ЗЛП і її властивості

3.1 Форми ЗЛП

3.2 Еквівалентність форм ЗЛП

3.3 Властивості множини допустимих розв’язків ЗЛП (багатогранні множини, багатогранники, вершини , грані)

3.4 Основні властивості ЗЛП і теореми лінійного програмування

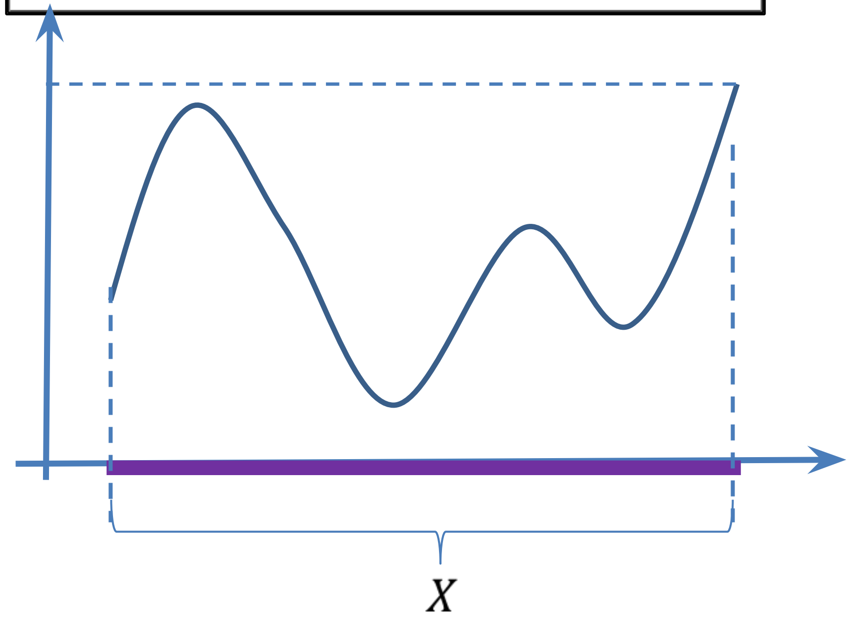
Основні властивості ЗЛП і теореми лінійного програмування

- **1. Застосування класичного апарату математичного аналізу для вирішення ЗЛП**
- **2. Теорема про оптимальність вершини багатогранника**
- **3. Базисні розв’язки**
- **4. Теореми ЛП**
  - Теорема «ДБР↔вершина»
  - Фундаментальна теорема
  - Теорема про скінченність множини ДБР ЗЛП
  - Теорема про скінченність координат ДБР

Існування глобального розв'язку

Теорема Вейерштрасса.
Нехай X *- замкнута і обмежена множина в* R^n *,*
$f(x)$ *- безперервна функція на* X*.*
Тоді глобальний розв'язок задачі
$f(x) \to max, \quad x \in X$ *, існує.*

Безперервна функція $f(x)$ досягає на замкнутій обмеженій множині X свого максимуму у внутрішній або граничній точці



Існування глобального розв'язку

Теорема Вейерштрасса.
Нехай X - замкнута і обмежена множина в R^n,
$f(x)$ - безперервна функція на X.
Тоді глобальний розв'язок задачі
$f(x) \rightarrow max, \quad x \in X$, існує.

→

Безперервна функція $f(x)$ досягає на замкнутій обмеженій множині X свого максимуму у внутрішній або граничній точці

В ЗЛП:
$\text{МДР} - \text{багатогранник } X$
(замкнута і обмежена множина в R^n),
$f(x) = c^T x \; -$ безперервна функція на X.

→

ЗЛП має розв'язок

Максимум функции $c^T x$ - у внутрішній або граничній точці багатогранника X

Знаходження максимуму функції n змінних

Знайти максимум функції $f(x)$ на множині X :

$$f(x) \to \max,$$
$$x \in X$$

$X \subset R^n$ – замкнена і обмежена множина

$f(x)$ – диференціюється на множині X .

Необхідною умовою максимуму функції $f(x)$ у внутрішній точці x^0 множини X є рівність градієнта $grad\ f(x^0)$ нульовому вектору.

