

Векторы в пространстве

[ВХОД](#)

Содержание

- I. Понятие вектора в пространстве
- II. Коллинеарные векторы
- III. Компланарные векторы
- IV. Разложение вектора

Выход

Признак коллинеарности

Если существует такое число k при котором выполняется равенство $\vec{a} = k\vec{b}$ и при том вектор $\vec{b} \neq \vec{0}$, то векторы \vec{a} и \vec{b} коллинеарны.

Доказательств

0



Доказательство признака коллинеарности

Два вектора \vec{a} и \vec{b} коллинеарны тогда и только тогда, когда имеет место равенство.

$$\vec{a} = k\vec{b}$$

вектор $k\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, если $k \geq 0$ (следует из определения

вектор $k\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, если $k < 0$ произведения вектора на число)

Значит вектор \vec{b} и $k\vec{a}$ коллинеарны,
т.к. сонаправленные и противоположно
направленные векторы лежат на одной
или параллельных прямых.

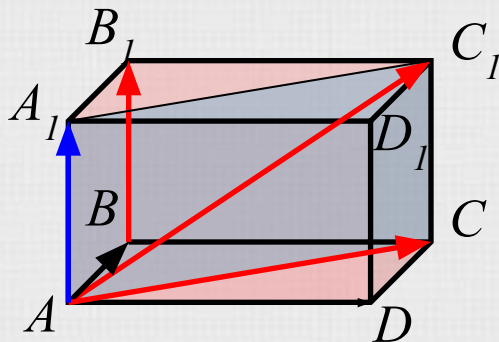
ч.т.д.



Определение компланарных векторов

Компланарные векторы – векторы, при откладывании которых от одной и той же точки пространства, они будут лежать в одной плоскости.

Пример:

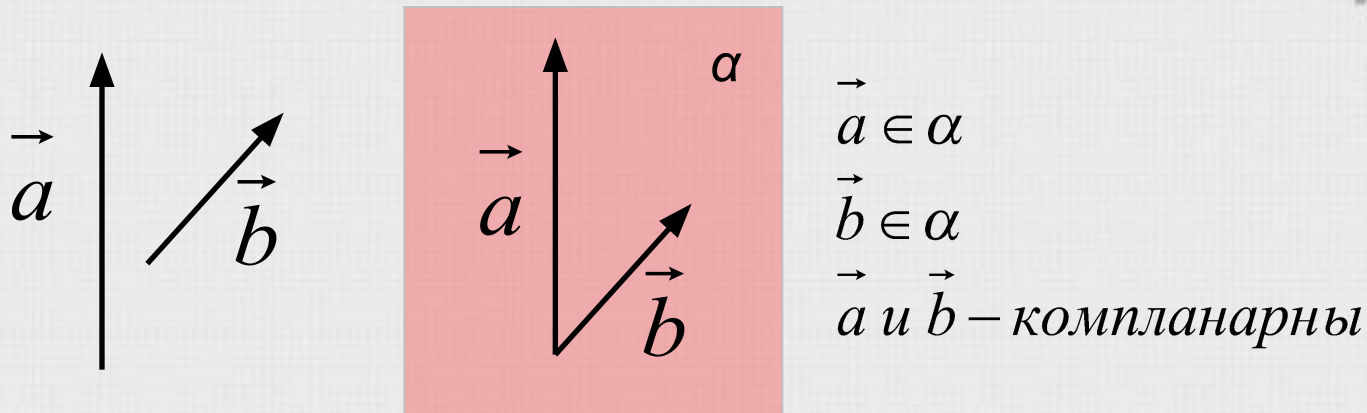


$\vec{BB_1}, \vec{AC}, \vec{AC_1}$ – компланарны, т.к.
 $\vec{BB_1} = \vec{AA_1}$, а векторы $\vec{AA_1}, \vec{AC}, \vec{AC_1}$
лежат в плоскости (AA_1C)



О компланарных векторах

Любые два вектора всегда компланарны.



Три вектора, среди которых имеются два коллинеарных, компланарны.

\vec{a}, \vec{b} и \vec{c} –
компланарны *если* $\vec{a} = k\vec{b}$



Признак компланарности

Если вектор \vec{c} можно разложить по векторам \vec{a} и \vec{b} , т.е. представить в виде

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

где x и y – некоторые числа, то векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} компланарны.

Доказательство

Задачи



Задачи на компланарность

1) *Компланарны ли векторы:*

а) $\vec{a}, \vec{b}, 2\vec{a}, 3\vec{b}$;

б) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}$?

