степенная функция

$$y = x^p,$$

Вы знакомы с функциями $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \frac{1}{x}$ и т. д.

$\boxed{y = x^p,}$ - степенная функция

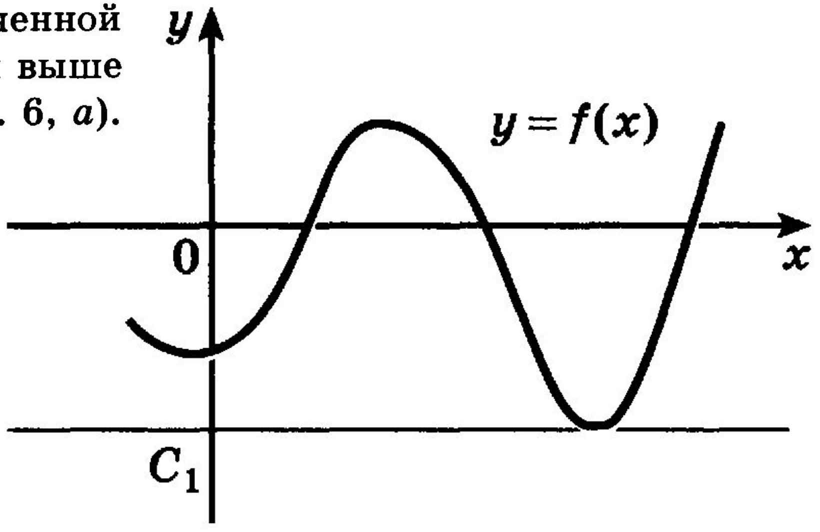
где p — заданное действительное число.

Познакомимся с некоторыми свойствами функций, которыми обладают, в частности, отдельные степенные функции.

Ограниченность функции

Функция $y = f(x)$, определённая на множестве X, называется *ограниченной снизу* на множестве X, если существует число C_1 такое, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \geqslant C_1$.

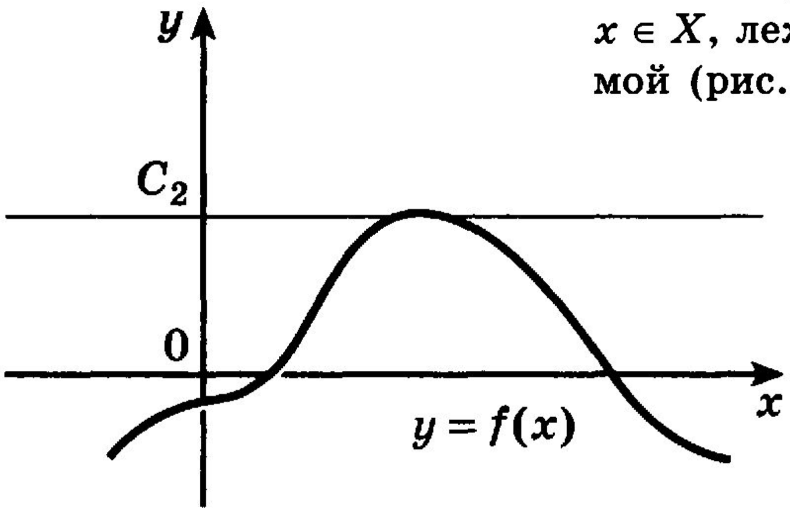
Это означает, что все точки графика ограниченной снизу функции $y = f(x)$, $x \in X$ расположены выше прямой $y = C_1$ или на этой прямой (рис. 6, *а*).



