < \delta_\varepsilon \Rightarrow \left| I - \sum_{i=1}^{n} \mu(P_i)\Delta l_i \right| < \varepsilon$$

Определение (Криволинейного интеграла 1-го рода). Если существует предел интегральной суммы I, то он называется криволинейным интегралом 1-го рода. При этом пишут:

$$\int_{AB} \mu(x,y,z)dl \overset{def}{=} I = \lim_{\substack{\max \Delta l_i \to 0 \\ i=1,2,\dots n}} \sum_{i=1}^{n} \mu(P_i)\Delta l_i$$

Физическое значение интеграла 1 рода - масса дуги AB.

Теорема существования и свойства криволинейного интеграла 1 рода.

Теорема (достаточные условия существования): Если функция $\mu(x,y,z)$ непрерывна в каждой точке дуги AB, то криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} \mu(x,y,z)dl$ существует.

Теорема (необходимые условия существования): Если существует криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} \mu(x,y,z)dl$, то

$\mu(x,y,z)$ ограничена на дуге AB.

Свойства криволинейных интегралов 1-го рода

Считаем, что все интегралы существуют.

1. Криволинейный интеграл не зависит от направления обхода дуги AB.

$$\int_{AB} \mu(x, y, z)dl = \int_{BA} \mu(x, y, z)dl$$

2. Обладает свойством однородности:

$$\int_{AB} c\mu(x, y, z)dl = c\int_{AB} \mu(x, y, z)dl, \qquad c = \text{const}.$$

3. Свойство аддитивности относительно подынтегральной функции:

$$\int_{AB} [\mu_1 + \mu_2]dl = \int_{AB} \mu_1 dl + \int_{AB} \mu_2 dl$$

4. Свойство аддитивности относительно участка интегрирования:

$$\exists \int\limits_{AB} f(x,y,z)dl, \ \exists \int\limits_{BC} f(x,y,z)dl, \quad \text{то}$$

$$\int\limits_{AC} f(x,y,z)dl = \int\limits_{AB} f(x,y,z)dl + \int\limits_{BC} f(x,y,z)dl,$$

5. Если $f(x,y,z) \equiv 1$ на дуге AB, то

$\int\limits_{AB} 1dl = L_{AB}$ – длина дуги.

6. Если $f(x,y,z) > 0$ на дуге AB и непрерывны, то $\int\limits_{AB} f(x,y,z)dl > 0$

При этом все интегралы $\exists$.

7. Если даны функции $f(x,y,z)$ и $\phi(x,y,z)$ на дуге AB удовлетворяет неравенству $f > \phi$, то интеграл на AB:

$$\int_{AB} f(x, y, z)dl > \int_{BC} \varphi(x, y, z)dl$$

8. Теорема о среднем для криволинейных интегралов 1-го рода.

Если $f(x,y,z)$ непрерывна на замкнутой (с присоединенными концами), ограниченной дуге AB, то существует такая точка $\overline{P} \in AB$, что

$$\int_{AB} f(x, y, z)dl = f(\overline{P})\cdot L_{AB}$$

§ 2. Вычисление криволинейного интеграла первого рода.

<u>Теорема</u> (о вычисление криволинейного интеграла первого рода). Если $f\ (x,y,z)$ непрерывна на дуге AB, которая может быть задана параметрически формулами

$$AB:\ \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$, где:

1. $t \in [\alpha; \beta]$
2. $x(t), y(t), z(t)$ монотонны и непрерывно дифференцируемы на $[\alpha; \beta]$.
3. $(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2 \neq 0$ на $[\alpha; \beta]$, тогда:

$$\int_{AB} f(x,y,z)dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x_t')^2+(y_t')^2+(z_t')^2}\,dt$$

Доказательство.

Самостоятельно.

§ 3. Применение криволинейных интегралов первого рода.

1. Масса дуги $m = \int_{AB} \mu(x,y,z)dl$

где: $\mu(x,y,z)$ – линейная плотность материала.