Справка

Решение

2) *Известно, что векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} компланарны.*

Компланарны ли векторы:

а) $\vec{a}, 2\vec{b}, 3\vec{c}$;

б) $\vec{a} + \vec{b}, \vec{a} + 2\vec{c}, 2\vec{b} - 3\vec{c}$?

Справка

Решение



Решение

а) векторы \vec{a} и $2\vec{a}$ коллинеарны,
векторы \vec{b} и $3\vec{b}$ коллинеарны,
значит векторы \vec{a} , \vec{b} , $2\vec{a}$ и $3\vec{b}$ компланарны

б) векторы \vec{a} , \vec{b} и $\vec{a} + \vec{b}$ компланарны,
векторы \vec{a} , \vec{b} и $\vec{a} - \vec{b}$ компланарны,
значит векторы \vec{a} , \vec{b} , $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$ компланарны



Решение

а) если векторы \vec{a} , $2\vec{b}$, $3\vec{c}$ компланарны, то существуют такие x и y , что

$$\vec{a} = x\vec{b} + y\vec{c}$$

проверяем существуют ли такие m и n , что

$$\vec{a} = m \cdot 2\vec{b} + n \cdot 3\vec{c}$$

имеем :

$$2m = x \quad m = \frac{x}{2}$$

$$3n = y \quad n = \frac{y}{3}$$

m и n определяются единственным образом, значит векторы компланарны



Решение

б) если векторы $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} + 2\vec{c}$, $2\vec{b} - 3\vec{c}$ компланарны, то существуют такие x и y , что

$$\vec{a} + \vec{b} = x(\vec{a} + 2\vec{c}) + y(2\vec{b} - 3\vec{c})$$

$$\vec{a} + \vec{b} = x\vec{a} + 2x\vec{c} + 2y\vec{b} - 3y\vec{c}$$

$$\vec{a}(1-x) + \vec{b}(1-2y) + \vec{c}(-2x+3y) = 0$$

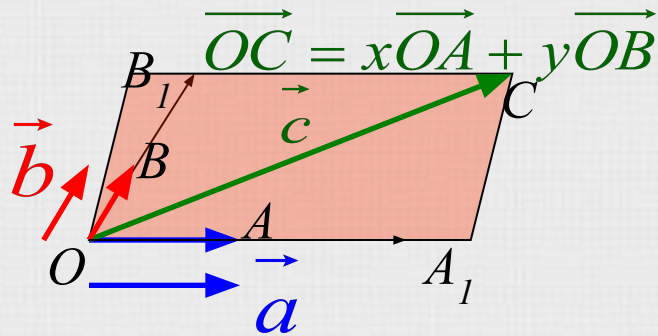
$$\begin{cases} 1-x=0 \\ 1-2y=0 \\ 3y-2x=0 \end{cases} \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} + 2\vec{c} + \frac{1}{2}(2\vec{b} - 3\vec{c})$$

искомые x и y существуют,
значит векторы компланарны



Доказательство признака компланарности



Дано :

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

x, y – некоторые числа

Доказать :

\vec{a}, \vec{b} и \vec{c} – компланарны

Доказательство :

Пусть \vec{a} и \vec{b} – не коллинеарны

O – произвольная точка

$$\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}$$

$$\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OA_1}, \vec{OB_1} \in (OAB)$$

$$\vec{OA_1} = x \cdot \vec{OA} \quad \vec{OB_1} = y \cdot \vec{OB} \Rightarrow$$

$$\vec{OC} = \vec{c} = \vec{OA_1} + \vec{OB_1} = x \cdot \vec{OA} + y \cdot \vec{OB}$$

$\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c}$ лежат в одной плоскости

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – компланарны ч.т.д



Свойство компланарных векторов

Если векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} компланарны, то один из них можно выразить линейным образом через два других, т.е. представить в виде :

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.



Скалярное произведение

Скалярным произведением двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}; \vec{b}})$$

Справедливые утверждения

Вычисление скалярного произведения в координатах

Свойства скалярного произведения



Справедливые утверждения

• *скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \vec{a} \neq \vec{0} \quad \vec{b} \neq \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}$$

• *скалярный квадрат вектора (т.е. скалярное произведение вектора на себя) равен квадрату его длины*

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = a^2$$



Вычисление скалярного произведения в координатах

Скалярное произведение векторов $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$

и $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ выражается формулой

$$\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Доказательств

во



Доказательство формулы скалярного произведения

Доказательство :

I. при $\vec{a} = \vec{0}$ или $\vec{b} = \vec{0}$, равенство

$\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$ справедливо, т.к. $\vec{0} = \{0; 0; 0\}$

