МОЩНОСТЬ МНОЖЕСТВА

ВЗАИМНО-ОДНОЗНАЧНОЕ СООТВЕТСТВИЕ

Пусть заданы множества A и B и отображение $f: A \to B$. Если $f(A)=B$, то f – *отображение A на B* или *сюръективное* отображение. Если из $x_1 \neq x_2$ следует $f(x_1) \neq f(x_2)$, то f называется *инъективным* отображением. Отображение $f: A \to B$ называется *биективным* или *взаимно однозначным*, если оно сюръективно и инъективно. Такое отображение называется также *взаимно однозначным соответствием* между A и B.

Справедливы следующие утверждения:

1) Тождественное преобразование $E: A \to A$ биективно.

2) Если $f: A \to B$ биективно, то существует обратное отображение $f^{-1}: B \to A$, причём оно тоже биективно.

3) Если отображения $f: A \to B$ и $g: B \to C$ биективны, то и их композиция $g \circ f: A \to C$ тоже биективна.

Определение 1. Множество A называется *эквивалентным* множеству B, если существует биекция A на B. Обозначение: $A \sim B$.

Отношение эквивалентности разбивает класс всех множеств на классы эквивалентных между собой множеств. Каждому классу эквивалентности припишем символ и будем называть его мощностью множества, входящего в этот класс эквивалентности.

ПОНЯТИЕ МОЩНОСТИ МНОЖЕСТВА

Определение 2. *Мощностью* множества называется то общее, что есть у всех множеств, эквивалентных (количественно) данному множеству.

Мощность множества обозначается символом $|A|$. Таким образом,

$$|A| = |B| \quad \Leftrightarrow \quad A \sim B.$$

Общее понятие мощности введено основателем теории множеств Георгом Кантором в 1878 году.

Приведём примеры равномощных множеств.

Примеры.

1) A - множество нечётных натуральных чисел,

B - множество чётных натуральных чисел.

Формула $f(n) = n + 1$ определяет биекцию $f : A \to B \quad \Rightarrow \quad A \sim B$.

(например, $f(1) = 2$, $f(3) = 4$ и т.д.)

2) R_+ - множество положительных действительных чисел,

R_- - множество отрицательных действительных чисел.

Формула $f(x) = -x$ определяет биекцию $f : R_+ \to R_- \quad \Rightarrow \quad R_+ \sim R_-$.

3) N - множество натуральных чисед,

A - множество точных квадратов.

Формула $f(n) = n^2$ определяет биекцию $f : N \to A \quad \Rightarrow \quad A \sim N.$

ПОНЯТИЕ МОЩНОСТИ МНОЖЕСТВА

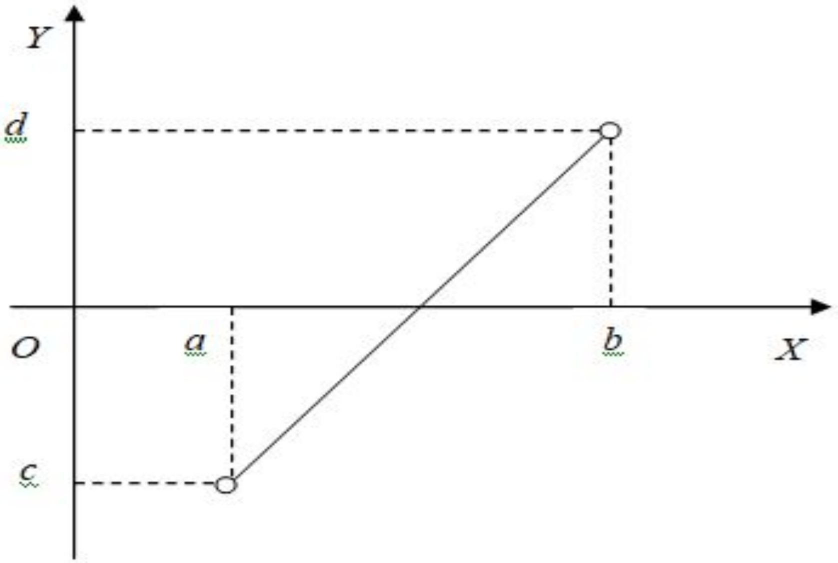
4) Любые два интервала эквивалентнты $(a;b) \sim (c;d)$.
Установим между этими интервалами взаимно однозначное соответствие.

