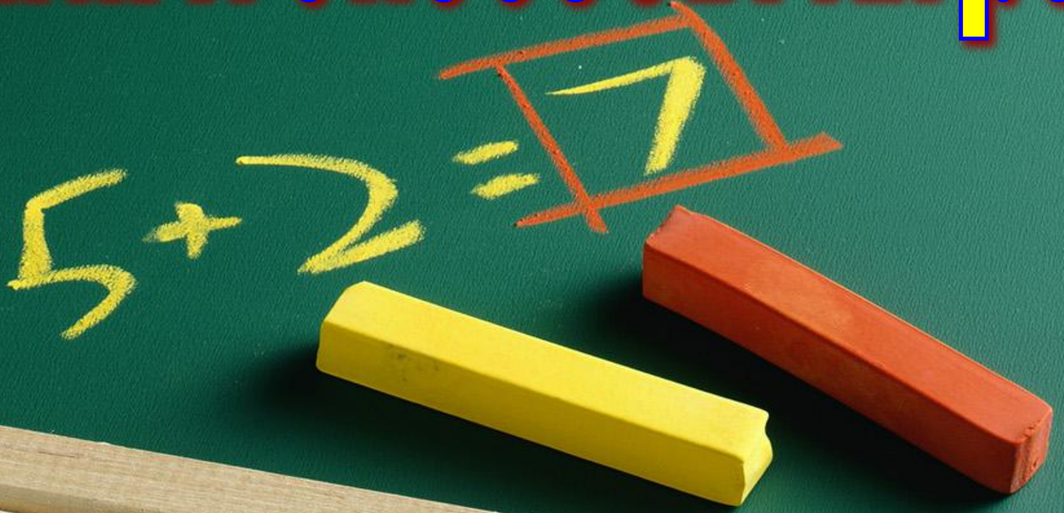
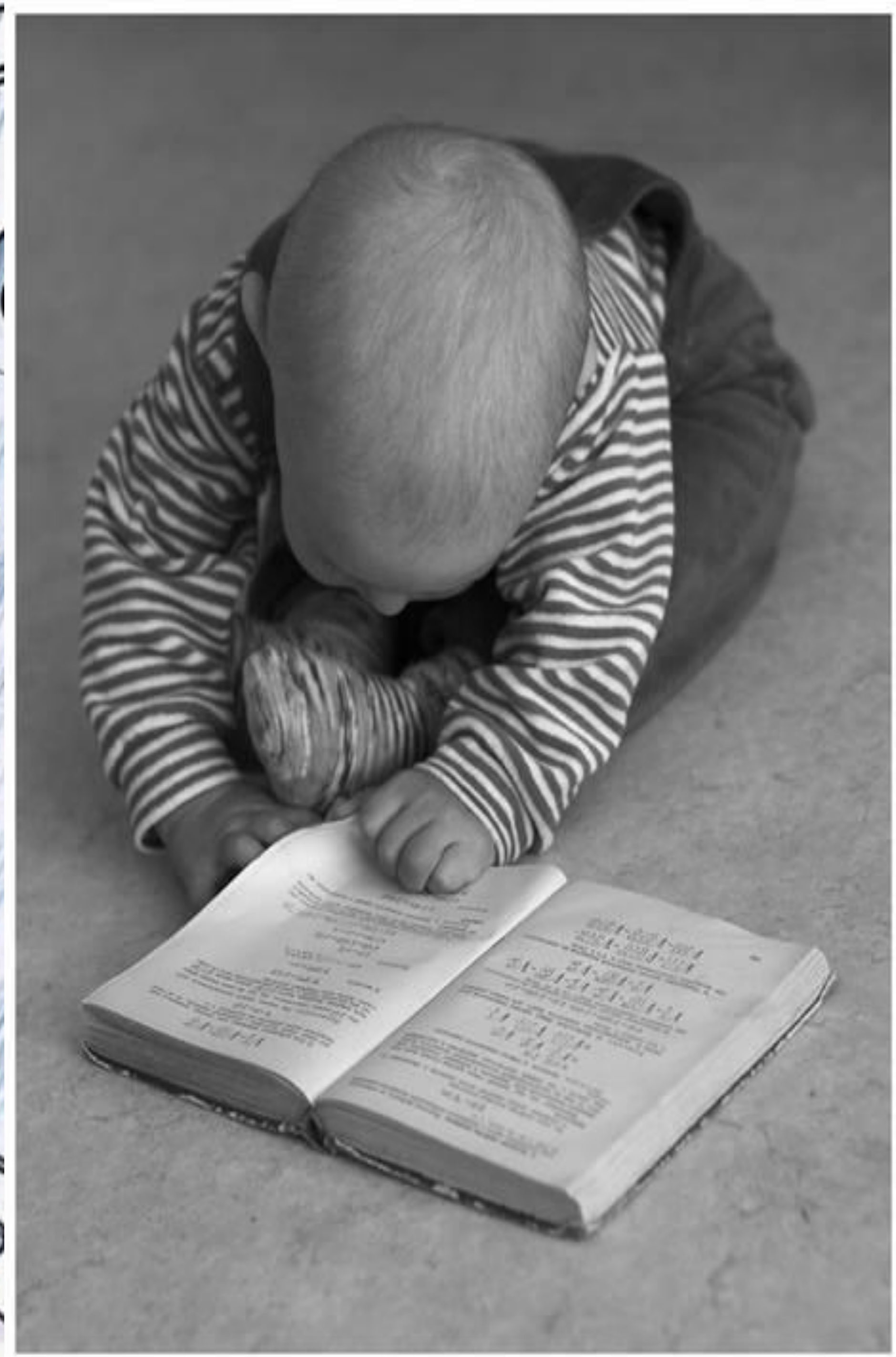
Уравнения и способы их решения



