Векторы в пространстве

вход

Содержание

Выход

Признак коллинеарности

Если существует такое число $\mathbf{k}$ *при котором выполняется равенство* $\vec{\mathbf{a}} = \mathbf{k}\vec{\mathbf{b}}$ *и при том вектор* $\vec{\mathbf{b}} \neq \vec{\mathbf{0}}$, *то векторы* $\vec{\mathbf{a}}$ *и* $\vec{\mathbf{b}}$ *коллинеарны.*

Доказательство

Доказательство признака коллинеарности

Два вектора $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *коллинеарны тогда и только тогда, когда имеет место равенство* $\vec{a} = k\vec{b}$

вектор $k\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, *если* $k \geq 0$ (*следует из определения*

вектор $k\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$, *если* $k < 0$ *произведения вектора на число*)

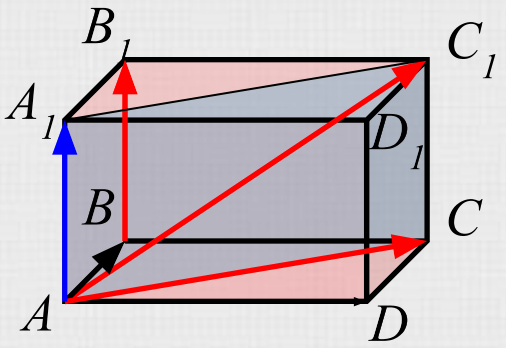
Значит вектор $\vec{b}$ *и* $k\vec{a}$ *коллинеарны, т.к. сонаправленные и противоположно направленные векторы лежат на одной или параллельных прямых.*

ч.т.д.

Определение компланарных векторов

Компланарные векторы *– векторы, при откладывании которых от одной и той же точки пространства, они будут лежать в одной плоскости.*

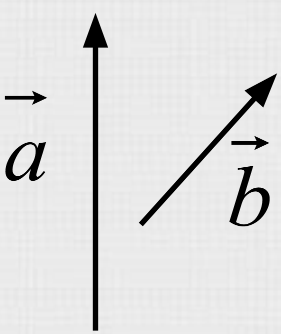
Пример:

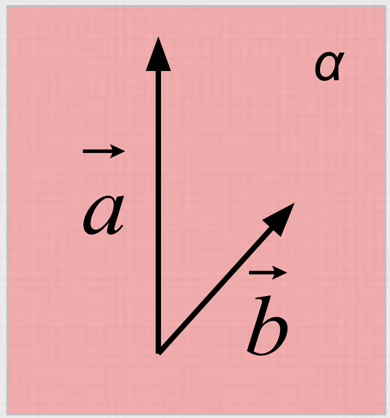


$\overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC_1}$ *– компланарны, т.к.*
$\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{AA_1}$*, а векторы* $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AC_1}$
лежат в плоскости (AA_1C)

О компланарных векторах

Любые два вектора всегда компланарны.





$\vec{a} \in \alpha$

$\vec{b} \in \alpha$

$\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ – *компланарны*

Три вектора, среди которых имеются два коллинеарных, компланарны.

$\vec{a}, \vec{b}$ *и* $\vec{c}$ – *компланарны*

если

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

$\vec{a} = k\vec{b}$

Признак компланарности

Если вектор $\vec{c}$ *можно разложить по векторам* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$, *т.е. представить в виде*

$$\vec{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{x}\vec{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{y}\vec{\boldsymbol{b}}$$

где x *и* y *– некоторые числа, то векторы* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *и* $\vec{c}$ *компланарны.*

Доказательство

Задачи

Задачи на компланарность

1) *Компланарны ли векторы:*

а) $\vec{a}, \vec{b}, 2\vec{a}, 3\vec{b};$

б) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}+\vec{b}, \vec{a}-\vec{b}\,?$

Справка Решение

2) *Известно, что векторы* $\vec{a}$, $\vec{b}$ *и* $\vec{c}$ *компланарны.*
Компланарны ли векторы:

а) $\vec{a}, 2\vec{b}, 3\vec{c};$

б) $\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}+2\vec{c}, 2\vec{b}-3\vec{c}\,?$

Справка Решение

Решение

$a)$ *векторы* $\vec{a}$ *и* $2\vec{a}$ *коллинеарны,*
векторы $\vec{b}$ *и* $3\vec{b}$ *коллинеарны,*
значит векторы $\vec{a}, \vec{b}, 2\vec{a}$ *и* $3\vec{b}$ *компланарны*