а)

Рис. 6

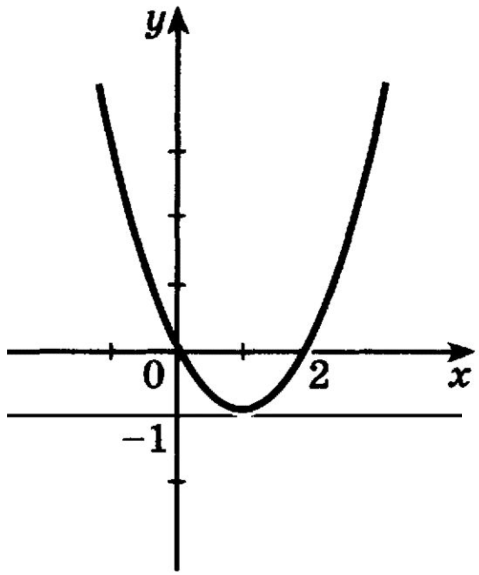
Функция $y = f(x)$, определённая на множестве X, называется *ограниченной сверху* на множестве X, если существует число C_2 такое, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \leqslant C_2$.



б)

В этом случае все точки графика функции $y = f(x)$, $x \in X$, лежат ниже прямой $y = C_2$ или на этой прямой (рис. 6, *б*).

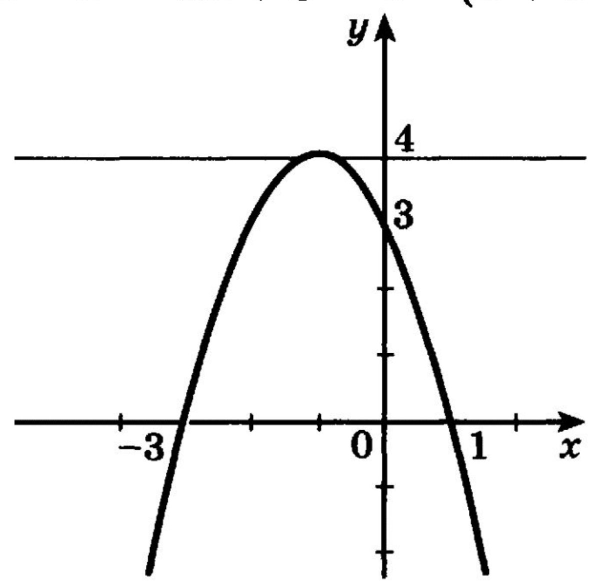
Например: 1) функция $y = x^2 - 2x$ является ограниченной снизу, так как $x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1 \geqslant -1$



а)

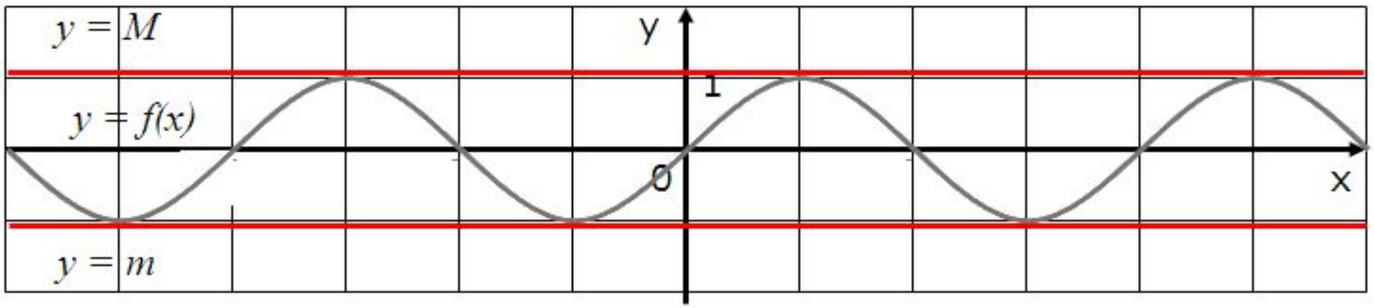
Рис. 7

2) функция $y = -x^2 - 2x + 3$ ограничена сверху, так как $-x^2 - 2x + 3 = 4 - (x + 1)^2 \leqslant 4$



б)

Функцию, ограниченную и сверху, и снизу на множестве X, называют *ограниченной* на этом множестве.



$$m < f(x) < M$$

f(x) –ограниченная функция

Наименьшее и наибольшее значение функции

Если существует такое значение x_0 из области определения X функции $y = f(x)$, что для любого x из этой области справедливо неравенство $f(x) \geqslant f(x_0)$, то говорят, что функция $y = f(x)$ принимает наименьшее значение $y_0 = f(x_0)$ при $x = x_0$.