2. Для вычисления длины дуги

$$L = \int_{AB} dl$$

3. Для вычисления координат центра тяжести

$$X_C = \frac{\int\limits_{AB} \mu(x, y, z) x dl}{m}$$

$$Y_C = \frac{\int\limits_{AB} \mu(x, y, z) y dl}{m}$$

$$Z_C = \frac{\int\limits_{AB} \mu(x, y, z) z dl}{m}$$

m – масса всей дуги

4. Для вычисления момента инерции относительно оси

$$J_x = \int_{AB} \mu(x, y, z)\left(y^2 + z^2\right)dl$$

$$J_y = \int_{AB} \mu(x, y, z)\left(x^2 + z^2\right)dl$$

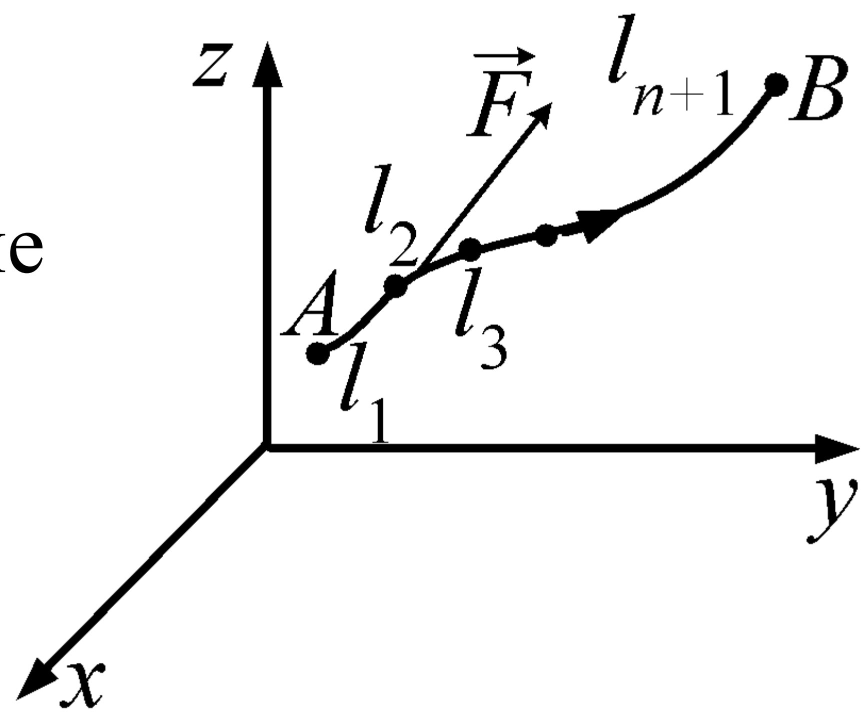
$$J_z = \int_{AB} \mu(x, y, z)\left(x^2 + y^2\right)dl$$

Криволинейные интегралы второго рода.

§ 4. Задача, приводящая к понятию криволинейного интеграла второго рода.

Пусть в трехмерном пространстве задана криволинейная, ограниченная, ориентируемая дуга AB.

Задано направление обхода



Пусть по дуге AB от A к B движется материальная точка под действием силы $\vec{F}$.

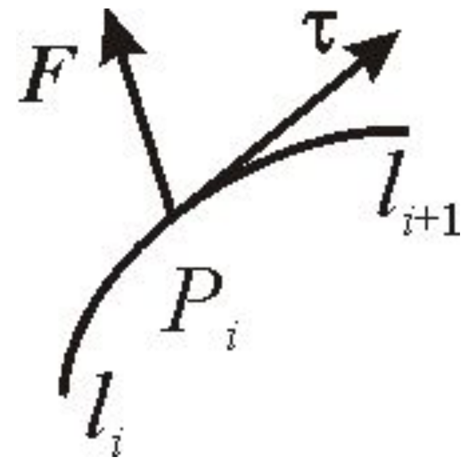
Найти работу силы $\vec{F}$ при движении материальной точки по дуге AB.

Разобьем дугу AB точками: $l_1, l_2, \dots l_{n+1}$. На каждом из отрезков выберем точки $P_1, P_2, \dots P_n$.

