Лекция 3

Прогрессии

Повторение. Основные формулы арифметической прогрессии

Арифметическая прогрессия – это последовательность $\{a_n\}$, заданная таким образом:

$$a_1 = a; \quad \boxed{a_{n+1} = a_n + d} \qquad n \in N$$

Рекуррентная формула

Свойство 1.

$$\boxed{a_n = a_1 + d \cdot (n-1)}$$

Формула n – ного члена

$$\boxed{S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n}$$

Формула суммы арифметической прогрессии

Основные формулы арифметической прогрессии

Свойство 2.

Если $n + m = k + p$, то $a_n + a_m = a_k + a_p$

Пример: $a_{30} + a_{20} = a_{25} + a_{25} = a_{28} + a_{22} = a_{10} + a_{40} =$

$a_5 + a_{45} = a_{13} + a_{37} = a_{32} + a_{18} = a_1 + a_{49}$

Продолжить последовательности

а) 3, 10, 17, 24, ...

б) 100, 80, 60, 40, ...

в) 1 , 11, 111, 1111,…….

г) 1, 2, 4, 8, 16,…….

д) 1 , 10, 100, …….

е) 1, 3, 9, ……..

ж) 500, 100, 20, ...

Геометрическая прогрессия

Геометрическая прогрессия – это последовательность $\{b_n\}$,

заданная таким образом:

$$b_1 = b; \qquad b_{n+1} = b_n \cdot q, \qquad n \in N\,, \qquad \text{где } b \neq 0, q \neq 0.$$

Геометрическая прогрессия – это последовательность, каждый элемент которой, кроме первого, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число $q \neq 0$.

Как называется такой способ задания прогрессии?

Рекуррентная формула геометрической прогрессии:

$$b_1 = b; \quad b_{n+1} = b_n \cdot q, \quad n \in N, \quad \text{где } b \neq 0, \quad q \neq 0.$$

ПРИМЕР
Ы:

$2, 8, 32, 128, 512, \ldots;$ $\quad b_1 = 2; \quad b_{n+1} = b_n \cdot 4; \quad q = 4;$

$2, -8, 32, -128, 512$ $\quad b_1 = 2; b_{n+1} = b_n \cdot (-4); \quad q = -4;$

$27, 9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots;$ $\quad b_1 = 27; b_{n+1} = b_n \cdot \left(\frac{1}{3}\right); \quad q = \frac{1}{3};$

$8, 8, 8, 8, \ldots;$ $\quad b_1 = 8; b_{n+1} = b_n \cdot 1; \quad q = 1;$

Если геометрическую прогрессию оборвать на каком-то k - м элементе, получим конечную геометрическую прогрессию $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_k$.

Свойства геометрической прогрессии

1. Пусть $\{b_n\}$ - геометрическая прогрессия; тогда ее n - й элемент можно задать

формулой $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

Доказательство: Метод математической индукции. Шаг 1. $b_1 = b_1 \cdot 1 = b_1 \cdot q^0 = b_1 \cdot q^{1-1}$;

$$b_2 = b_1 \cdot q = b_1 \cdot q^1 = b_1 \cdot q^{2-1};$$

$$b_3 = b_2 \cdot q = b_1 \cdot q \cdot q = b_1 \cdot q^2 = b_1 \cdot q^{3-1};$$

$$b_4 = b_3 \cdot q = b_1 \cdot q^2 \cdot q = b_1 \cdot q^3 = b_1 \cdot q^{4-1};$$

...

$$b_k = b_{k-1} \cdot q = b_1 \cdot q^{k-2} \cdot q = b_1 \cdot q^{k-2+1} = b_1 \cdot q^{k-1}$$

Шаг 2. дано: при $n = k$ $b_k = b_1 \cdot q^{k-1}$

доказать: $b_{k+1} = b_1 \cdot q^{k+1-1} = b_1 \cdot q^k$.

Доказательство: по определению геометрической прогрессии

$$b_{k+1} = b_k \cdot q \Rightarrow b_{k+1} = b_1 \cdot q^{k-1} \cdot q \Rightarrow b_{k+1} = b_1 \cdot q^{k-1+1} = b_1 \cdot q^k, \text{ч. т. д.}$$

Формула n-ного члена геометрической прогресии: $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$

ПРИМЕР : $\{b_n\}$ - геометрическая прогрессия 2, 8, 32, 128, 512,…;

$b_1 = 2;\ q = 4$

Найти: b_5 , b_8

$b_5 = b_1 \cdot q^4 = 2 \cdot 4^4 = 512;$ $b_8 = b_1 \cdot q^7 = 2 \cdot 4^7 = 32\,768;$

Свойство 2. Формула суммы n элементов геометрической прогрессии

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Доказательство: $S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_{n-2} + b_{n-1} + b_n;$