Если существует такое значение x_0 из области определения X функции $y = f(x)$, что для любого $x \in X$ справедливо неравенство $f(x) \leqslant f(x_0)$, то говорят, что функция $y = f(x)$ принимает наибольшее значение $y_0 = f(x_0)$ при $x = x_0$.

1. Показатель $p = 2n$ — чётное натуральное число.

В этом случае степенная функция $y = x^{2n}$, где n — натуральное число, обладает следующими свойствами:

— область определения — все действительные числа, т. е. множество $\boldsymbol{R}$;
— множество значений — неотрицательные числа, т. е. $y \geqslant 0$;
— функция $y = x^{2n}$ чётная, так как $(-x)^{2n} = x^{2n}$;
— функция является убывающей на промежутке $x \leqslant 0$ и возрастающей на промежутке $x \geqslant 0$;
— функция ограничена снизу;
— функция принимает наименьшее значение $y = 0$ при $x = 0$.

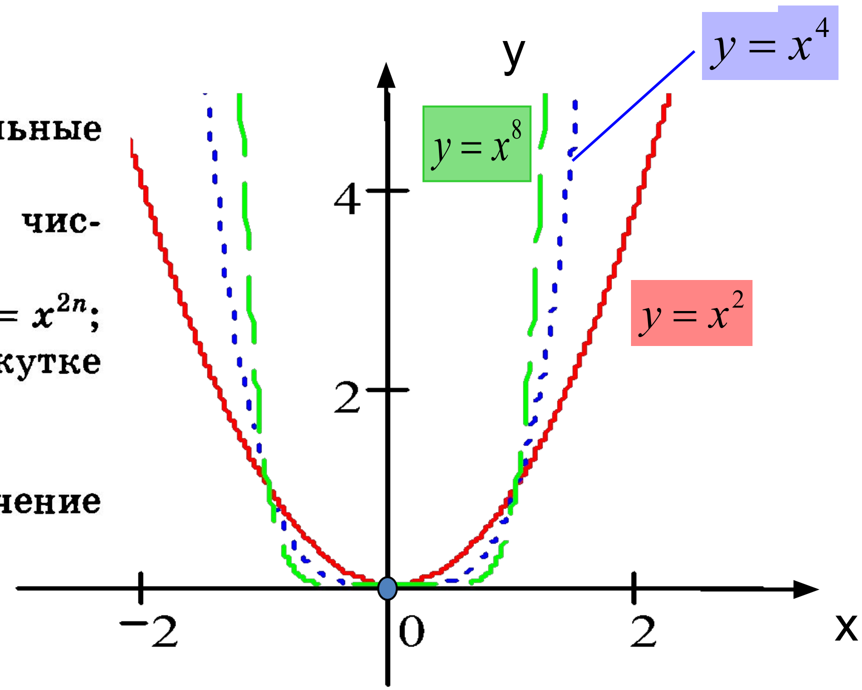


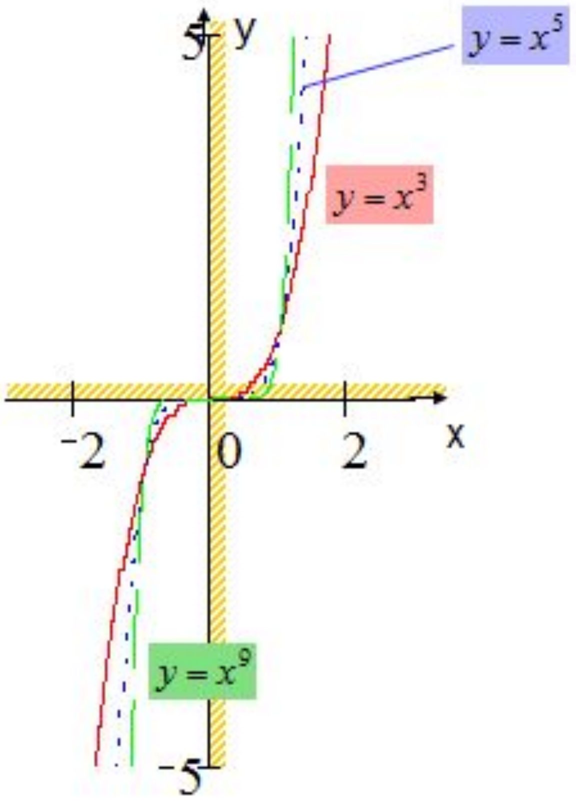
График функции $y = x^{2n}$

2. Показатель $p = 2n - 1$ — нечётное натуральное число.

График функции $y = x^{2n-1}$

В этом случае степенная функция $y = x^{2n-1}$, где n — натуральное число, обладает следующими свойствами:

— область определения — множество $\boldsymbol{R}$;
— множество значений — множество $\boldsymbol{R}$;
— функция $y = x^{2n-1}$ нечётная, так как $(-x)^{2n-1} = -x^{2n-1}$;
— функция является возрастающей на всей действительной оси;
— функция не является ограниченной;
— функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения.

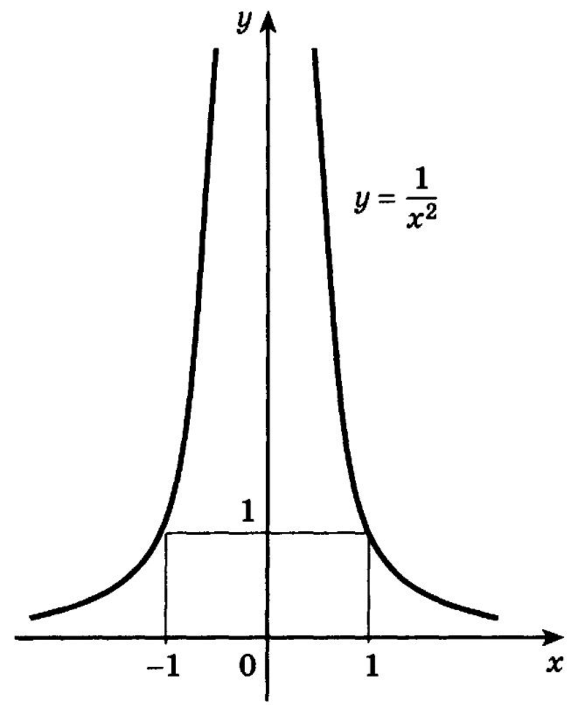


3. Показатель $p = -2n$, где n — натуральное число.