Рассмотрим элементарную дугу, заключенную между точками l_i и l_{i+1}.

Пусть в точке P_i есть векторы касательной $\vec{\tau}$ и силы $\vec{F}$.

Если считать, что в каждой точке дуги материальная точка движется не по кривой, а по прямой, то элементарная работа силы $\vec{F}$ равна:



$$\left(\vec{F}(P_i)\cdot \underbrace{\Delta l_i \vec{\tau}}_{\text{перемещение}}\right) = F_x(P_i)\Delta x_i + F_y(P_i)\Delta y_i + F_z(P_i)\Delta z_i$$

Зная элементарную работу на каждом участке Δl_i для всей работы силы $\vec{F}$ на дуге AB, можем записать приближенное выражение

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F}(P_i)\cdot \Delta \vec{l}_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} F_x(P_i)\Delta x_i + F_y(P_i)\Delta y_i + F_z(P_i)\Delta z_i$$

$\Delta \vec{l}_i$ - вектор, который направлен по касательной.

Сумма, стоящая в правой части выражения называется интегральной суммой. При этом, если $\max\limits_{i=1,2,\dots,n} \Delta l_i \to 0$

так как

$$\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2 + (\Delta z_i)^2}$$

то: $\Delta x_i \to 0, \Delta y_i \to 0, \Delta z_i \to 0.$

Поэтому, чтобы работа не зависела от способа разбиения дуги точками Δl_i и выбора точек P_i. Введем понятие криволинейного интеграла 2-го рода как предела интегральной суммы при $\max\limits_{i=1,2,\ldots,n} \Delta l_i \to 0$.

<u>Определение</u> (предела интегральной суммы) Число I называется пределом интегральной суммы, если для $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \ \delta > 0$, не зависящее от способа разбиения и выбора точек P_i, такое что из неравенства $\max\limits_{i=1,2,\ldots,n} \Delta l_i < \delta$ следует неравенство:

$$|I - \sum_{i=1}^{n} F_x(P_i)\Delta x_i + F_y(P_i)\Delta y_i + F_z(P_i)\Delta z_i\,| < \varepsilon$$

При этом число I называется криволинейным интегралом 2-го рода и обозначают:

$$I = \int_{AB} F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

или

$$I = \int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

При этом из задачи, приводящей к криволинейному интегралу 2-го рода видно, что для этих интегралов существенно то, что дуга AB ориентирована.

Свойства криволинейных интегралов 2-го рода

Свойства 2-7 такие же как и для криволинейных интегралов 1-го рода.

Помимо этих свойств они обладают следующими свойствами.

Считаем, что все интегралы существуют.

1. Криволинейный интеграл 2-го рода меняет знак при изменении обхода дуги AB.

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = -\int\limits_{BA} Pdx + Qdy + Rdz$$

2. Если участок интегрирования AB параллелен оси OX, то интеграл по этому участку $AB = 0$

$$\int_{AB} Q dy = 0$$

$$AB \parallel OY \qquad \int_{AB} P dx = 0$$

§ 5. Вычисление криволинейного интеграла второго рода.

Криволинейный интеграл 2-го рода можно вычислять если дугу AB задать параметрически. Причем будем предполагать выполнимыми все условия, которым удовлетворяло параметрическое задание дуги. Пусть даны

$$\int\limits_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz$$

и дуга

$$AB:\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \text{ где:}$$

1. $t \in [\alpha; \beta]$
2. $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ монотонны и непрерывно дифференцируемы на $[\alpha; \beta]$.
3. $(x_t')^2 + (y_t')^2 + (z_t')^2 \neq 0$ на $[\alpha; \beta]$.

Тогда криволинейный интеграл 2-го рода можно вычислять по формуле:

$$\int\limits_{AB} P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} P(x(t), y(t), z(t)) x_t' dt + Q(x(t), y(t), z(t)) y_t' dt +$$

$$+ R(x(t), y(t), z(t)) z_t' dt =$$

Вынося dt за общую скобку, получаем формулу для вычисления криволинейного интеграла второго рода:

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \left[P(x(t), y(t), z(t)) x_t' + Q(x(t), y(t), z(t)) y_t' + \right.$$

$$\left. + R(x(t), y(t), z(t)) z_t' \right] dt$$

Доказательство.