учитель
Математики
Кочетова Ирина Геннадьевна
г.Кемерово 2012г

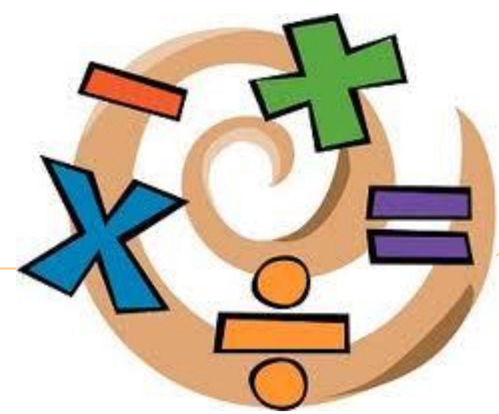

НЕ ЗАБУДУ
МАТЬ РОДНУЮ
НЕ ЗАБУДУ
УТРО
©А'2003
CARICATURA.RU



Содержание:

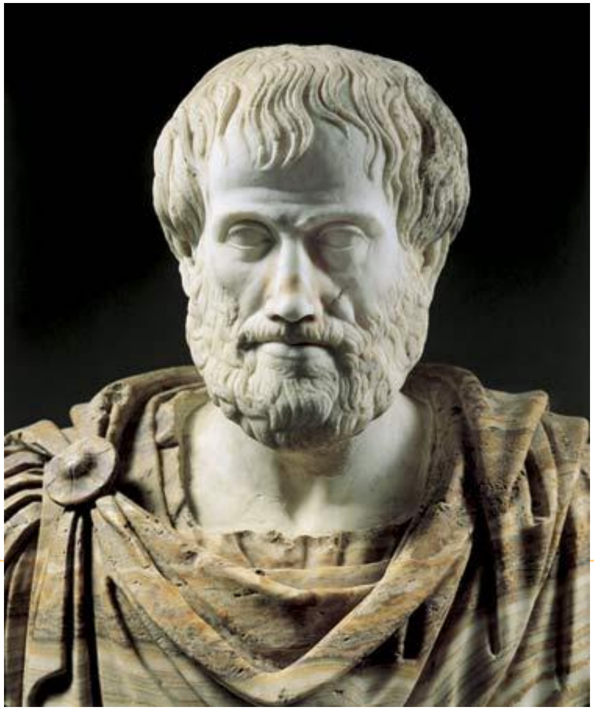
План:

1. Введение.
2. Историческая справка.
3. Уравнения. Алгебраически уравнения.
   - а) Основные определения.
   - б) Линейное уравнение и способ его решения.
   - в) Квадратные уравнения и способы его решения.
   - г) Уравнения четвертой степени и способы его решения
   - д) Рациональное алгебраическое уравнение и способ его решения.
   - е) Иррациональные уравнения и способы его решения.