б)векторы $\vec{a}, \vec{b}$ *и* $\vec{a}+\vec{b}$ *компланарны,*
векторы $\vec{a}, \vec{b}$ *и* $\vec{a}-\vec{b}$ *компланарны,*
значит векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}+\vec{b}$ *и* $\vec{a}-\vec{b}$ *компланарны*

Решение

а) если векторы $\vec{a}, 2\vec{b}, 3\vec{c}$ компланарны,

то существуют такие x и y, что

$$\vec{a} = x\vec{b} + y\vec{c}$$

проверяем существуют ли такие m и n, что

$$\vec{a} = m \cdot 2\vec{b} + n \cdot 3\vec{c}$$

имеем :

$$2m = x \quad m = \frac{x}{2}$$

$$3n = y \quad n = \frac{y}{3}$$

m и n определяются единственным образом,

значит векторы компланарны

Решение

б)если векторы $\vec{a}+\vec{b}, \vec{a}+2\vec{c}, 2\vec{b}-3\vec{c}$

компланарны, то существуют такие x и y, что

$$\vec{a}+\vec{b}=x(\vec{a}+2\vec{c})+y(2\vec{b}-3\vec{c})$$

$$\vec{a}+\vec{b}=x\vec{a}+2x\vec{c}+2y\vec{b}-3y\vec{c}$$

$$\vec{a}(1-x)+\vec{b}(1-2y)+\vec{c}(-2x+3y)=0$$

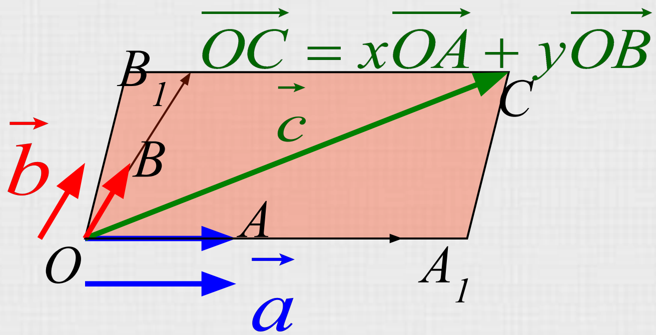
$$\begin{cases} 1-x=0 \\ 1-2y=0 \\ 3y-2x=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=1 \\ y=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{a}+2\vec{c}+\frac{1}{2}(2\vec{b}-3\vec{c})$$

искомые x и y существуют,

значит векторы компланарны

Доказательство признака компланарности



Дано :

$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$

x, y – некоторые числа

Доказать :

$\vec{a}, \vec{b}$ *и* $\vec{c}$ *– компланарны*

Доказательство :

Пусть $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *– не коллинеарны*

O – произвольная точка

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$

$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OB_1} \in (OAB)$

$\overrightarrow{OA_1} = x \cdot \overrightarrow{OA}\ \overrightarrow{OB_1} = y \cdot \overrightarrow{OB} \Rightarrow$

$\overrightarrow{OC} = \vec{c} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OB_1} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$ *лежат в одной плоскости*

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ *– компланарны ч.т.д*

Свойство компланарных векторов

Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ *и* $\vec{c}$ *компланарны, то один из них можно выразить линейным образом через два других, т.е. представить в виде:*

$$\vec{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{x}\vec{\boldsymbol{a}} + \boldsymbol{y}\vec{\boldsymbol{b}}$$

причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Скалярное произведение

Скалярным произведением *двух векторов называется произведение их длин на косинус угла между ними.*

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a};\vec{b}})$$

Справедливые утверждения

Вычисление скалярного произведения в координатах

Свойства скалярного произведения

Справедливые утверждения

- *скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю тогда и только тогда, когда эти векторы перпендикулярны*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{0} \quad \vec{a} \neq \vec{0} \quad \vec{b} \neq \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} \perp \vec{b}$$

- *скалярный квадрат вектора (т.е. скалярное произведение вектора на себя) равен квадрату его длины*

$$\vec{a}^{\,2} = \left|\vec{a}\right|^2 = a^2$$

Вычисление скалярного произведения в координатах

Скалярное произведение векторов $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$ *и* $\vec{b}\{x_2; y_2; z_2\}$ *выражается формулой*

$$\vec{a}\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

[Доказательство](#)

Доказательство формулы скалярного произведения

Доказательство:

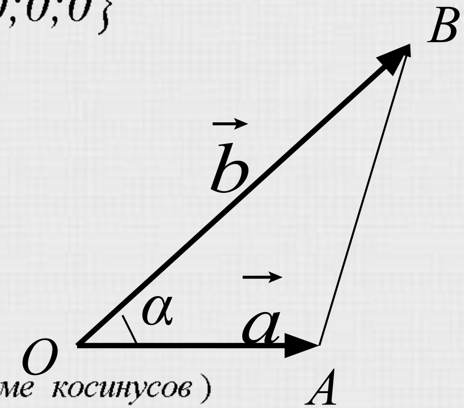
I. при $\vec{a}=\vec{0}$ или $\vec{b}=\vec{0}$, равенство