Самостоятельно.

Таким образом, чтобы вычислить криволинейный интеграл 2-го рода необходимо:

1. Задать дугу AB параметрически с учетом направления обхода так, чтобы установить однозначное соответствие между дугой AB и параметром t.
2. Подставить вместо x, y, z соответствующие выражения в формулу и подсчитать определенный интеграл от одной переменной t.

§ 6. Связь криволинейных интегралов второго рода с криволинейными интегралами первого рода.

Пусть в пространстве есть единичный вектор $\vec{\tau}$ (рис. 1), который с осями координат составляет углы α, β, γ. Это плоские углы. Тогда координатами этого единичного вектора будут числа

$$\vec{\tau} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$$

Пусть в трехмерном пространстве (рис. 2) есть гладкая ориентированная дуга *AB* (то есть в каждой точке дуги существует вектор

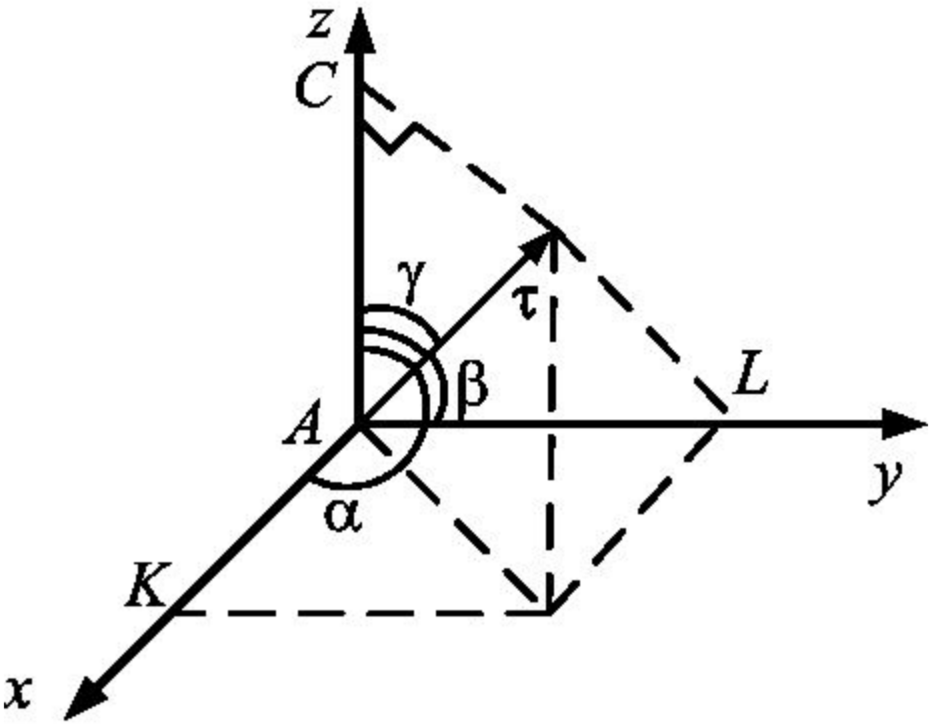


Рис. 1

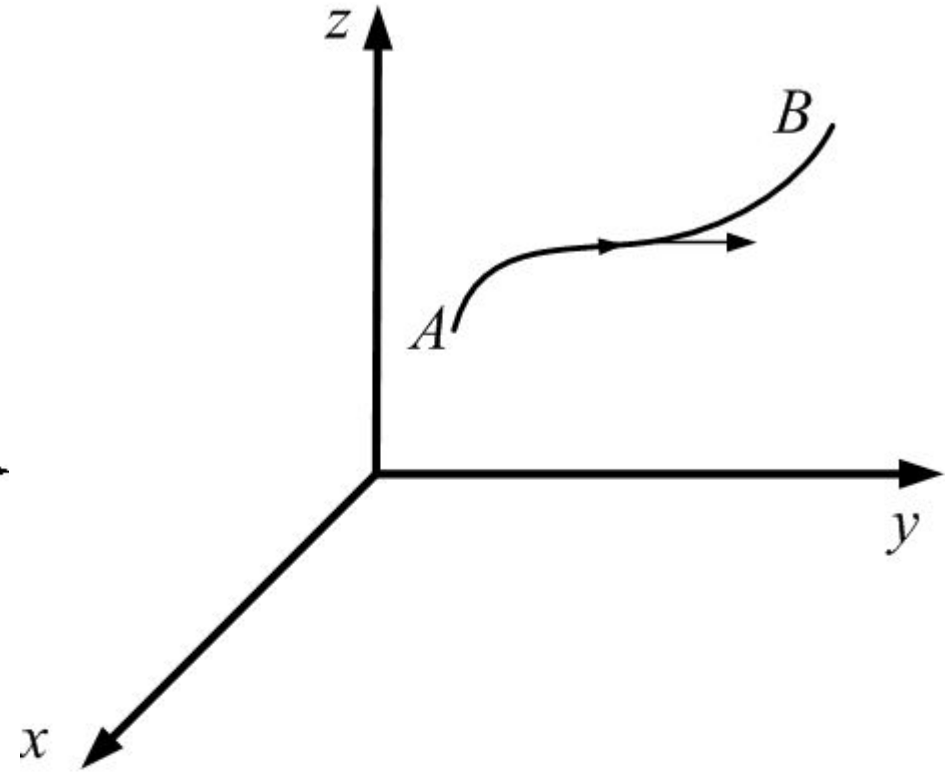


Рис. 2

касательной, направленный в сторону обхода дуги). $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$

$dx = dl \cdot \cos\alpha$

$dy = dl \cdot \cos\beta$

$dz = dl \cdot \cos\gamma$

Три этих выражения дают значение проекции длины дуги на оси координат с учетом ориентации дуги. Ориентация дуги учитывается косинусами $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$.

Подставляя полученные выражения в интеграл 2-го рода, имеем:

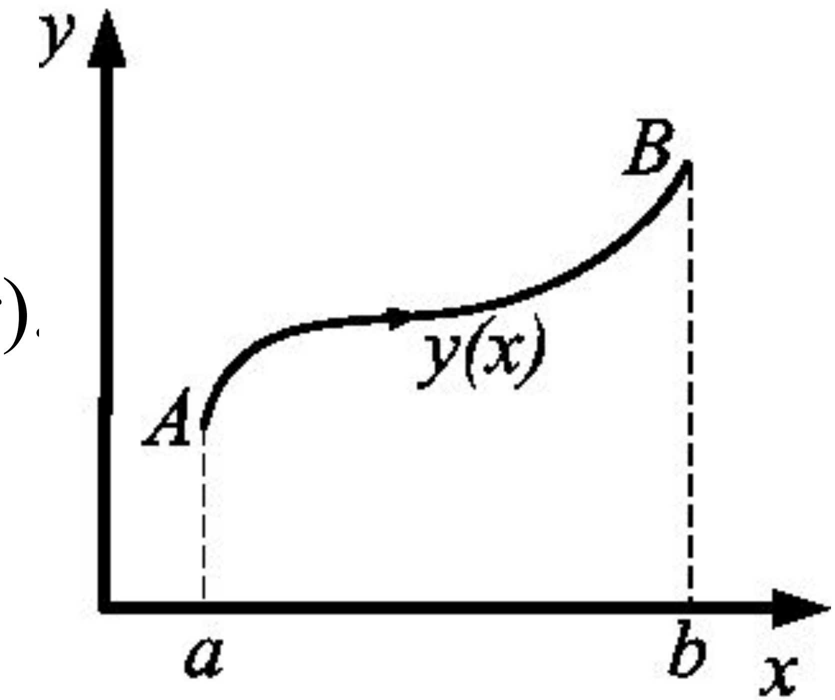
$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz =$$

$$= \int_{AB} \left(P(x, y, z)\cos\alpha + Q(x, y, z)\cos\beta + R(x, y, z)\cos\gamma\right)dl$$

дает связь между криволинейными интегралами 1-го и 2-го рода.