Математика… выявляет порядок, симметрию и определенность, а это – важнейшие виды прекрасного.

Аристотель



Введение

Данная работа является попыткой обобщить и систематизировать изученный материал по выше указанной теме. Мы расположили материал по степени его сложности, начиная с самого простого. В него вошли как известные нам виды уравнений из школьного курс алгебры, так и дополнительный материал. При этом мы попытались показать виды уравнений, которые не изучаются в школьном курсе, но знание которых может понадобиться при поступлении в высшее учебное заведение. В нашей работе при решении уравнений мы не стали ограничиваться только действительным решением, но и указали комплексное, так как считаем, что иначе уравнение просто недорешено. Ведь если в уравнении нет действительных корней, то это еще не значит, что оно не имеет решений.

Цель: Определить какие способы чаще всего применяются для решения уравнений.

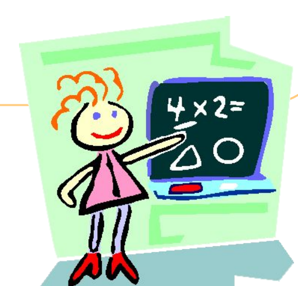
Задачи:

- *Показать необходимость применения различных способов к решению уравнений.*
- *Изучить теоретический материал по данному вопросу.*
- *Прорешать уравнения, акцентируя внимание на использовании различных способов их решения.*

Историческая справка:

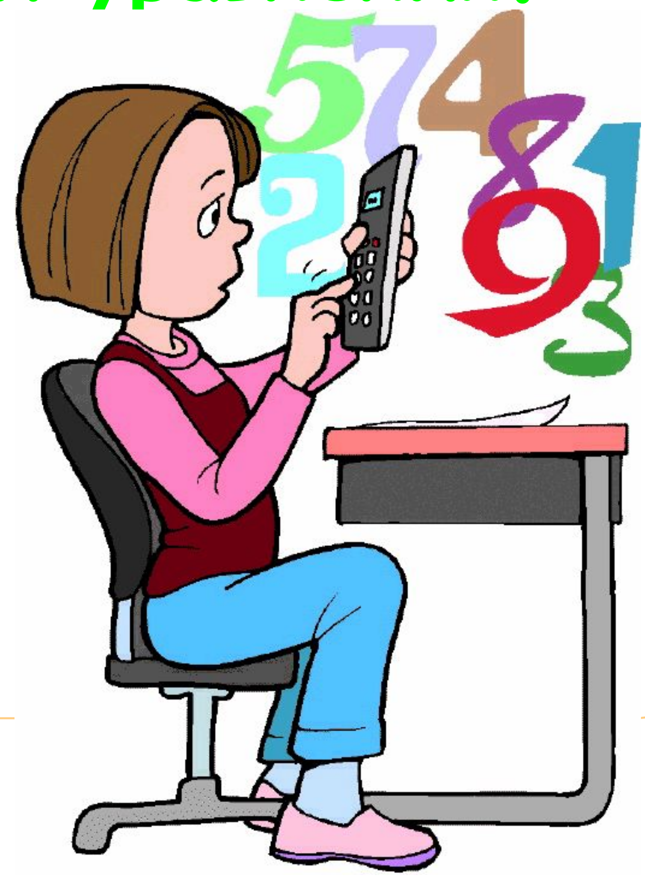
Дошедшие до нас источники свидетельствуют, что древние ученые владели какими-то общими приемами решения задач с неизвестными величинами. Однако ни в одном папирусе, ни в одной глиняной табличке не дано описания этих приемов. Авторы лишь изредка снабжали свои числовые выкладки скупыми комментариями типа: "Смотри!", "Делай так!", "Ты правильно нашел". В этом смысле исключением является "Арифметика" греческого математика Диофанта Александрийского (III в.) – собрание задач на составление уравнений с систематическим изложением их решений.