В этом случае степенная функция $y = x^{-2n} = \dfrac{1}{x^{2n}}$

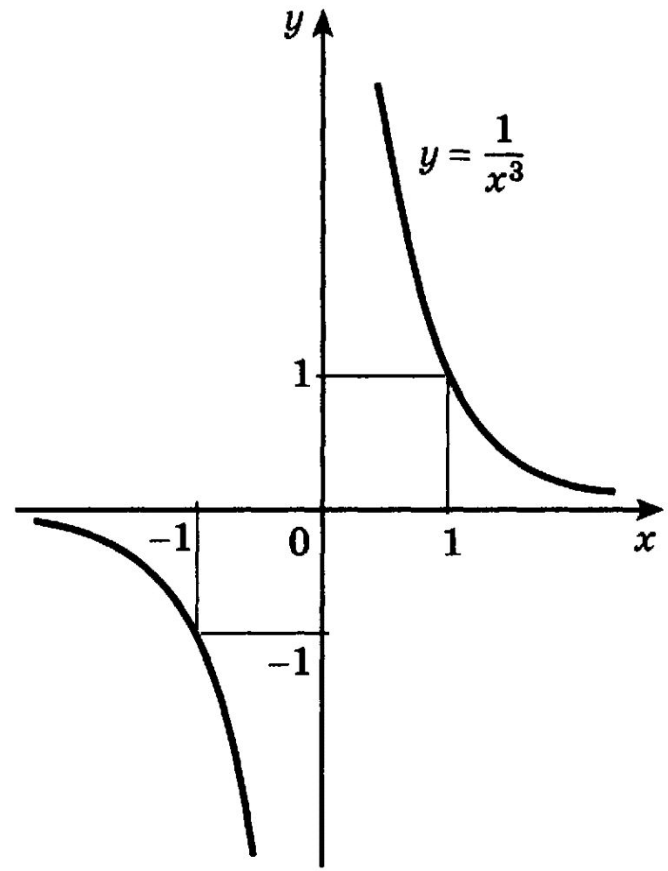
обладает следующими свойствами:

— область определения — множество $\boldsymbol{R}$, кроме $x = 0$;
— множество значений — положительные числа $y > 0$;
— функция $y = \dfrac{1}{x^{2n}}$ чётная, так как $\dfrac{1}{(-x)^{2n}} = \dfrac{1}{x^{2n}}$;
— функция является возрастающей на промежутке $x < 0$ и убывающей на промежутке $x > 0$;
— функция ограничена снизу;
— функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения.



4. Показатель $p = -(2n-1)$, где n — натуральное число.

В этом случае степенная функция $y = x^{-(2n-1)} = \frac{1}{x^{2n-1}}$, где $n \in N$, обладает следующими свойствами:



— область определения — множество R, кроме $x = 0$;
— множество значений — множество R, кроме $y = 0$;
— функция $y = \frac{1}{x^{2n-1}}$ нечётная, так как $\frac{1}{(-x)^{2n-1}} = -\frac{1}{x^{2n-1}}$;
— функция является убывающей на промежутках $x < 0$ и $x > 0$;
— функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения.

5*. Показатель p — положительное действительное нецелое число.