Выведем формулу:

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{y-c}{d-c} \quad \Rightarrow \quad y = (d-c)\cdot\frac{x-a}{b-a} + c$$

(уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $A(a;c)$, $B(b;d)$).

Мы установили взаимно однозначное соответствие между интервалами $(a;b)$ и $(c;d)$. Сделаем проверку: $a \to c$, $b \to d$. Значит, $(a;b) \leftrightarrow (c;d)$.

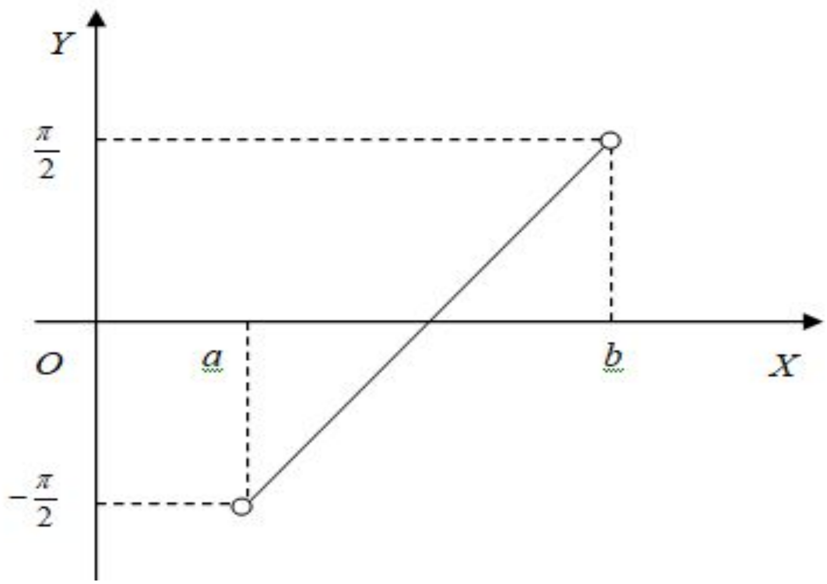


ПОНЯТИЕ МОЩНОСТИ МНОЖЕСТВА

5) Установим взаимно однозначное соответствие между интервалами $(a;b)$ и $(-\infty;+\infty)$.

Покажем, что $(a;b) \sim (-\infty;+\infty)$. Установим взаимно однозначное соответствие между интервалами: $(a;b) \leftrightarrow \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right) \leftrightarrow (-\infty;+\infty)$.

1) Любые два интервала эквивалентны: $(a;b) \leftrightarrow \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Выведем формулу для уравнения прямой, проходящей через две заданные точки $A\left(a,-\frac{\pi}{2}\right)$, $B\left(b;\frac{\pi}{2}\right)$:



ПОНЯТИЕ МОЩНОСТИ МНОЖЕСТВА

$$\frac{x-a}{b-a}=\frac{y+\frac{\pi}{2}}{\pi} \quad \Rightarrow \quad y=f_1(x)=\pi\cdot\frac{x-a}{b-a}-\frac{\pi}{2}.$$

Мы установили взаимно однозначное соответствие между интервалами $(a;b)$ и $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$. Сделаем проверку: $a\rightarrow-\frac{\pi}{2}$, $b\rightarrow\frac{\pi}{2}$. Значит, $(a;b)\leftrightarrow\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$.

2) Взаимно однозначное соответствие между интервалами $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ и $(-\infty;+\infty)$ установим с помощью функции $f_2(x)=tgx$.

Общее отображение задаётся композицией $f_2(f_1(x))=tg\left(\pi\cdot\frac{x-a}{b-a}-\frac{\pi}{2}\right)$.

ПОНЯТИЕ МОЩНОСТИ МНОЖЕСТВА

6) Установим взаимно однозначное соответствие между отрезком *[0;1]* и интервалом *(0;1)*.