Однако первым руководством по решению задач, получившим широкую известность, стал труд багдадского ученого IX в. Мухаммеда бен Мусы аль-Хорезми. Слово "аль-джебр" из арабского названия этого трактата – "Китаб аль-джебер валь-мукабала" ("Книга о восстановлении и противопоставлении") – со временем превратилось в хорошо знакомое всем слово "алгебра", а само сочинение аль-Хорезми послужило отправной точкой в становлении науки о решении уравнений.

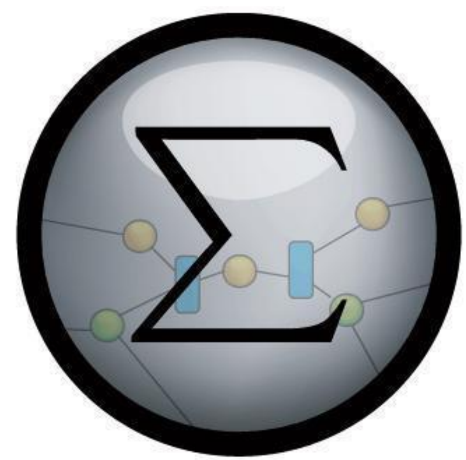


Уравнения. Алгебраические уравнения

В алгебре рассматриваются два вида равенств – тождества и уравнения.



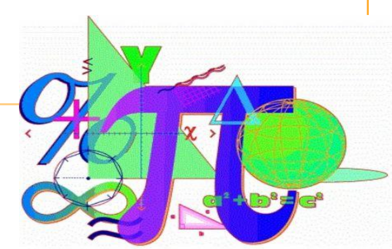
Тождество – это равенство, которое выполняется при всех (допустимых) значениях входящих в него переменных). Для записи тождества наряду со знаком = также используется знак .



Уравнение – это равенство, которое выполняется лишь при некоторых значениях входящих в него букв. Буквы, входящие в уравнение, по условию задачи могут быть неравноправны: одни могут принимать все свои допустимые значения (их называют параметрами или коэффициентами уравнения и обычно обозначают первыми буквами латинского алфавита:

a,b,c…-или теми же буквами, снабженными индексами. Другие, значения которых требуется отыскать, называют неизвестными (их обычно обозначают последними буквами латинского алфавита:

x,y,z… или теми же буквами, снабженными индексами



Линейное уравнение

- *Линейным уравнением* называется уравнение первой степени.

$$ax + b = 0 \quad (1)$$

где a и b – некоторые действительные числа.

Линейное уравнение всегда имеет единственный корень , который находится следующим образом.

Прибавляя к обеим частям уравнения (1) число -b, получаем уравнение

$$ax = -b \quad (2)$$

эквивалентное уравнению (1). Разделив обе части уравнения (2) на величину a, получаем корень уравнения (1):

$$x = -\frac{b}{a}$$

Квадратное уравнение

Алгебраическое уравнение второй степени.

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (3)$$

где a, b , c – некоторые действительные числа, называется *квадратным уравнением*. Если a=1, то квадратное уравнение (3) называется *приведенным*.

Корни квадратного уравнения вычисляются по формуле

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Выражение $b^2 - 4ac$ называется *дискриминантом* квадратного уравнения.

При этом:

если $b^2 - 4ac > 0$, то уравнение имеет два различных действительных корня;

если $b^2 - 4ac = 0$, то уравнение имеет один действительный корень кратности 2;

если $b^2 - 4ac < 0$, то уравнение действительных корней не имеет, а имеет два комплексно сопряженных корня:

$$x_1 = -\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} i \qquad x_2 = -\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} i$$

Двучленное уравнение

Уравнения n-й степени вида

$$ax^n \pm b = 0 \qquad (8)$$

называется *двучленным уравнением*. При a >0 и b >0 решается заменой

$$x = y \cdot \sqrt[n]{\frac{b}{a}}$$

Где $\sqrt[n]{\frac{b}{a}}$ арифметическое значение корня, уравнение (8) приводится к уравнению $y^n \pm 1 = 0$

которое и будет далее рассматриваться.

