

Степенная функция

$$y = x^p,$$

.. .. .

Вы знакомы с функциями $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$,
 $y = \frac{1}{x}$ и т. д.

$y = x^p,$ - степенная функция

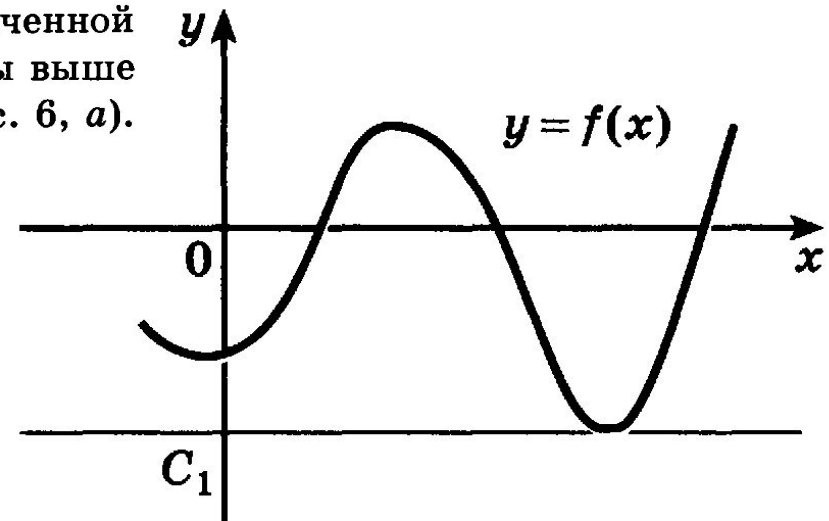
где p — заданное действительное число.

Познакомимся с некоторыми свойствами функций, которыми обладают, в частности, отдельные степенные функции.

Ограниченность функции

Функция $y = f(x)$, определённая на множестве X , называется *ограниченной снизу* на множестве X , если существует число C_1 такое, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \geq C_1$.

Это означает, что все точки графика ограниченной снизу функции $y = f(x)$, $x \in X$ расположены выше прямой $y = C_1$ или на этой прямой (рис. 6, а).

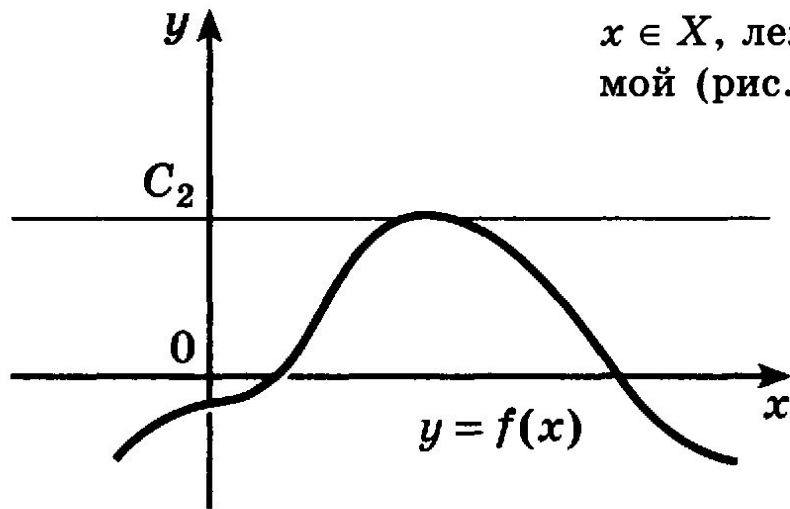


а)

Рис. 6

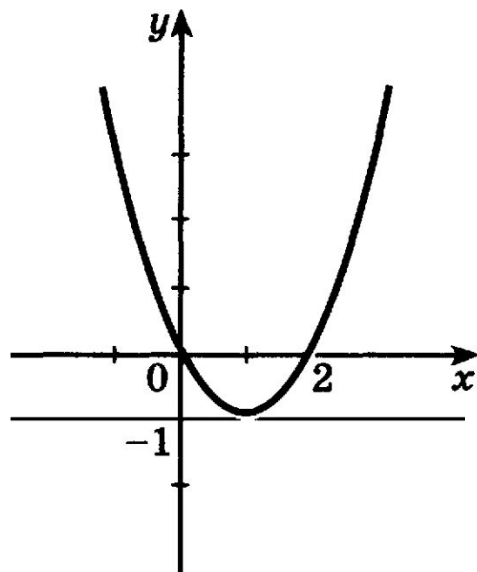
Функция $y = f(x)$, определённая на множестве X , называется *ограниченной сверху* на множестве X , если существует число C_2 такое, что для любого $x \in X$ выполняется неравенство $f(x) \leq C_2$.