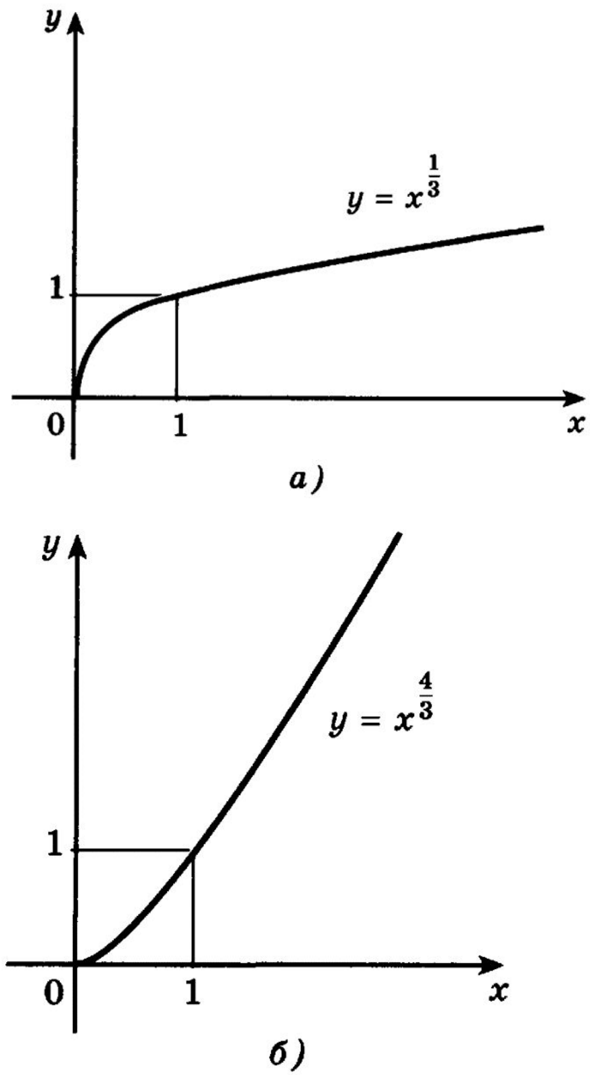


Рис. 11

В этом случае функция $y = x^p$ обладает следующими свойствами:

— область определения — множество неотрицательных чисел $x \geqslant 0$;
— множество значений — множество неотрицательных чисел $y \geqslant 0$;
— функция является возрастающей на промежутке $x \geqslant 0$;
— функция не является ни чётной, ни нечётной;
— функция ограничена снизу;
— функция принимает наименьшее значение $y = 0$ при $x = 0$.

6*. Показатель p — отрицательное действительное нецелое число.

В этом случае функция $y = x^p$ обладает следующими свойствами:

— область определения — множество положительных чисел $x > 0$;
— множество значений — множество положительных чисел $y > 0$;
— функция является убывающей на промежутке $x > 0$;
— функция не является ни чётной, ни нечётной;
— функция ограничена снизу.

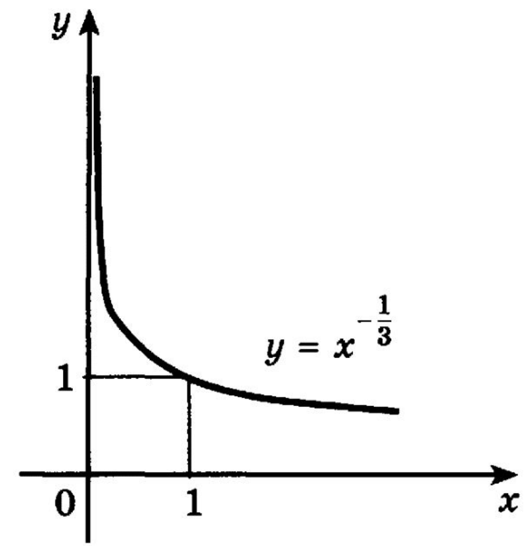


Рис. 12

№ 119.

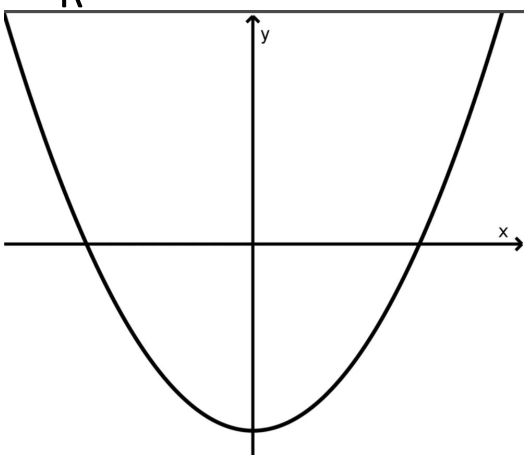
Изобразить схематически график функции и указать её область определения и множество значений; выяснить, является ли функция ограниченной сверху (снизу):

