

Лекция 3

Прогрессии

Повторение. Основные формулы арифметической прогрессии

Арифметическая прогрессия – это последовательность $\{a_n\}$, заданная таким образом:

$$a_1 = a; \quad a_{n+1} = a_n + d \quad n \in N$$

Рекуррентная
формула

Свойство
1.

$$a_n = a_1 + d \cdot (n - 1)$$

Формула n – ного
члена

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Формула суммы
арифметической
прогрессии

Основные формулы арифметической прогрессии

Свойство
2.

Если $n + m = k + p$, то

$$a_n + a_m = a_k + a_p$$

Пример: $a_{30} + a_{20} = a_{25} + a_{25} = a_{28} + a_{22} = a_{10} + a_{40} =$
 $a_5 + a_{45} = a_{13} + a_{37} = a_{32} + a_{18} = a_1 + a_{49}$

Продолжить последовательности

а) 3, 10, 17, 24,

б) 100, 80, 60, 40,

в) 1, 11, 111, 1111,

г) 1, 2, 4, 8, 16,

д) 1, 10, 100,

е) 1, 3, 9,

ж) 500, 100, 20,

Геометрическая прогрессия

Геометрическая прогрессия – это последовательность $\{b_n\}$,
заданная таким образом:

$$b_1 = b; \quad b_{n+1} = b_n \cdot q, \quad n \in N, \quad \text{где } b \neq 0, q \neq 0.$$

Геометрическая прогрессия – это последовательность, каждый элемент которой, кроме первого, равен предыдущему, умноженному на одно и то же число $q \neq 0$.

Как называется такой способ задания прогрессии?

Рекуррентная формула геометрической прогрессии:

$$b_1 = b; \quad b_{n+1} = b_n \cdot q, \quad n \in N, \quad \text{где } b \neq 0, \quad q \neq 0.$$

ПРИМЕР

Ы:

2, 8, 32, 128, 512, ...;

$$b_1 = 2; \quad b_{n+1} = b_n \cdot 4; \quad q = 4;$$

2, -8, 32, -128, 512, ...;

$$b_1 = 2; \quad b_{n+1} = b_n \cdot (-4); \quad q = -4;$$

27, 9, 3, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{27}$, ...;

$$b_1 = 27; \quad b_{n+1} = b_n \cdot \left(\frac{1}{3}\right); \quad q = \frac{1}{3};$$

8, 8, 8, 8, ...;

$$b_1 = 8; \quad b_{n+1} = b_n \cdot 1; \quad q = 1;$$

Если геометрическую прогрессию оборвать на каком-то k - м элементе, получим конечную геометрическую прогрессию $b_1, b_2, b_3, \dots, b_k$.

Свойства геометрической прогрессии

1. Пусть $\{b_n\}$ - геометрическая прогрессия; тогда ее n - й элемент можно задать формулой

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

Доказательств Метод математической индукции. Шаг 1. $b_1 = b_1 \cdot 1 = b_1 \cdot q^0 = b_1 \cdot q^{1-1}$;
о:

$$b_2 = b_1 \cdot q = b_1 \cdot q^1 = b_1 \cdot q^{2-1};$$

$$b_3 = b_2 \cdot q = b_1 \cdot q \cdot q = b_1 \cdot q^2 = b_1 \cdot q^{3-1};$$

$$b_4 = b_3 \cdot q = b_1 \cdot q^2 \cdot q = b_1 \cdot q^3 = b_1 \cdot q^{4-1};$$

...

$$b_k = b_{k-1} \cdot q = b_1 \cdot q^{k-2} \cdot q = b_1 \cdot q^{k-2+1} = b_1 \cdot q^{k-1}$$

Шаг 2. дано: при $n = k$ $b_k = b_1 \cdot q^{k-1}$

доказать: $b_{k+1} = b_1 \cdot q^{k+1-1} = b_1 \cdot q^k$.

Доказательство: по определению геометрической прогрессии

$$b_{k+1} = b_k \cdot q \Rightarrow b_{k+1} = b_1 \cdot q^{k-1} \cdot q \Rightarrow b_{k+1} = b_1 \cdot q^{k-1+1} = b_1 \cdot q^k, \text{ ч. т. д.}$$

Формула n-ного члена геометрической прогрессии:

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$$

ПРИМЕР : $\{b_n\}$ - геометрическая прогрессия 2, 8, 32, 128, 512,...;

$$b_1 = 2; q = 4$$

Найти: b_5 , b_8

$$b_5 = b_1 \cdot q^4 = 2 \cdot 4^4 = 512; \quad b_8 = b_1 \cdot q^7 = 2 \cdot 4^7 = 32768;$$

Свойство 2. Формула суммы n элементов геометрической прогрессии

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Доказательств $S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_{n-2} + b_{n-1} + b_n$;