$\vec{a}\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$ *справедливо, т.к.* $\vec{0}\{0;0;0\}$

II. при $\vec{a}\neq\vec{0}, \vec{b}\neq\vec{0}$

O – произвольная точка

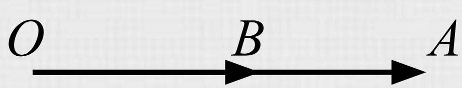
$\overrightarrow{OA}=\vec{a}, \overrightarrow{OB}=\vec{b}$

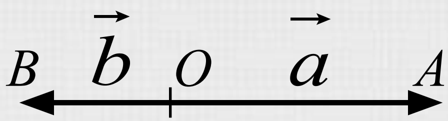


если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, то

$AB^2=OA^2+OB^2-2\cdot OA\cdot OB\cdot\cos\alpha$ *(по теореме косинусов)*

это равенство верно и в том случае когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны





$\cos\alpha=1,\ AB^2=(OA-OB)^2=$

$=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB=$

$=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cos\alpha$

$\cos\alpha=-1,\ AB^2=(OA+OB)^2=$

$=OA^2+OB^2+2OA\cdot OB=$

$=OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cos\alpha$

Доказательство формулы скалярного произведения

$$Так\ как\ \overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}, \overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, то$$

$$\vec{a}\vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{b} - \vec{a}|^2)$$

$$\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\} \quad \vec{b}\{x_2; y_2; z_2\} \quad \vec{b} - \vec{a}\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$$

$$|\vec{a}|^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2, |\vec{b}|^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2,$$

$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2$$

$$\vec{a}\vec{b} = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 -$$

$$-(z_2 - z_1)^2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - x_2^2 + 2x_1x_2 -$$

$$-x_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_2 - y_1^2 - z_2^2 + 2z_1z_2 - z_1^2) = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$$

Свойства скалярного произведения

Для любых векторов $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}$ *и* $\vec{\mathbf{c}}$ *и любого числа* $\mathbf{k}$ *справедливы равенства :*

$1^0.$ $\vec{a} \geq 0$ *причем* $\vec{a}^2 > 0$ *при* $\vec{a} \neq 0$

$2^0.$ $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$ **(переместительный закон)**

$3^0.$ $\left(\vec{a} + \vec{b}\right)\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$ **(распределительный закон)**

$4^0.$ $\left(k\vec{a}\right)\vec{b} = k\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)$ **(сочетательный закон)**

Разложение вектора

- [По двум неколлинеарным векторам]
- [По трем некомпланарным векторам]

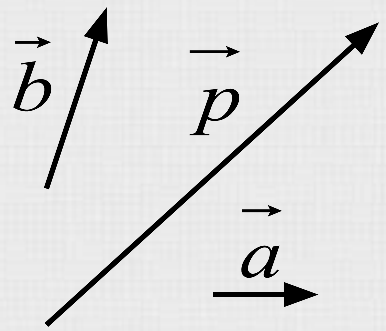
Разложение вектора по двум неколлинеарным векторам

Теорема.

Любой вектор можно разложить по двум данным неколлинеарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Доказательство

Доказательство теоремы



Дано:

$\vec{a}, \vec{b}$ – *неколлинеарные векторы*

Доказать:

$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$

Доказательство:

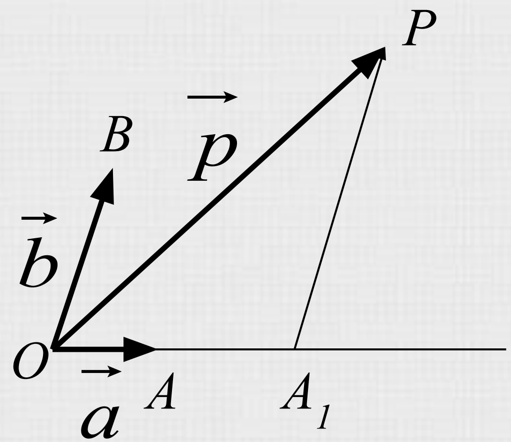
1) *Пусть* $\vec{p}$ *коллинеарен* $\vec{b}$.

Тогда $\vec{p} = y\vec{b}$, *где y – некоторое число.*

Следовательно,

$\vec{p} = 0 \cdot \vec{a} + y \cdot \vec{b}$

т.е. $\vec{p}$ *разложен по векторам* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$.