по свойству 1 $\quad S_n = b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + \cdots + b_1 \cdot q^{n-3} + b_1 \cdot q^{n-2} + b_1 \cdot q^{n-1} \qquad (*)$

Умножим обе части равенства $(*)$ на q :

$$S_n \cdot q = (b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + \cdots + b_1 \cdot q^{n-3} + b_1 \cdot q^{n-2} + b_1 \cdot q^{n-1}) \cdot q$$

Раскроем скобки:

$$S_n \cdot q = b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + b_1 \cdot q^3 + \cdots + b_1 \cdot q^{n-2} + b_1 \cdot q^{n-1} + b_1 \cdot q^n \qquad (**)$$

Вычтем из равенства $(*)$ равенство $(**)$:

$$S_n - S_n \cdot q = b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + \cdots + b_1 \cdot q^{n-3} + b_1 \cdot q^{n-2} + b_1 \cdot q^{n-1} -$$

$$-(b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + b_1 \cdot q^3 + \cdots + b_1 \cdot q^{n-2} + b_1 \cdot q^{n-1} + b_1 \cdot q^n);$$

После раскрытия скобок в правой части члены с одинаковыми степенями взаимно уничтожатся, в левой части S_n вынесем за скобки и получим:

$$S_n(1 - q) = b_1 - b_1 \cdot q^n; \quad S_n(1 - q) = b_1(1 - q^n); \qquad S_n = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}, \text{ч. т. д.}$$

Задача 1(Г). Найти сумму первых пяти элементов S_5 геометрических прогрессий, приведенных в примере:

а) $2, 8, 32, 128, 512, \dots;$

б) $2, -8, 32, -128, 512, \dots;$

в) $27, 9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots;$

г) $8, 8, 8, 8, \dots;$

РЕШЕНИЕ:

Формула суммы n элементов геометрической прогрессии:

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n = \sum_{i=1}^{n} b_i = b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

для $n = 5$ имеет вид: $S_5 = b_1 \cdot \frac{1-q^5}{1-q}$

а) $b_1 = 2; q = 4;$ $S_5 = b_1 \cdot \frac{1-q^5}{1-q} = 2 \cdot \frac{1-4^5}{1-4} = 2 \cdot \frac{1-1024}{-3} = 682;$

б) $b_1 = 2; q = -4;$ $S_5 = b_1 \cdot \frac{1-q^5}{1-q} = 2 \cdot \frac{1-(-4)^5}{1-(-4)} = 2 \cdot \frac{1+1024}{5} = 410;$

в) $b_1 = 27; q = \frac{1}{3};$ $S_5 = b_1 \cdot \frac{1-q^5}{1-q} = 27 \cdot \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^5}{1-\frac{1}{3}} = 27 \cdot \frac{1-\frac{1}{3^5}}{\frac{2}{3}} = \frac{27 \cdot (243-1) \cdot 3}{2 \cdot 243} = \frac{121}{3}.$

г) $b_1 = 8; q = 1;$ $S_5 = 8 \cdot 5 = 40.$

ВОПРОС: почему не использовали формулу $S_5 = b_1 \frac{1-q^5}{1-q}$?

Задача 2(Г). Найти сумму первых десяти элементов S_{10} геометрической прогрессии, у которой $b_2 + b_6 = 34$, $b_3 + b_7 = 68$.

РЕШЕНИЕ:

по формуле n - го элемента геометрической прогрессии $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

$$b_2 = b_1 \cdot q, \quad b_6 = b_1 \cdot q^5; \quad b_3 = b_1 \cdot q^2, \quad b_7 = b_1 \cdot q^6.$$

используем условия задачи:

$$\begin{cases} b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^5 = 34; \\ b_1 \cdot q^2 + b_1 \cdot q^6 = 68. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 \cdot q(1 + q^4) = 34; \\ b_1 \cdot q^2(1 + q^4) = 68. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} b_1 \cdot q(1 + q^4) = 34; \\ b_1 \cdot q \cdot q\,(1 + q^4) = 68. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 \cdot q(1 + q^4) = 34; \\ q \cdot b_1 \cdot q\,(1 + q^4) = 68. \end{cases} \Rightarrow$$

$q \cdot 34 = 68 \quad \Rightarrow \quad q = 2$, подставим в первое уравнение и найдем b_1:

$$b_1 \cdot q(1 + q^4) = 34 \Rightarrow b_1 \cdot 2(1 + 2^4) = 34 \Rightarrow b_1 \cdot 34 = 34; b_1 = 1.$$

$$S_{10} = b_1 \cdot \frac{1 - q^{10}}{1 - q} = 1 \cdot \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = 1023.$$

ОТВЕТ: 1023 .