о:

по свойству 1
$$S_n = b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + \dots + b_1 \cdot q^{n-3} + b_1 \cdot q^{n-2} + b_1 \cdot q^{n-1} \quad (*)$$

Умножим обе части равенства (*) на q :

$$S_n \cdot q = (b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + \dots + b_1 \cdot q^{n-3} + b_1 \cdot q^{n-2} + b_1 \cdot q^{n-1}) \cdot q$$

Раскроем скобки

$$S_n \cdot q = b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + b_1 \cdot q^3 + \dots + b_1 \cdot q^{n-2} + b_1 \cdot q^{n-1} + b_1 \cdot q^n \quad (**)$$

Вычтем из равенства (*) равенство (**):

$$S_n - S_n \cdot q = b_1 + b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + \dots + b_1 \cdot q^{n-3} + b_1 \cdot q^{n-2} + b_1 \cdot q^{n-1} - \\ - (b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^2 + b_1 \cdot q^3 + \dots + b_1 \cdot q^{n-2} + b_1 \cdot q^{n-1} + b_1 \cdot q^n);$$

После раскрытия скобок в правой части члены с одинаковыми степенями взаимно уничтожатся, в левой части S_n вынесем за скобки и получим:

$$S_n(1 - q) = b_1 - b_1 \cdot q^n; \quad S_n(1 - q) = b_1(1 - q^n); \quad S_n = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}, \text{ ч. т. д.}$$

Задача 1(Г). Найти сумму первых пяти элементов S_5 геометрических прогрессий,

приведенных в примере: $2, 8, 32, 128, 512, \dots$; а)

$2, -8, 32, -128, 512, \dots$; б)

$27, 9, 3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \dots$; в) $8, 8, 8, 8, \dots$; г)

РЕШЕНИЕ
Формула суммы n элементов геометрической прогрессии:

Е:

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n = \sum_{i=1}^n b_i = b_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

для $n = 5$ имеет вид: $S_5 = b_1 \cdot \frac{1 - q^5}{1 - q}$

$b_1 = 2; q = 4$ а) $S_5 = b_1 \cdot \frac{1 - q^5}{1 - q} = 2 \cdot \frac{1 - 4^5}{1 - 4} = 2 \cdot \frac{1 - 1024}{-3} = 682;$

$b_1 = 2; q = -4$ б) $S_5 = b_1 \cdot \frac{1 - q^5}{1 - q} = 2 \cdot \frac{1 - (-4)^5}{1 - (-4)} = 2 \cdot \frac{1 + 1024}{5} = 410;$

$b_1 = 27; q = \frac{1}{3}$ в) $S_5 = b_1 \cdot \frac{1 - q^5}{1 - q} = 27 \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^5}{1 - \frac{1}{3}} = 27 \cdot \frac{1 - \frac{1}{3^5}}{\frac{2}{3}} = \frac{27 \cdot (243 - 1) \cdot 3}{2 \cdot 243} = \frac{121}{3}.$

$b_1 = 8; q = 1$ г) $S_5 = 8 \cdot 5 = 40.$

ВОПРОС: почему не использовать формулу $S_5 = b_1 \cdot \frac{1 - q^5}{1 - q}$?

Задача 2(Г). Найти сумму первых десяти элементов S_{10} геометрической прогрессии, у которой $b_2 + b_6 = 34, b_3 + b_7 = 68$.

РЕШЕНИЕ
по формуле n -го элемента геометрической прогрессии $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$.

Е:

$$b_2 = b_1 \cdot q, \quad b_6 = b_1 \cdot q^5; \quad b_3 = b_1 \cdot q^2, \quad b_7 = b_1 \cdot q^6.$$

используем условия

задачи:

$$\begin{cases} b_1 \cdot q + b_1 \cdot q^5 = 34; \\ b_1 \cdot q^2 + b_1 \cdot q^6 = 68. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 \cdot q(1 + q^4) = 34; \\ b_1 \cdot q^2(1 + q^4) = 68. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} b_1 \cdot q(1 + q^4) = 34; \\ b_1 \cdot q \cdot q(1 + q^4) = 68. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_1 \cdot q(1 + q^4) = 34; \\ q \cdot b_1 \cdot q(1 + q^4) = 68. \end{cases} \Rightarrow$$

$q \cdot 34 = 68 \Rightarrow q = 2$, подставим в первое уравнение и найдем b_1 :

$$b_1 \cdot q(1 + q^4) = 34 \Rightarrow b_1 \cdot 2(1 + 2^4) = 34 \Rightarrow b_1 \cdot 34 = 34; b_1 = 1.$$

$$S_{10} = b_1 \cdot \frac{1 - q^{10}}{1 - q} = 1 \cdot \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = 1023.$$

ОТВЕТ: 1023.