Двучленное уравнение $y^n - 1 = 0$ при нечетном n имеет один действительный корень **y=1** . В множестве комплексных чисел это уравнение имеет n корней (из которых один действительный и **n-1** комплексных):

$$y_k = \cos\frac{2\pi k}{n} + i\sin\frac{2\pi k}{n} \qquad (k=0, 1, 2, ..., n-1). \qquad (9)$$

Двучленное уравнение $y^n - 1 = 0$ при четном n в множестве действительных чисел имеет два корня

, $\{y = 1; y = -1\}$

а в множестве комплексных чисел n корней, вычисляемых по формуле (9).

Двучленное уравнение $y^n + 1 = 0$ при четном n имеет один действительный корень y=-1 , а в множестве комплексных чисел ..., вычисляемых по формуле

$$y_k = \cos\frac{2\pi k + \pi}{n} + i\sin\frac{2\pi k + \pi}{n} \qquad (k= 0, 1, 2, ..., n-1). \qquad (10)$$

Алгебраическое уравнение четвертой степени

Алгебраическое уравнение четвертой степени.

$$ax^4 + bx^2 + c = 0$$

где a, b, c – некоторые действительные числа, называется *биквадратным уравнением*.

Заменой $x^2 = y$ уравнение сводится к квадратному уравнению $a_y{}^4 + b_y{}^2 + c = 0$

с последующим решением двух двучленных уравнений $x^2 = y_1$ и $x^2 = y_2$ (y_1 и y_2 - корни соответствующего квадратного уравнения).

Если $y_1 \geq 0$ и $y_2 \geq 0$ то биквадратное уравнение имеет четыре действительных корня: $x_{1,2} = \pm\sqrt{y_1}$ $x_{3,4} = \pm\sqrt{y_2}$

Если $y_1 \geq 0$, $y_2 < 0$, то биквадратное уравнение имеет два действительных корня и два мнимых сопряженных корня:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{y_1} \qquad x_{3,4} = \pm i\sqrt{-y_2}$$

Если $y_1 < 0$ и $y_2 < 0$, то биквадратное уравнение имеет четыре чисто мнимых попарно сопряженных корня:

$$x_{1,2} = \pm i\sqrt{-y_1} \qquad x_{3,4} = \pm i\sqrt{-y_2}$$

Рациональное уравнение

Рациональным алгебраическим уравнением называется уравнение вида $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ (17)

где $P(x)$ и $Q(x)$ - многочлены. Далее для определенности будем полагать, что $P(x)$ - многочлен m-й степени, а $Q(x)$ - многочлен n-й степени.

Множество допустимых значений рационального алгебраического уравнения (17) задается условием $Q(x) \neq 0$ т. е. $x \neq c_1$, $x \neq c_2$, ..., $x \neq c_n$ где c_1, c_2, ..., c_n - корни многочлена $Q(x)$.

Метод решения уравнения (17) заключается в следующем. Решаем уравнение $P(x)$ корни которого обозначим через $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m$.

Сравниваем множества корней многочленов $P(x)$ и $Q(x)$. Если никакой корень многочлена $P(x)$ не является корнем многочлена $Q(x)$, то все корни многочлена $P(x)$ являются корнями уравнения (17). Если какой-нибудь корень многочлена $P(x)$ является корнем многочлена $Q(x)$, то необходимо сравнить их кратности: если кратность корня многочлена $P(x)$ больше кратности корня многочлена $Q(x)$, то этот корень является корнем (17) с кратностью, равной разности кратностей корней делимого и делителя; в противном случае корень многочлена $P(x)$ не является корнем рационального уравнения (17).

П р и м е р. Найдем действительные корни уравнения $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$

где $P(x) = x^4 - 1$, $Q(x) = x - 1$.

Многочлен $P(x)$ имеет два действительных корня (оба простые): $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

Многочлен $Q(x)$ имеет один простой корень $c = 1$. Следовательно, уравнение имеет один действительный корень $x = -1$.

Решая то же самое уравнение в множестве комплексных чисел, получим, что уравнение $\frac{P(x)}{Q(x)} = 0$ имеет, кроме указанного действительного корня, два комплексно сопряженных корня: $x_1 = i$, $x_2 = -i$.

Иррациональное уравнение

Уравнение, содержащее неизвестное (либо рациональное алгебраическое выражение от неизвестного) под знаком радикала, называют *иррациональным уравнением*. В элементарной математике решения иррациональных уравнений отыскивается в множестве действительных чисел.