В этом случае все точки графика функции $y = f(x)$, $x \in X$, лежат ниже прямой $y = C_2$ или на этой прямой (рис. 6, б).



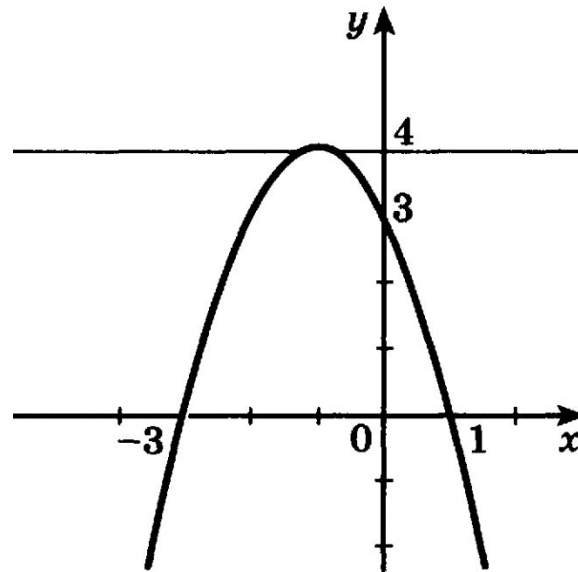
б)

Например: 1) функция $y = x^2 - 2x$ является ограниченной снизу, так как $x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1 \geq -1$



а)

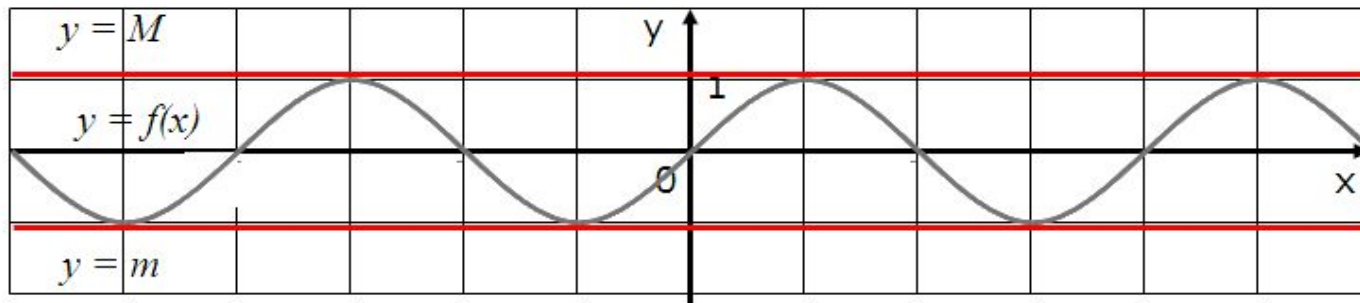
2) функция $y = -x^2 - 2x + 3$ ограничена сверху, так как $-x^2 - 2x + 3 = 4 - (x + 1)^2 \leq 4$



б)

Рис. 7

Функцию, ограниченную и сверху, и снизу на множестве X , называют *ограниченной* на этом множестве.



$$m < f(x) < M$$

$f(x)$ –ограниченная функция

Наименьшее и наибольшее значение функции

Если существует такое значение x_0 из области определения X функции $y = f(x)$, что для любого x из этой области справедливо неравенство $f(x) \geq f(x_0)$, то говорят, что функция $y = f(x)$ принимает наименьшее значение $y_0 = f(x_0)$ при $x = x_0$.

Если существует такое значение x_0 из области определения X функции $y = f(x)$, что для любого $x \in X$ справедливо неравенство $f(x) \leq f(x_0)$, то говорят, что функция $y = f(x)$ принимает наибольшее значение $y_0 = f(x_0)$ при $x = x_0$.