II. при $\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq \vec{0}$

O – произвольная точка

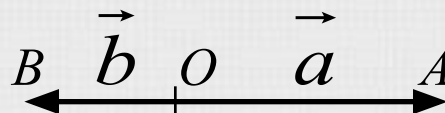
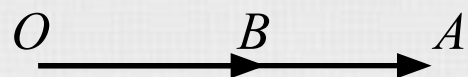
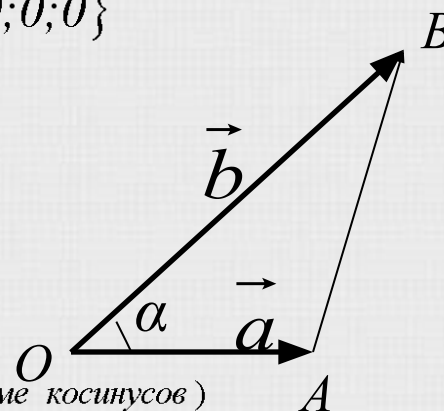
$\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}$

если \vec{a} и \vec{b} неколлинеарны, то

$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2 \cdot OA \cdot OB \cdot \cos \alpha$ (по теореме косинусов)

это равенство верно и в том случае когда векторы

\vec{a} и \vec{b} коллинеарны



$$\begin{aligned} \cos \alpha = 1, AB^2 &= (OA - OB)^2 = & \cos \alpha = -1, AB^2 &= (OA + OB)^2 = \\ &= OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB = & &= OA^2 + OB^2 + 2OA \cdot OB = \\ &= OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos \alpha & &= OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos \alpha \end{aligned}$$



Доказательство формулы скалярного произведения

Так как $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, то

$$\vec{a}\vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{b} - \vec{a}|^2)$$

$$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\} \quad \vec{b}\{x_2; y_2; z_2\} \quad \vec{b} - \vec{a}\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

$$|\vec{a}|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, \quad |\vec{b}|^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2,$$

$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

$$\vec{a}\vec{b} = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 -$$

$$- (z_2 - z_1)^2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 -$$

$$- x_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_2 - y_1^2 - z_2^2 + 2z_1z_2 - z_1^2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$



Свойства скалярного произведения

Для любых векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} и любого числа k справедливы равенства :

$$1^0. \vec{a} \cdot \vec{a} \geq 0 \text{ причем } \vec{a} \cdot \vec{a} > 0 \text{ при } \vec{a} \neq 0$$

$$2^0. \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad (\text{переместительный закон})$$

$$3^0. (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} \quad (\text{распределительный закон})$$

$$4^0. (k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) \quad (\text{сочетательный закон})$$



Разложение вектора

- По двум неколлинеарным векторам
- По трем некомпланарным векторам



Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам

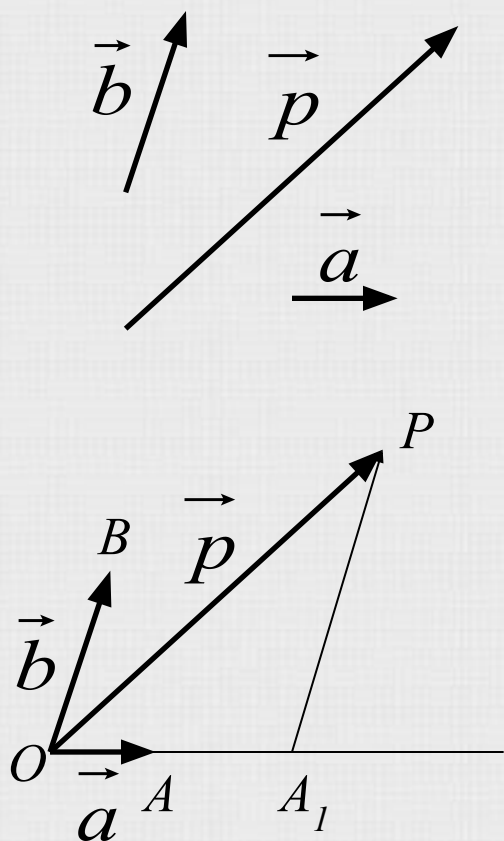
Теорема.

Любой вектор можно разложить по двум данным неколлинеарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Доказательство



Доказательство теоремы



Дано :

\vec{a}, \vec{b} – неколлинеарные
векторы

Доказать :

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

Доказательство :

1) Пусть \vec{p} коллинеарен \vec{b}

Тогда $\vec{p} = y\vec{b}$, где y –
некоторое число.

Следовательно,

$$\vec{p} = 0 \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$$

т.е. \vec{p} разложен по
векторам \vec{a} и \vec{b} .