Приведем некоторые стандартные, наиболее часто применяемые методы решения

I. Одним из самых простых является *метод освобождения от радикалов путем последовательного возведения обеих частей уравнения в соответствующую натуральную степень.* При этом следует иметь в виду, что при возведении обеих частей уравнения в нечетную степень полученное уравнение, эквивалентное исходному, а при возведении обеих частей уравнения в четную степень полученное уравнение будет, вообще говоря, неэквивалентным исходному уравнению. В этом легко убедиться, возведя обе части уравнения

$$f(x)=g(x)$$

в любую четную степень. В результате этой операции получается уравнение

$$[f(x)]^{2n}=[g(x)]^{2n}$$

множество решений которого представляет собой объединение множество решений:

$$f(x)=g(x) \qquad f(x)=-g(x)$$

- *Способ введения новых неизвестных,* относительно которых получается либо более простое иррациональное уравнение, либо рациональное уравнение.

<u>Решить иррациональное уравнение:</u>

$$(3-x)\cdot\sqrt[3]{\frac{3-x}{x-1}}+(x-1)\cdot\sqrt[3]{\frac{x-1}{3-x}}=2$$

Множество допустимых значений этого уравнения:

$$x \in (-\infty; 1) \cup (1; 3) \cup (3; +\infty)$$

Положив , $\sqrt[3]{\frac{3-x}{x-1}} = y$ после подстановки получим уравнение

$$(3-x)y + \frac{x-1}{y} = 2$$

или эквивалентное ему уравнение $(3-x)y^2 - 2y + x - 1 = 0$

которое можно рассматривать как квадратное уравнение относительно у. Решая это уравнение, получим

$$y_1 = 1 \qquad y_2 = \frac{x-1}{3-x}$$

Следовательно, множество решений исходного иррационального уравнения представляет собой объединение множеств решений следующих двух уравнений:

$$\sqrt[3]{\frac{3-x}{x-1}} = 1 \qquad \sqrt[3]{\frac{3-x}{x-1}} = \frac{x-1}{3-x}$$

Возведя обе части каждого из этих уравнений в куб, получим два рациональных алгебраических уравнения:

$$\frac{3-x}{x-1} = 1 \qquad \frac{3-x}{x-1} = \left(\frac{x-1}{3-x}\right)^3$$

Решая эти уравнения, находим, что данное иррациональное уравнение имеет единственный корень $x=2$.

В заключение заметим, что при решении иррациональных уравнений не следует начинать решение уравнения с возведения обеих частей уравнений в натуральную степень, пытаясь свести решение иррационального уравнения к решению рационального алгебраического уравнения. Сначала необходимо посмотреть, нельзя ли сделать какое-нибудь тождественное преобразование уравнения, которое может существенно упростить его решение.

Заключение

Математика, как и любая другая наука не стоит на месте, вместе с развитием общества меняются и взгляды людей, возникают новые мысли и идеи. И XX век не стал в этом смысле исключением. Появление компьютеров внесло свои корректировки в способы решения уравнений и значительно их облегчило. Но компьютер не всегда может быть под рукой (экзамен, контрольная), поэтому знание хотя бы самых главных способов решения уравнений необходимо. Использование уравнений в повседневной жизни – редкость. Они нашли свое применение во многих отраслях хозяйства и практически во всех новейших технологиях.