Хотя криволинейные интегралы первого рода не зависит от направления обхода дуги AB, так в формулу входят cosα, cosβ, cosγ, учитывающих ориентацию дуги AB, то пользуясь этой формулой и вычисляют криволинейный интеграл 2-го рода через криволинейный интеграл 1-го рода ошибки не допустим.

Если на плоскости есть дуга AB, которая задается графиком функции $y=f(x)$.



AB: $\begin{cases} x = t \\ y = y(t) \end{cases}$

t изменяется от a до b.

$$\int\limits_{AB} Pdx + Qdy = \int\limits_a^b P(t, y(t))dt + Q(t, y(t))y_t'dt$$

Так вычисляется интеграл, если дуга задана параметрически.

Если дуга задана в виде:

$$AB: \begin{cases} x = x \\ y = y(x) \end{cases} \quad x \text{ изменяется от } a \text{ до } b.$$

Тогда

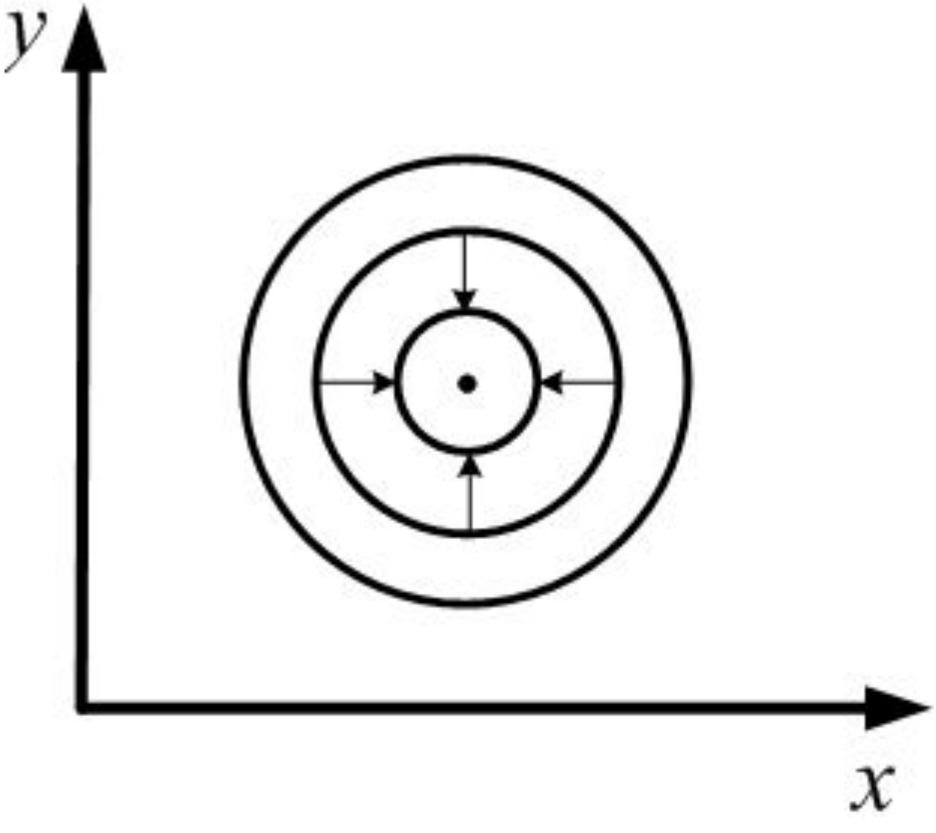
$$\int_{AB} Pdx + Qdy = \int_a^b P(t, y(x))dx + Q(x, y(x))y'_x dx$$

Для криволинейных интегралов 2-го рода нижний предел интегрирования может быть больше верхнего.