1. Показатель $p = 2n$ — чётное натуральное число.

В этом случае степенная функция $y = x^{2n}$, где n — натуральное число, обладает следующими свойствами:

- область определения — все действительные числа, т. е. множество \mathbf{R} ;
- множество значений — неотрицательные числа, т. е. $y \geq 0$;
- функция $y = x^{2n}$ чётная, так как $(-x)^{2n} = x^{2n}$;
- функция является убывающей на промежутке $x \leq 0$ и возрастающей на промежутке $x \geq 0$;
- функция ограничена снизу;
- функция принимает наименьшее значение $y = 0$ при $x = 0$.

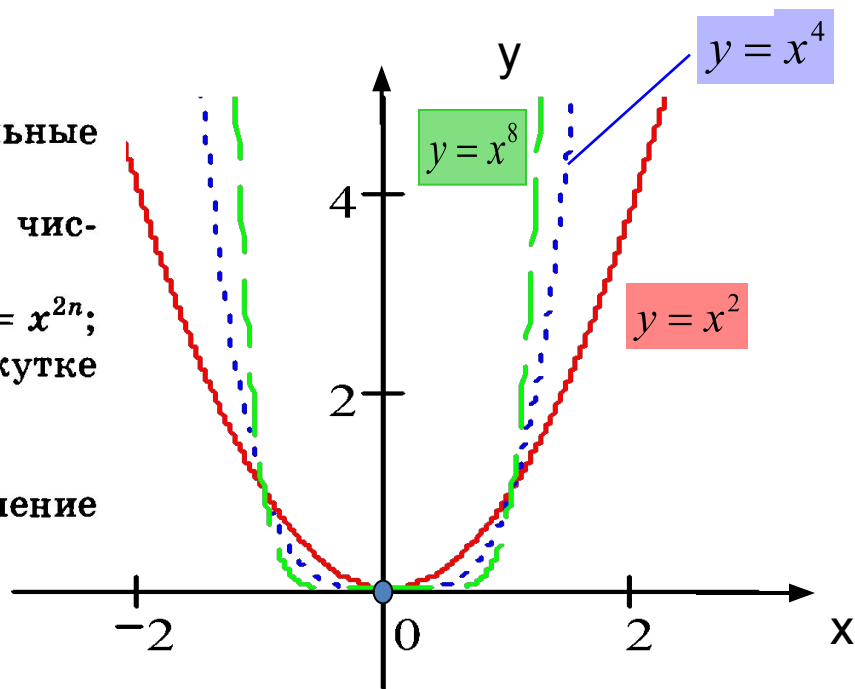


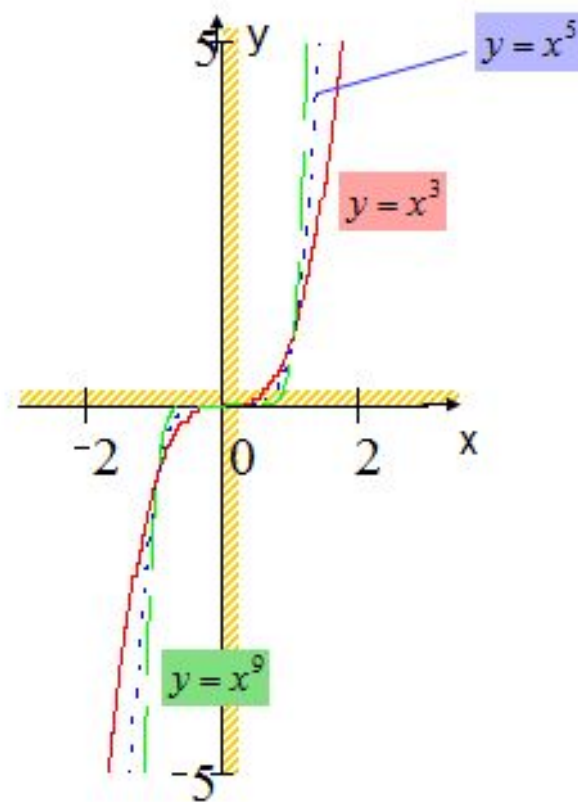
График функции $y = x^{2n}$

2. Показатель $p = 2n - 1$ — нечётное натуральное число.