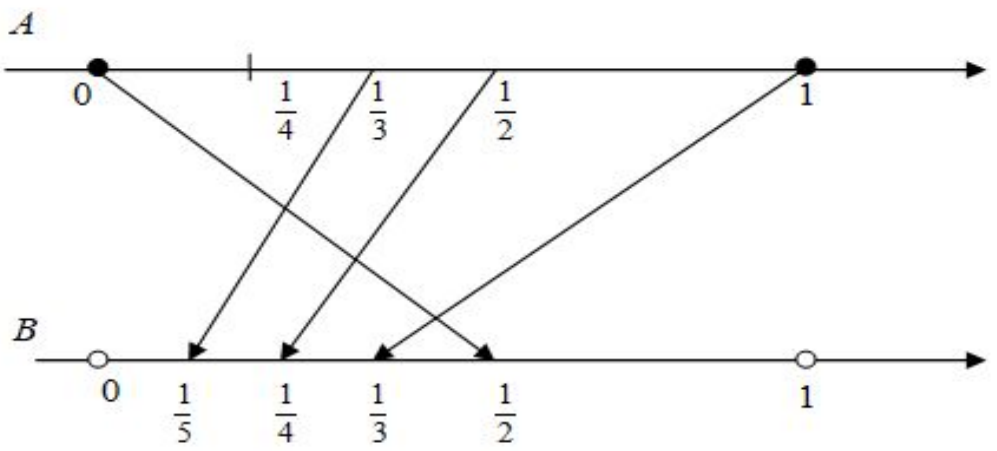
Обозначим *[0;1]=A*, *(0;1)=B*. Существует ли непрерывное отображение *[0;1]* на *(0;1)*? Нет. Поэтому строим последовательность.

Берём меньшее множество B, в нем выделяем последовательность:

$$\left(\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};\frac{1}{5};\quad\ldots\right)=B_1\subset B.$$

Строим соответствующую последовательность в большем множестве A (добавляем концы интервала):

$$\left(0;1;\frac{1}{2};\frac{1}{3};\frac{1}{4};\frac{1}{5};\quad\ldots\right)=A_1\subset A.$$



ПОНЯТИЕ МОЩНОСТИ МНОЖЕСТВА

Запишем: $A = A_1 \cup (A \setminus A_1)$, $B = B_1 \cup (B \setminus B_1)$, где $A \setminus A_1 = B \setminus B_1$.

Определяем отображение $f : A \to B$. Куда переходит каждая точка?

$$f(0) = \frac{1}{2}, \quad f(1) = \frac{1}{3}, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}, \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{5}, \quad \ldots, f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+2}, \quad \ldots$$

Если же $x \in A \setminus A_1$, то $f(x) = x$ (промежуточные точки, не точки последовательности).

Таким образом, f - биекция $[0;1]$ на $(0;1)$.

СЧЁТНЫЕ МНОЖЕСТВА

Определение 1. Множество называется *счётным*, если оно эквивалентно множеству натуральных чисел.

A – счётно $\Leftrightarrow$ $A \sim N,\ N = \{1,2,3,\ \ldots\}$

Теорема 1. Для того чтобы множество A было счётным, необходимо и достаточно, чтобы A можно было представить в виде: $A = \{a_1, a_2, a_3,\ \ldots\}$, где a_n попарно различны.

Теорема 2. Всякое подмножество счётного множества является конечным или счётным.

Теорема 3. Всякое бесконечное множество содержит счётное подмножество.

Теорема 4. Объединение конечного или счётного семейства счётных множеств является счётным множеством.

Теорема 5. Если к бесконечному множеству добавить конечное или счётное, то мощность множества не изменится.

СЧЁТНЫЕ МНОЖЕСТВА

Следствие. Множество рациональных чисел счётно.

Доказательство: Представим множество рациональных чисел $Q = \left\{ \pm \frac{m}{n} \right\}, \quad n \in N, \quad m = 0,1,2,\ldots$ в виде объединения множеств $Q = Q^+ \cup Q^- \cup \{0\}$.

Докажем, что множество положительных рациональных чисел Q^+ счётно.

Пусть $A_1 = \{1,2,3, \quad \ldots\}$ – счётное множество (по теореме 1)

$A_2 = \left\{ \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \quad \ldots \right\}$ - счётное множество (по теореме 1)

$A_3 = \left\{ \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \quad \ldots \right\}$ - счётное множество (по теореме 1)

…………………………………………………………

$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \quad \ldots \quad = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = Q_+$ - счётное множество (по теореме 4) $\Rightarrow$ Q^+ - счётное множество.