Доказательство теоремы

2) \vec{r} коллинеарен ни вектору \vec{a} , ни вектору \vec{b}

Отметим O – произвольную точку.

$$\vec{OA} = \vec{a} \quad \vec{OB} = \vec{b} \quad \vec{OP} = \vec{r}$$

$$PA_1 \parallel BO \quad PA_1 \cap OA = A_1$$

$$\vec{r} = \vec{OA_1} + \vec{A_1P} \text{ (по правилу треугольника)}$$

но: $\vec{OA_1}$ и $\vec{A_1P}$ коллинеарны \vec{a} и \vec{b} соответственно,

$$\text{значит } \vec{OA_1} = x\vec{a}, \quad \vec{A_1P} = y\vec{b},$$

следовательно $\vec{r} = x\vec{a} + y\vec{b}$, т.е. \vec{r} разложен по \vec{a} и \vec{b}

ч.т.д.



Доказательство теоремы

Докажем, что коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Допустим: $\vec{p} = x_1 \vec{a} + y_1 \vec{b}$

Тогда: $\vec{p} = x_1 \vec{a} + y_1 \vec{b} + z_1 \vec{c}$
 $\vec{p} = x \vec{a} + y \vec{b} + z \vec{c}$

$$\vec{0} = (x - x_1) \vec{a} + (y - y_1) \vec{b}$$

$$x - x_1 = 0, y - y_1 = 0,$$

если бы $x - x_1 \neq 0$ то $\vec{a} = -\frac{y - y_1}{x - x_1} \vec{b}$

а значит \vec{a} , и \vec{b} коллинеарны, что противоречит условию теоремы значит $x - x_1 = 0$, $y - y_1 = 0$, откуда $x = x_1$ и $y = y_1$.



Разложение вектора по трем некопланарным векторам

Если вектор \vec{p} представлен в виде

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

где x, y, z – некоторые числа, то говорят, что вектор \vec{p} разложен по векторам \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} .

Числа x, y, z называются коэффициентами разложения.

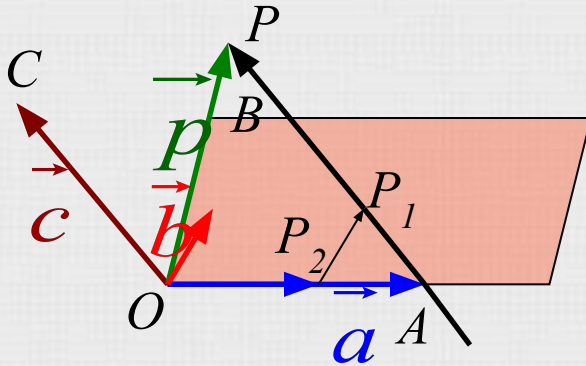
Теорема

Любой вектор можно разложить по трем данным некопланарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Доказательство



Доказательство теоремы



Дано:
 \vec{a} \vec{b} \vec{c} –
 некопланрные
 векторы
 $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$

Доказательство:

O – произвольная точка

$$\vec{OA} = \vec{a} \quad \vec{OB} = \vec{b} \quad \vec{OC} = \vec{c} \quad \vec{OP} = \vec{p}$$

$$AP \parallel OC \quad AP \cap (AOB) = P_1 \quad P_2P_1 \parallel OB$$

$$\vec{OP} = \vec{OP}_2 + \vec{P}_2P_1 + \vec{P}_1P$$

\vec{OP}_2 , и \vec{OA} , \vec{P}_2P_1 и \vec{OB} , \vec{P}_1P , \vec{OC} – коллинеарны

$$\vec{OP}_2 = x \cdot \vec{OA}, \quad \vec{P}_2P_1 = y \cdot \vec{OB}, \quad \vec{P}_1P = z \cdot \vec{OC}$$

$$\vec{OP} = x \cdot \vec{OA} + y \cdot \vec{OB} + z \cdot \vec{OC}$$

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} \text{ ч.т.д.}$$



Доказательство теоремы

Докажем, что коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Допустим: $\vec{p} = x_1 \vec{a} + y_1 \vec{b} + z_1 \vec{c}$

Тогда: $\vec{p} = x_1 \vec{a} + y_1 \vec{b} + z_1 \vec{c}$
 $\vec{p} = x \vec{a} + y \vec{b} + z \vec{c}$

$$\vec{0} = (x - x_1) \vec{a} + (y - y_1) \vec{b} + (z - z_1) \vec{c}$$

$$x - x_1 = 0, \quad y - y_1 = 0, \quad z - z_1 = 0$$

если бы $z - z_1 \neq 0$ то $\vec{c} = -\frac{x - x_1}{z - z_1} \vec{a} - \frac{y - y_1}{z - z_1} \vec{b}$

а значит \vec{a} , \vec{b} , и \vec{c} компланарны, что противоречит условию теоремы

значит $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$