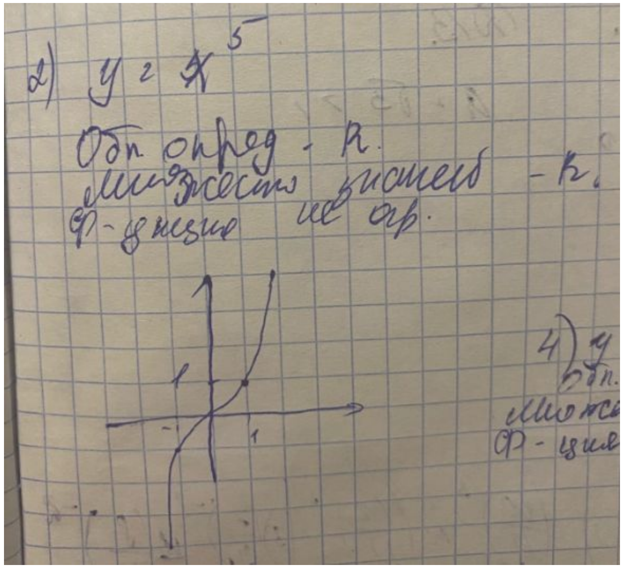
1) $y = x^6$; **2)** $y = x^5$; **3)** $y = x^7$;

4) $y = x^{-2}$; **5)** $y = x^{-3}$; **6)** $y = x^6$.

1)Область определения - R

Область значения - R



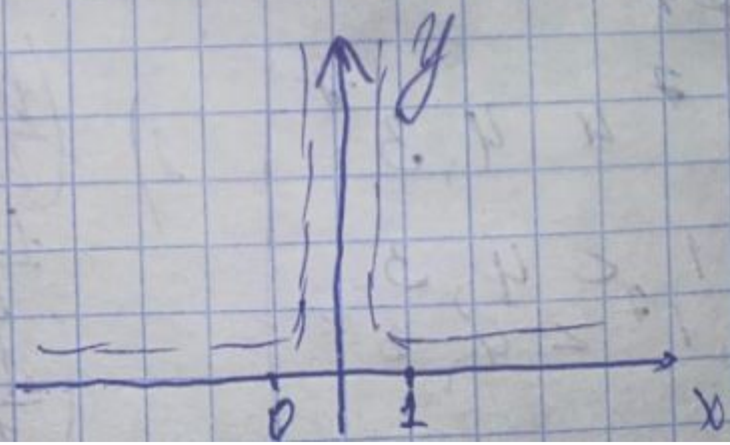


4) $y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$

Обл. опр. – R – кроме $x = 0$.

Множество значений – полож. $y > 0$.

Ф-ция ограничена снизу



Решаем из учебника:

122 Пользуясь свойствами степенной функции, сравнить с единицей:

1) $4{,}1^{12}$; 2) $0{,}2^{3}$; 3) $0{,}7^{9}$; 4) $(\sqrt{3})^{22}$; 5) $1{,}3^{-2}$; 6) $0{,}8^{-1}$.

1) $4{,}1^{12}$

$y(4{,}1) > y(1)$

$4{,}1^{12} > 1^{12}$

$4{,}1^{12} > 1$

3) $0{,}7^{9}$

$y(0{,}7) < y(1)$

$0{,}7^{9} < 1^{9}$

$0{,}7 < 1$.

4) $(\sqrt{3})^{22} = 3^{\frac{22}{2}} = 3^{11}$

$y(3) > y(1)$

$3^{11} > 1^{11}$

$3 > 1$

124 Сравнить значения выражений:

1) $3{,}1^7$ и $4{,}3^7$;

2) $\left(\frac{10}{11}\right)^3$ и $\left(\frac{12}{11}\right)^3$;

3) $0{,}3^8$ и $0{,}2^8$;

