Основные приёмы решений тригонометрических уравнений.

Сопоставьте следующие колонки таблицы:

sin x = 0	$-\frac{\pi}{2}+2\pi n$
sin x = 1	$2\pi n$
sin x = -1	πn
cos x = 0	$\frac{\pi}{2}+\pi n$
cos x = 1	$\frac{\pi}{4}+\pi n$
cos x = -1	πn
tg x = 0	$\frac{\pi}{2}+2\pi n$
ctg x = 0	$\pi+2\pi n$
tg x = 1	$\frac{3\pi}{4}+\pi n$
ctg x = -1	$\frac{\pi}{2}+\pi n$

Решить уравнения:

1). $cos\frac{x}{3} = \frac{3}{4}$

Решение:

$\frac{x}{3} = \pm arc\cos\frac{3}{4} + 2\,\pi n, n\epsilon Z$

Ответ: $x = \pm 3arc\cos\frac{3}{4} + 6\,\pi n, n\epsilon Z$

2). $\sin(3\pi + x) = -0{,}6$

Решение:

$\sin(\pi + x) = -0{,}6$

$-\sin x = -0{,}6$

$\sin x = 0{,}6$

Ответ: $x = (-1)^n \arcsin 0{,}6 + \pi n, n \in Z$

3) $(4tg\,x - 1)(cos2x + 1) = 0$

<u>Решение:</u>

ООУ: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

$4tg\,x - 1 = 0$ $\operatorname{tg} x = \frac{1}{4}$ $x = arctg\frac{1}{4} + \pi n, n \in Z$	$cos2x + 1 = 0$ $cos2x = -1$ $2x = \pi + 2\pi k, k \epsilon Z$ $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \epsilon Z$ - не удовлетворяет ООУ.

Ответ: $x = arctg\frac{1}{4} + \pi n, n \in Z$

Метод введения вспомогательной переменной.

№1. $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$

<u>Решение:</u>

$2(1-\sin^2 x) + 5\sin x - 4 = 0$

$2 - 2\sin^2 x + 5\sin x - 4 = 0$

$2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0$

Замена: $\sin x = t$

$2t^2 - 5t + 2 = 0$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}$$

$t_1 = 2 \qquad t_2 = \frac{1}{2}$

$\sin x = 2$

Не имеет решений

$\sin x = \frac{1}{2}$

$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$

№2. $\sin 2x + 3(\sin x + \cos x) = 3$

Решение:

Воспользуемся формулой:

$$\sin 2x = (\cos x \pm \sin x)^2 - 1$$

Получаем:

$$(\sin x + \cos x)^2 - 1 + 3(\sin x + \cos x) = 3$$

$$(\sin x + \cos x)^2 + 3(\sin x + \cos x) - 4 = 0$$

$$\sin x + \cos x = t$$

$$t^2 + 3t - 4 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3 \pm 5}{2}$$

$t_1 = 1$

$$\sin x + \cos x = 1$$

$$\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = 1$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\pi}{4} + x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$$

$$x = 2\pi n, n \in Z$$

$t_2 = -4$

$$\sin x + \cos x = -4$$

$$\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = -4$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) = -2\sqrt{2}$$

Не имеет решений

Ответ: $x = 2\pi n, n \in Z$

Метод разложения на множители.

№3. $tgx \cdot sinx + tgx - sinx - 1 = 0$

Решение:

О.О.У.: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

Сгруппируем слагаемые и вынесем общие множители за скобки:

$$(tgx \cdot sinx + tgx) - (sinx + 1) = 0$$

$$tgx(sinx + 1) - (sinx + 1) = 0$$

$$(tgx - 1)(sinx + 1) = 0$$

$tgx - 1 = 0$

$tgx = 1$

$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$

$sinx + 1 = 0$

$sinx = -1$

$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$

Данное решение не удовлетворяет О.О.У.

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$

№ 4 $\cos 5x - \cos 3x = 4\sin x$

<u>Решение</u>:

Воспользуемся формулой разности косинусов:

$$-2\sin\frac{5x+3x}{2}\cdot\sin\frac{5x-3x}{2} - 4\sin x = 0$$

$$-2\sin 4x\cdot\sin x - 4\sin x = 0$$

$$\sin x(2\sin 4x + 4) = 0$$

$$\sin x = 0$$

$$x = \pi n, n \in Z$$

$$2\sin 4x + 4 = 0$$

$$\sin 4x = -2$$

Не имеет решений

Ответ: $x = \pi n, n \in Z$

Однородные уравнения.