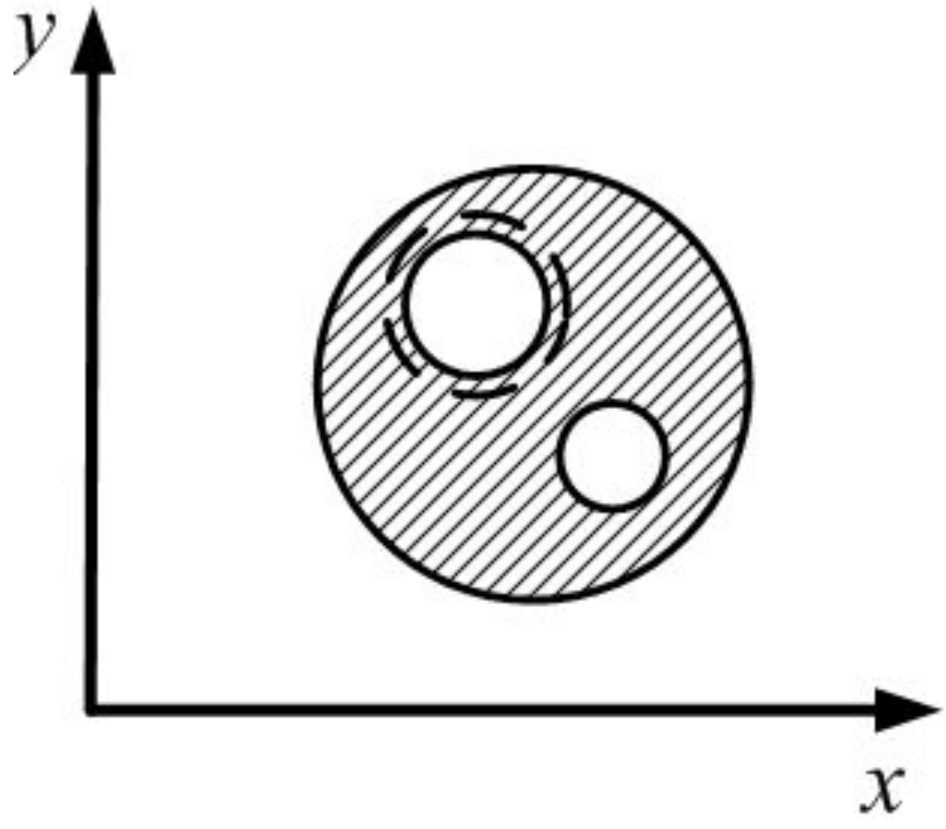
§ 7. Формула Грина.

Формула связывает криволинейные интегралы по замкнутому контуру с интегралом по области, границей которой является этот контур.

Определение (односвязной области). Область D на плоскости называется односвязной, если любую замкнутую линию, принадлежащей этой области, можно непрерывной деформацией стянуть в точку.