Очевидно, множество всех отрицательных рациональных чисел Q^- - счётно, так как $Q^+ \sim Q^-$.

Тогда $Q = Q^+ \cup Q^- \cup \{0\}$ – счётное множество (по теоремам 4,5).

СЧЁТНЫЕ МНОЖЕСТВА

Определение 2. *Декартовым произведением конечного семейства множеств* $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ называется множество, элементами которого являются *кортежи* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ длины n, в которых $a_k \in A_k$ для каждого $k \in \{1,2, \ \ldots, n\}$. Оно обозначается $A_1 \times A_2 \times \ \ldots \ \times A_n$ или $\prod\limits_{1 \le k \le n} A_k$.

Теорема 6. Декартово произведение конечного числа счётных множеств является счётным множеством.

Задача. Доказать, что множество всех конечных последовательностей натуральных чисел счётно.

Доказательство: Пусть P_k - множество всех конечных последовательностей натуральных чисел.

Пусть A_1 - множество последовательностей из одного элемента.

$A_1 = \{(n), n \in N\}$ - счётно, так как $A_1 \sim N$.

$A_2 = \{(n_1, n_2), n_1 \in N, n_2 \in N\}$ - счётно (по теореме 6), так как $A_2 = N \times N$.

……………………………………………………………………………

Тогда $P_k = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ - счётно (по теореме 4).

СЧЁТНЫЕ МНОЖЕСТВА

Определение 3. Бесконечное множество называется *несчётным*, если оно не является счётным.

Теорема 7. Если из несчётного множества удалить конечное или счётное, то мощность множества не изменится.

Определение 4. Действительное число называется *алгебраическим числом*, если является корнем многочлена с целыми коэффициентами.

Любое рациональное число $r = \frac{m}{n}$ является алгебраическим, так как оно является корнем уравнения $nx - m = 0$. Но среди иррациональных чисел также встречаются алгебраические, например $x = \sqrt{2}$, которое является корнем уравнения $x^2 - 2 = 0$.

Теорема 8. Множество алгебраических чисел счётно.

МНОЖЕСТВА МОЩНОСТИ КОНТИНУУМА

Теорема 1. Отрезок $[0;1]$ несчётен.

Определение 1. Множество, эквивалентное отрезку $[0;1]$, называется множеством мощности *континуума* или множеством мощности c.

Примеры.

1) Любой отрезок $[a;b]$ имеет мощность c, так как любые отрезки эквивалентны между собой, следовательно $[a;b] \sim [0;1]$.

2) Любой интервал имеет мощность c, так как $(a;b)=[a;b]\setminus\{a;b\}\sim[a;b]$ по теореме 7.

3) Множество R имеет мощность c.

Можно установить взаимно однозначное соответствие между интервалами $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ и $(-\infty;+\infty)$ с помощью функции $f(x)=tg x$.

4) Множество иррациональных чисел J имеет мощность c.

$J=R\setminus Q \sim R$ по теореме 7, так как $|R|=c$, а Q – счётное множество. Следовательно, $|J|=c$.

МНОЖЕСТВА МОЩНОСТИ КОНТИНУУМА

5) Множество трансцендентных чисел имеет мощность c.

Трансцендентные числа – это числа, которые не являются алгебраическими.

A - множество алгебраических чисел, T - множество трансцендентных чисел.

$T=R\backslash A \sim R$ по теореме 7, так как $|R|=c$, а A – счётное множество. Следовательно, $|T|=c$.

Теорема 2. Множество всех последовательностей из 0 и 1 имеет мощность c.

Определение 2. *Декартовым произведением счётного семейства множеств* $\{A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots\}$ называется множество, элементами которого являются такие последовательности (a_n), что $a_n \in A_n$ для каждого $n \in N$. Оно обозначается $A_1 \times A_2 \times A_3 \times \ldots \times A_n \times \ldots$ или $\prod A_n$.

Теорема 3. Декартово произведение счётного семейства счётных множеств имеет мощность c.