График функции $y = x^{2n - 1}$

В этом случае степенная функция $y = x^{2n - 1}$, где n — натуральное число, обладает следующими свойствами:

- область определения — множество \mathbf{R} ;
- множество значений — множество \mathbf{R} ;
- функция $y = x^{2n - 1}$ нечётная, так как $(-x)^{2n - 1} = -x^{2n - 1}$;
- функция является возрастающей на всей действительной оси;
- функция не является ограниченной;
- функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения.

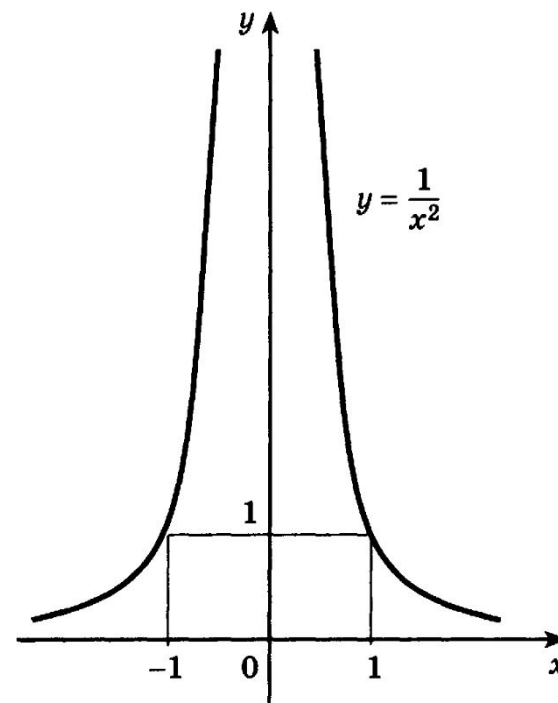


3. Показатель $p = -2n$, где n — натуральное число.

В этом случае степенная функция $y = x^{-2n} = \frac{1}{x^{2n}}$

обладает следующими свойствами:

- область определения — множество \mathbb{R} , кроме $x = 0$;
- множество значений — положительные числа $y > 0$;
- функция $y = \frac{1}{x^{2n}}$ чётная, так как $\frac{1}{(-x)^{2n}} = \frac{1}{x^{2n}}$;
- функция является возрастающей на промежутке $x < 0$ и убывающей на промежутке $x > 0$;
- функция ограничена снизу;
- функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения.



4. Показатель $p = -(2n - 1)$, где n — натуральное число.

В этом случае степенная функция $y = x^{-(2n-1)} = \frac{1}{x^{2n-1}}$, где $n \in N$, обладает следующими свойст-

вами:

— область определения — множество R , кроме $x = 0$;

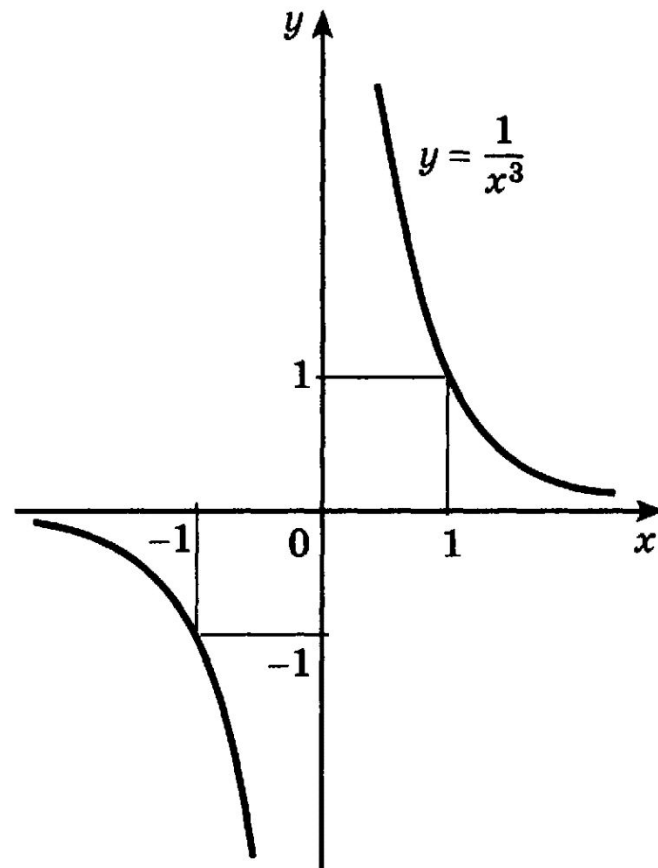
— множество значений — множество R , кроме $y = 0$;