Односвязная область



Двусвязная область

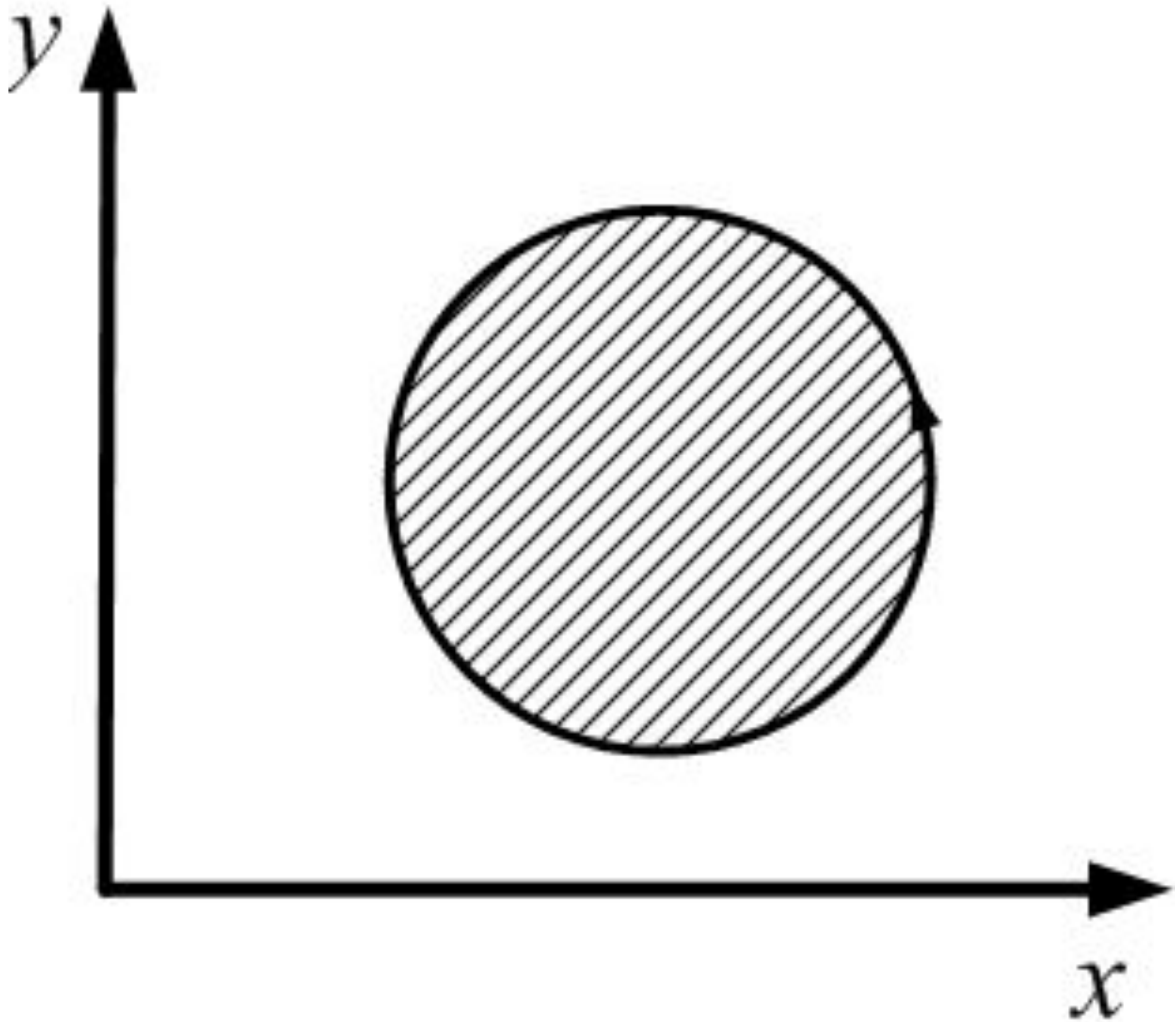
Определение **(ориентированной области).** Область D на плоскости называется ориентированной односвязной, если:

1. Она односвязная.

2. Обход границы области происходит так, что область все время остается слева.

Из определения видно, что обход границы осуществляется против часовой стрелки. Такое направление обхода назовем положительным.

Для односвязных ориентированных областей справедлива формула Грина.



Ориентированная область

Формула Грина. Если любую область с помощью прямых, параллельных осям X и Y можно разбить на прямоугольные и треугольные области, причем направление обхода таких областей выбирается против часовой стрелки. Криволинейные интегралы по границам соседних областей, обходимых в противоположном направлении = 0. Поэтому, складывая формулы Грина для каждой из областей разбиения, поле суммирования получим интеграл по границе области D.

$$\oint_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

$\oint\limits_{\partial D} Pdx + Qdy$ - это криволинейный интеграл 2-го рода, который берется по границе области D при положительном направлении обхода. Он является интегралом по замкнутому контуру.

Из формулы Грина следует условие независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования.

<u>Теорема </u>(условие независимости). Для того, чтобы криволинейный интеграл 2-го рода $\int\limits_{AB} Pdx + Qdy$ не зависел от пути интегрирования, а зависел от положения начальной и конечной точек дуги интегрирования необходимо и достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из условий:

1. $\oint\limits_{\partial D} Pdx + Qdy = 0$

2. $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$

3. $Pdx + Qdy$ – было полным дифференциалом некоторой функции $F(x,y)$.

Все три условия между собой связаны. При выполнении одного из них, все остальные выполняются.