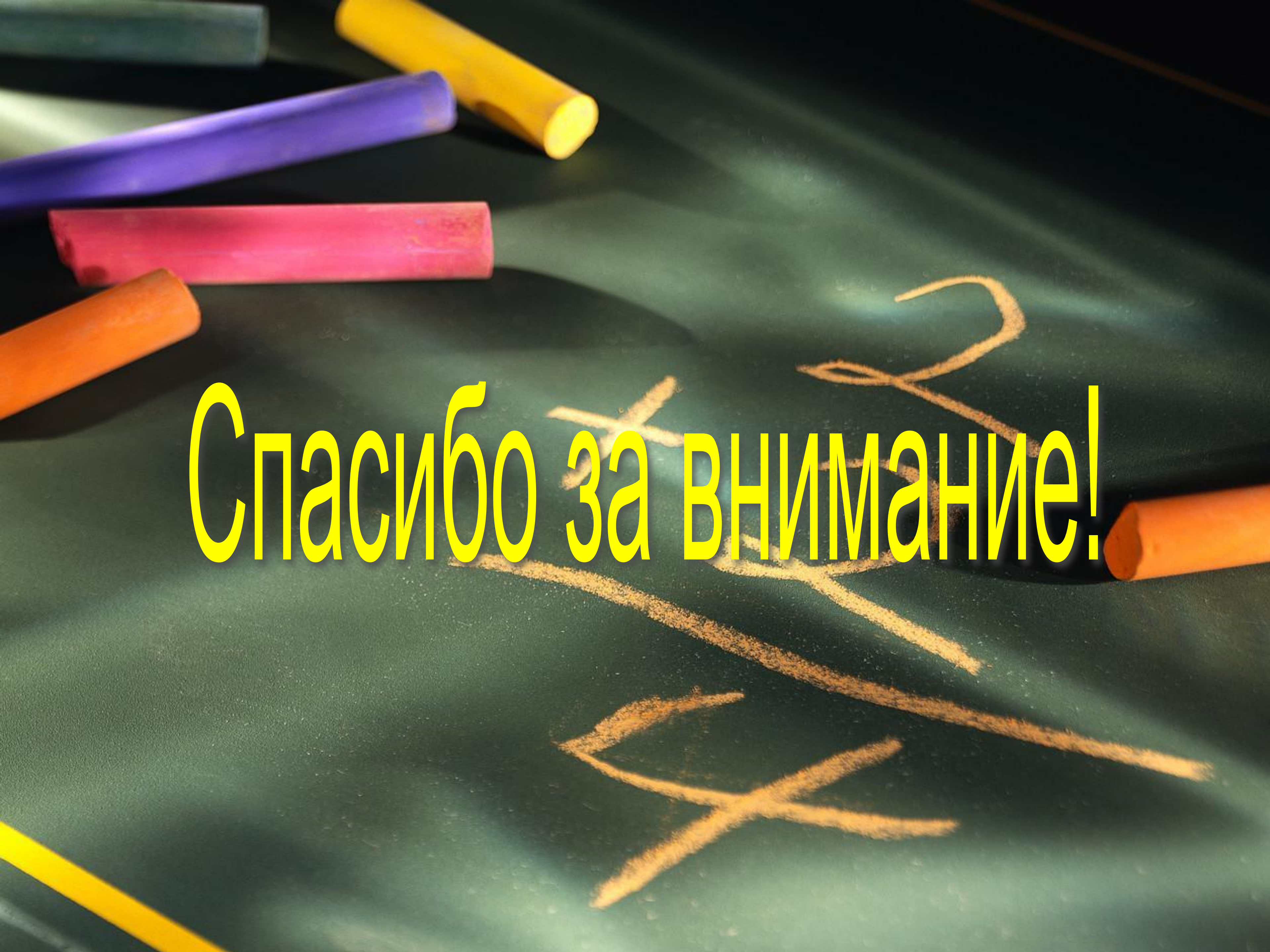
В данной работе были представлены далеко не все, способы решения уравнений и даже не все их виды, а только самые основные. Мы надеемся, что наша работа может послужить неплохим справочным материалом при решении тех или иных уравнений для старших классов. В заключении хотелось бы отметить, что при написании данного работы мы не ставили себе цели показать все виды уравнений.

Общие выводы по работе

1. Математика содержит множество способов и подходов к решению уравнений.
2. В школьном курсе чаще используются:
 квадратное, линейное, рациональные
 алгебраические и другие уравнения.
3. Из опыта решения уравнений мы установили что решение конкретного вида уравнений предполагает использование как одного, так и нескольких способов его решения.

Список использованной литературы

1. Глав. ред. М. Д. Аксенова. Энциклопедия для детей. Том 11. Математика. – М.: Аванта+, 1998. – 688 с.
2. Цыпкин А. Г. Под ред. С. А. Степанова. Справочник по математике для средней школы. – М.: Наука, 1980.- 400 с.
3. Г. Корн и Т. Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1970.- 720 с.


Спасибо за внимание!