Доказательство теоремы

2) $\vec{p}$ не коллинеарен ни вектору $\vec{a}$, ни вектору $\vec{b}$.

Отметим O – произвольную точку.

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$

$PA_1 \| BO$ $PA_1 \cap OA = A_1$

$\vec{p} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{A_1P}$ *(пп правилу треугольника)*

но: $\overrightarrow{OA_1}$ *и* $\overrightarrow{A_1P}$ *коллинеарны* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$ *соответственно,*

значит $\overrightarrow{OA_1} = x\vec{a}$, $\overrightarrow{A_1P} = y\vec{b}$,

следовательно $\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b}$, *т.е.* $\vec{p}$ *разложен по* $\vec{a}$ *и* $\vec{b}$

ч.т.д.

Доказательство теоремы

Докажем, что коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Допустим: $\vec{p} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b}$

Тогда: $\vec{p} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c}$

$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ -

$\vec{0} = (x - x_1)\vec{a} + (y - y_1)\vec{b}$

$x - x_1 = 0,\ y - y_1 = 0,$

если бы $x - x_1 \neq 0$ *то* $\vec{a} = -\dfrac{y - y_1}{x - x_1}\vec{b}$

а значит $\vec{a}$, *и* $\vec{b}$ *коллинеарны, что противоречит условию теоремы*

значит $x - x_1 = 0,\ y - y_1 = 0,$ *откуда*

$x = x_1$ *и* $y = y_1$.

Разложение вектора по трем некомпланарным векторам

*Если вектор **p** представлен в виде*

$$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$$

*где **x, y, z** – некоторые числа, то говорят, что вектор* $\vec{\mathbf{p}}$ *разложен по векторам* $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$ *и* $\vec{\mathbf{c}}$.

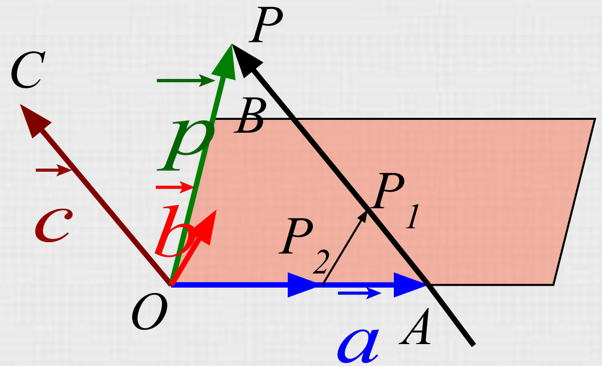
Числа x, y, z называются коэффициентами разложения.

<u>Теорема</u>

Любой вектор можно разложить по трем данным некомпланарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Доказательство

Доказательство теоремы



Дано:

$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$ – некомпланрные векторы

$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$

Доказательство:

O – произвольная точка

$\overrightarrow{OA} = \vec{a}\ \overrightarrow{OB} = \vec{b}\ \overrightarrow{OC} = \vec{c}\ \overrightarrow{OP} = \vec{p}$

$AP \parallel OC \quad AP \cap (AOB) = P_1 \quad P_2P_1 \parallel OB$

$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{P_2P_1} + \overrightarrow{P_1P}$

$\overrightarrow{OP_2}$, и $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{PP_1}$ и $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{P_1P}$, $\overrightarrow{OC}$ – коллинеарны

$\overrightarrow{OP_2} = x \cdot \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{P_2P_1} = y \cdot \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{P_1P} = z \cdot \overrightarrow{OC}$

$\overrightarrow{OP} = x \cdot \overrightarrow{OA} + y \cdot \overrightarrow{OB} + z \cdot \overrightarrow{OC}$

$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ ч.т.д.

Доказательство теоремы

Докажем, что коэффициенты разложения определяются единственным образом.

Допустим: $\vec{p} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c}$

Тогда: $\vec{p} = x_1\vec{a} + y_1\vec{b} + z_1\vec{c}$

$\vec{p} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ -

$\vec{0} = (x - x_1)\vec{a} + (y - y_1)\vec{b} + (z - z_1)\vec{c}$

$x - x_1 = 0,\ y - y_1 = 0,\ z - z_1 = 0$

если бы $z - z_1 \neq 0$ *то* $\vec{c} = -\dfrac{x - x_1}{z - z_1}\vec{a} - \dfrac{y - y_1}{z - z_1}\vec{b}$

а значит $\vec{a}$, $\vec{b}$, *и* $\vec{c}$ *компланарны, что противоречит условию теоремы*

значит $x = x_1,\ y = y_1,\ z = z_1$