— функция $y = \frac{1}{x^{2n-1}}$ нечётная, так как $\frac{1}{(-x)^{2n-1}} =$

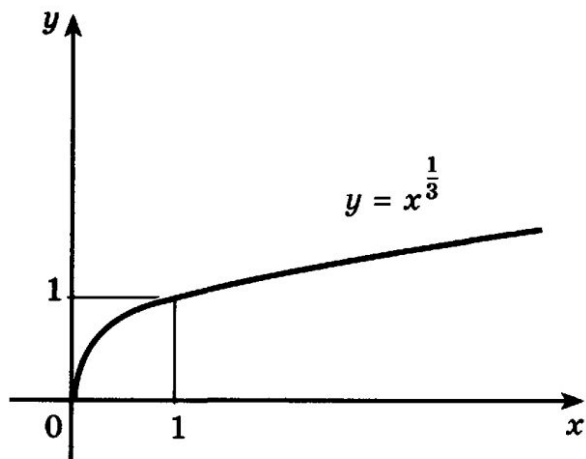
$$= -\frac{1}{x^{2n-1}};$$

— функция является убывающей на промежутках $x < 0$ и $x > 0$;

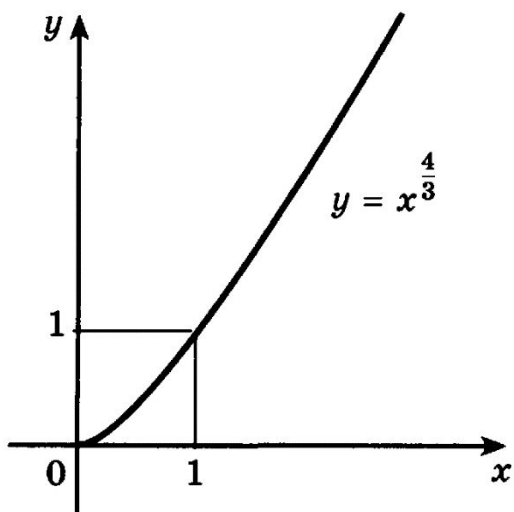
— функция не принимает ни наибольшего, ни наименьшего значения.



5*. Показатель p — положительное действительное нецелое число.



а)



б)

В этом случае функция $y = x^p$ обладает следующими свойствами:

- область определения — множество неотрицательных чисел $x \geq 0$;
- множество значений — множество неотрицательных чисел $y \geq 0$;
- функция является возрастающей на промежутке $x \geq 0$;
- функция не является ни чётной, ни нечётной;
- функция ограничена снизу;
- функция принимает наименьшее значение $y = 0$ при $x = 0$.

6*. Показатель p — отрицательное действительное нецелое число.

В этом случае функция $y = x^p$ обладает следующими свойствами:

- область определения — множество положительных чисел $x > 0$;
- множество значений — множество положительных чисел $y > 0$;
- функция является убывающей на промежутке $x > 0$;
- функция не является ни чётной, ни нечётной;
- функция ограничена снизу.

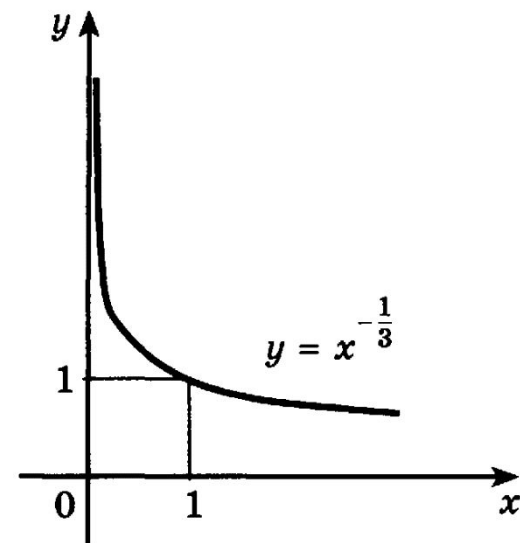


Рис. 12

№ 119.