№5 $4\cos x - \sin x = 0$ - однородное уравнение 1-ой степени

<u>Решение:</u>

Пусть $\cos x = 0$ Тогда и sin x = 0, получим систему:

$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = 0' \end{cases}$ данная система не имеет решений

Следовательно, cos *x* = 0 не является корнем данного уравнения и обе части уравнения можно поделить на cos *x*, т.к. при этом не произойдёт потери корней.

Разделим обе части уравнения на, $\cos x \neq 0$ Это можно сделать, т.к.

Получим уравнение

$4 - tg\ x = 0$

$tg\ x = 4$

$x = arctg\ 4 + \pi n, n \in Z$

Ответ: $x = arctg\ 4 + \pi n, n \in Z$

№ 6 $3\sin^2 x + 4\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x = 2$

<u>Решение:</u>

$$3\sin^2 x + 4\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x = 2\sin^2 x + 2\cos^2 x$$

Переносим все члены уравнения в одну часть:

$$\sin^2 x + 4\sin x \cdot \cos x + 3\cos^2 x = 0$$

$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = 0' \end{cases}$ данная система не имеет решений

Следовательно, $\cos x = 0$ не является корнем данного уравнения и обе части уравнения можно поделить на $\cos^2 x$, так как при этом не произойдет потеря корней.

Разделим обе части уравнения на $\cos^2 x \neq 0$.

Получим уравнение

$tg^2 x + 4tg\, x + 3 = 0$

Делаем замену $tg\, x = t$

$t^5 + 4t + 3 = 0$

$t_1 = -1$, $t_2 = -3$

$tg\, x = -1$

$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,$

$tg\, x = -3$

$x = arctg(-3) + \pi k, \quad k\epsilon Z$

$x = -arctg3 + \pi k, \quad k\epsilon Z$

Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n\epsilon Z \qquad x = -arctg3 + \pi k,\ k\epsilon Z$

Неоднородные уравнения.

№ 7 $\sqrt{3}\sin 5x - \cos 5x = -\sqrt{3}.$

<u>Решение:</u>

Поделим обе части уравнения на $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{2}$

Получим

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 5x - \frac{1}{2}\cos 5x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Замечаем, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{6}$ $\frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$, т.е. имеем уравнение

$$\sin 5x \cos\frac{\pi}{6} - \cos 5x \sin\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Применяем формулу синуса

$$\sin\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$5x - \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$$

$$5x - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$$

Ответ: $x = \frac{3\pi}{10} + \frac{2\pi k}{5}, k \in Z$ $x = \frac{11\pi}{30} + \frac{2\pi n}{5}, n \in Z$

$$4\sin x + 3\cos x = 4$$

Решение:

Поделим обе части уравнения на $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{2}$

Получим

$$\frac{4}{5}\sin x + \frac{3}{5}\cos x = \frac{4}{5}$$

Замечаем, что $\frac{4}{5} = \cos\left(\pm arccos\frac{4}{5}\right)$ $\frac{3}{5} = \sin\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$, т.е. имеем уравнение:

$$\cos\left(\pm arccos\frac{4}{5}\right)\cdot\sin x + \sin\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)\cdot\cos x = \frac{4}{5}$$

В данном случае синус и косинус имеют нетабличные значения, поэтому получается очень некрасивое уравнение. Тогда для решения этого уравнения лучше воспользоваться следующим способом.

№ 8 $4\sin x + 3\cos x = 4$

Решение:

$$4\left(2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}\right) + 3\left(\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}\right) = 4\left(\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2}\right)$$

$$8\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 3\cos^2\frac{x}{2} - 3\sin^2\frac{x}{2} - 4\cos^2\frac{x}{2} - 4\sin^2\frac{x}{2} = 0$$

$$-\cos^2\frac{x}{2} - 7\sin^2\frac{x}{2} + 8\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0$$

Разделим обе части уравнения на $\cos^2\frac{x}{2} \neq 0$ т.к. в этом случае не произойдет потери корней.

$$7tg^2\frac{x}{2} - 8tg\frac{x}{2} + 1 = 0$$

$$tg\frac{x}{2} = t$$

$$7t^2 - 8t + 1 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{64-28}}{14} = \frac{4 \pm 3}{7}$$

$t_1 = 1$

$tg\frac{x}{2} = 1$

$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

$t_2 = -\frac{1}{7}$

$tg\frac{x}{2} = -\frac{1}{7}$

$\frac{x}{2} = -arctg\frac{1}{7} + \pi k, k \in Z$

$x = -2arctg\frac{1}{7} + 2\pi k, k \in Z$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, x = -2arctg\frac{1}{7} + 2\pi k, n, k \in Z$