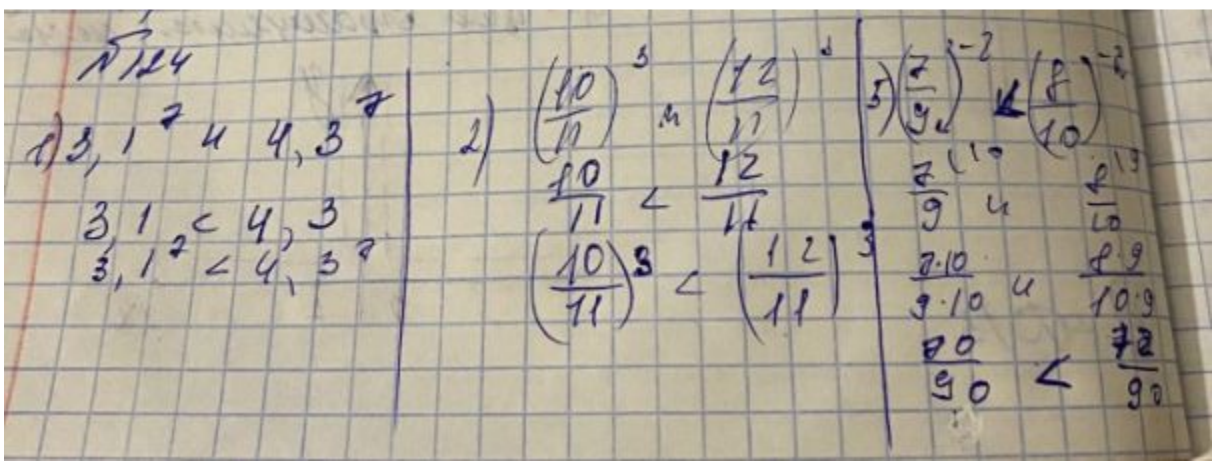
4) $2{,}5^2$ и $2{,}6^2$;

5) $\left(\frac{7}{9}\right)^{-2}$ и $\left(\frac{8}{10}\right)^{-2}$;

6) $\left(\frac{14}{15}\right)^{-6}$ и $\left(\frac{15}{16}\right)^{-6}$;

7) $(4\sqrt{3})^{-3}$ и $(3\sqrt{4})^{-3}$;

8) $(2\sqrt[3]{6})^{-5}$ и $(6\sqrt[3]{2})^{-5}$.



№124

1) $3{,}1^7$ и $4{,}3^7$

$3{,}1 < 4{,}3$

$3{,}1^7 < 4{,}3^7$

2) $\left(\frac{10}{11}\right)^3$ и $\left(\frac{12}{11}\right)^3$

$\frac{10}{11} < \frac{12}{11}$

$\left(\frac{10}{11}\right)^3 < \left(\frac{12}{11}\right)^3$

5) $\left(\frac{7}{9}\right)^{-2}$ и $\left(\frac{8}{10}\right)^{-2}$

$\frac{7}{9}$ и $\frac{8}{10}$

$\frac{7\cdot10}{9\cdot10}$ и $\frac{8\cdot9}{10\cdot9}$

$\frac{70}{90} < \frac{72}{90}$

!

Таким образом, при возведении неравенства с положительной левой и положительной правой частями в положительную степень знак неравенства не меняется, а при возведении в отрицательную степень знак неравенства меняется на противоположный.

124 Сравнить значения выражений:

1) $3{,}1^7 < 4{,}3^7$; 2) $\left(\frac{10}{11}\right)^3 < \left(\frac{12}{11}\right)^3$;

3) $0{,}3^8 \quad 0{,}2^8$; 4) $2{,}5^2 \quad 2{,}6^2$;

5) $\left(\frac{7}{9}\right)^{-2} > \left(\frac{8}{10}\right)^{-2}$; 6) $\left(\frac{14}{15}\right)^{-6} \quad \left(\frac{15}{16}\right)^{-6}$;

7) $(4\sqrt{3})^{-3} < (3\sqrt{4})^{-3}$; 8) $(2\sqrt[3]{6})^{-5} \quad (6\sqrt[3]{2})^{-5}$.

ДЗ отправляем до 29.01 до 19:00

Домашнее задание до 29.01:

aturina2020@gmail.com

§11,

- №119(3,5),
- №122(5),
- №124 (4-6).

Атурина Иванян
aturina2020@gmail.com