Изобразить схематически график функции и указать её область определения и множество значений; выяснить, является ли функция ограниченной сверху (снизу):

1) $y = x^6$;

2) $y = x^5$;

3) $y = x^7$;

4) $y = x^{-2}$;

5) $y = x^{-3}$;

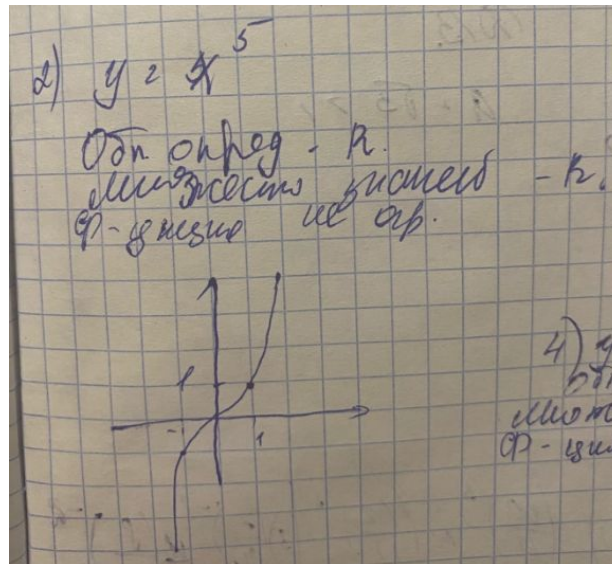
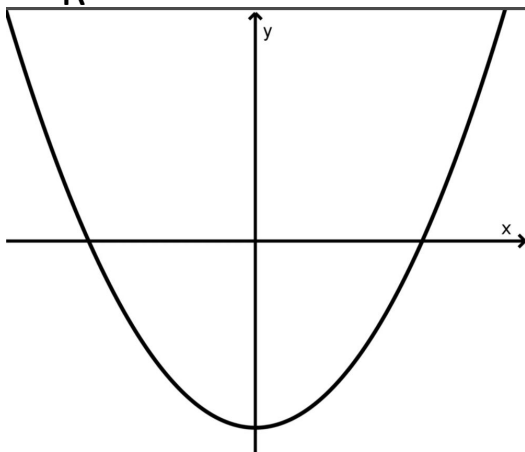
6) $y = x^6$.

1) Область

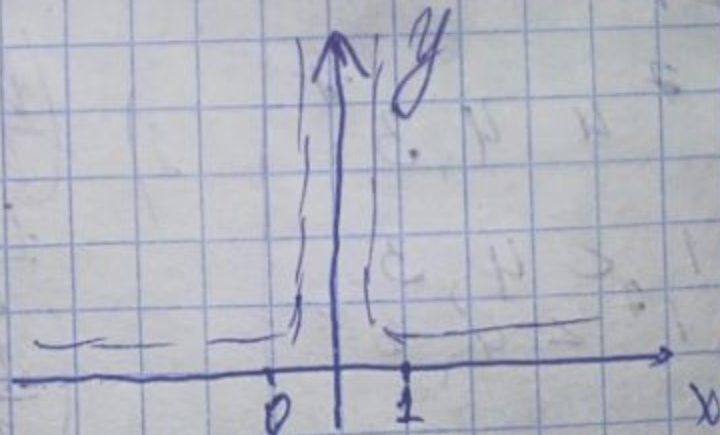
определения - \mathbb{R}

Область значения -

\mathbb{R}



4) $y^2 = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$
доп. обр-е $x \neq 0$ - иначе $x = 0$.
множество значений - нечет. $y > 0$.
об-е обратимости не существует



Решаем из учебника:

122 Пользуясь свойствами степенной функции, сравнить с единицей:

- 1) $4,1^{12}$; 2) $0,2^3$; 3) $0,7^9$; 4) $(\sqrt{3})^{22}$; 5) $1,3^{-2}$; 6) $0,8^{-1}$.

$$\begin{aligned} 1) & 4,1^{12} \\ & y(4,1) > y(1) \\ & 4,1^{12} > 1^{12} \\ & 4,1^{12} > 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) & 0,7^9 \\ & y(0,7) < y(1) \\ & 0,7^9 < 1^9 \\ & 0,7 < 1 \end{aligned}$$

$$4) (\sqrt{3})^2 = 3 \quad \frac{2^2}{2} = 3 \quad 11$$

$$y(3) > y(1)$$

$$3^{11} > 1^{11}$$

$$3 > 1$$

124 Сравнить значения выражений:

1) $3,1^7$ и $4,3^7$;

2) $\left(\frac{10}{11}\right)^3$ и $\left(\frac{12}{11}\right)^3$;

3) $0,3^8$ и $0,2^8$;

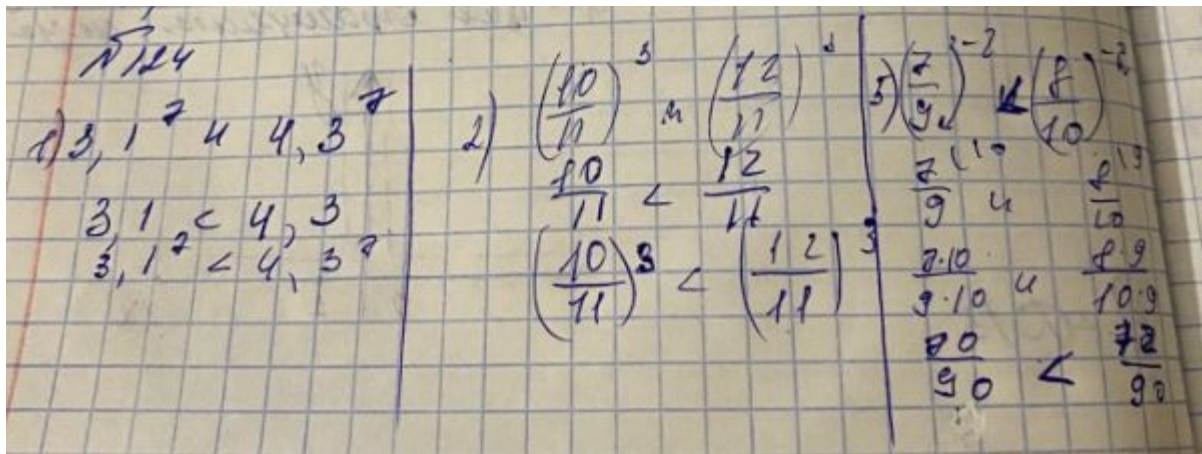
4) $2,5^2$ и $2,6^2$;

5) $\left(\frac{7}{9}\right)^{-2}$ и $\left(\frac{8}{10}\right)^{-2}$;

6) $\left(\frac{14}{15}\right)^{-6}$ и $\left(\frac{15}{16}\right)^{-6}$;

7) $(4\sqrt{3})^{-3}$ и $(3\sqrt{4})^{-3}$;

8) $(2\sqrt[3]{6})^{-5}$ и $(6\sqrt[3]{2})^{-5}$.





Таким образом, при возведении неравенства с положительной левой и положительной правой частями в положительную степень знак неравенства не меняется, а при возведении в отрицательную степень знак неравенства меняется на противоположный.

124 Сравнить значения выражений:

- | | |
|--|---|
| 1) $3,1^7 < 4,3^7;$ | 2) $\left(\frac{10}{11}\right)^3 < \left(\frac{12}{11}\right)^3;$ |
| 3) $0,3^8 > 0,2^8;$ | 4) $2,5^2 < 2,6^2;$ |
| 5) $\left(\frac{7}{9}\right)^{-2} > \left(\frac{8}{10}\right)^{-2};$ | 6) $\left(\frac{14}{15}\right)^{-6} < \left(\frac{15}{16}\right)^{-6};$ |
| 7) $(4\sqrt{3})^{-3} < (3\sqrt{4})^{-3};$ | 8) $(2\sqrt[3]{6})^{-5} < (6\sqrt[3]{2})^{-5}.$ |

ДЗ отправляем до 29.01 до 19:00

Домашнее задание до 29.01:

§11,

- ▶ №119(3,5),
- ▶ №122(5),
- ▶ №124 (4-6).

aturina2020@gmail.com

Атурина Иванян
aturina2020@gmail.com