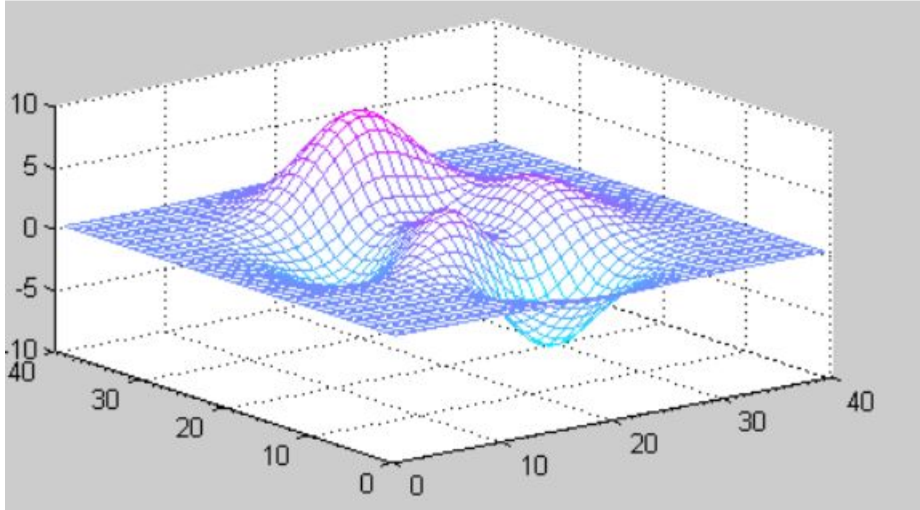
Знаходження максимуму функції n змінних

Для знаходження максимуму функції $f(x)$ на множині X треба:

1) знайти всі внутрішні точки множини $x^i \in X$ $i=\overline{1,k}$, для яких виконується:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(x)=0, \\ \dots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}(x)=0 \end{cases},$$

2) обчислити значення $f(x^1), f(x^2), \dots, f(x^k)$ і значення $f(x)$ в усіх точках границі множини X, а потім вибрати з них максимальне.



Знаходження максимуму функції n змінних (випадок ЗЛП)

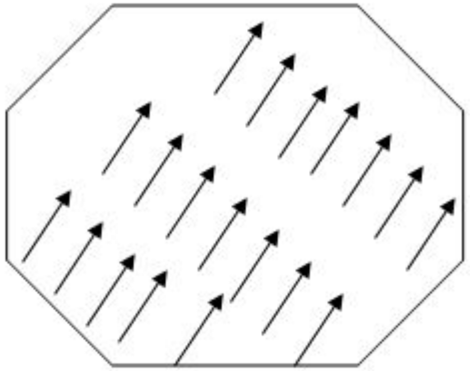
ЗЛП:

$$f(x) = c^T x \to max,$$
$$x \in X,$$

X — багатогранник

1) $$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Величина постійна і не залежить від точки обчислення



$\Rightarrow$ Функція $c^T x$ не має локальних максимумів $\Rightarrow$ **Максимумі функції $c^T x$ досягається на границі множиніи X**

Теорема про оптимальність вершини багатогранника

Маємо ЗЛП:

$$c^T x \to \max \ ,$$
$$x \in X \ .$$

Теорема. *Нехай допустима множина* X *задачі ЛП є багатогранником. Тоді ЦФ* $c^T x$ *досягає свого максимуму у вершині* X .

Якщо функція $c^T x$ *набуває максимального значення більш ніж в одній точці, то вона досягає того ж значення в будь-якій точці, що є їх опуклою лінійною комбінацією.*

Теорема про оптимальність вершини багатогранника

- Доведення частини I: *«максимум у вершині»*

Нехай $x^1, x^2, ..., x^k$ - вершини багатогранника X ,

x^* - оптимальний розв’язок задачі, тобто

$c^T x^* \geq c^T x$ для $\forall x \in X$.

Якщо x^* - вершина, то перша частина теореми доведена.

Якщо ж точка x^* не є вершиною многогранника X , то вона може бути представлена у вигляді опуклої лінійної комбінації його вершин:

$$x^* = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot x^i, \quad \forall \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1.$$

$$c^T x^* = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c^T x^i$$

Теорема про оптимальність вершини багатогранника.

- Доведення частини І: *«максимум у вершині»*

Нехай $x^1, x^2, ..., x^k$ - вершини багатогранника X ,

x^* - оптимальний розв'язок задачі, тобто

$c^T x^* \geq c^T x$ для $\forall x \in X$.

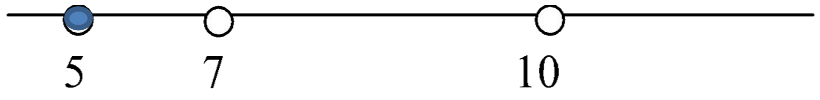
Якщо x^* - вершина, то перша частина теореми доведена.

Якщо ж точка x^* не є вершиною многогранника X , то вона може бути представлена у вигляді опуклої лінійної комбінації його вершин:

$$x^* = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot x^i, \quad \forall \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1.$$

$$c^T x^* = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c^T x^i$$

$$B = \sum_i \lambda_i A_i \quad \forall 0 \leq \lambda_i \leq 1 \quad \Rightarrow B \leq max\{A_i\}$$



Теорема про оптимальність вершини багатогранника.

- Доведення частини І: *«максимум у вершині»*

Нехай $x^1, x^2, ..., x^k$ - вершини багатогранника X ,

x^* - оптимальний розв'язок задачі, тобто

$$c^T x^* \geq c^T x \text{ для } \forall x \in X .$$

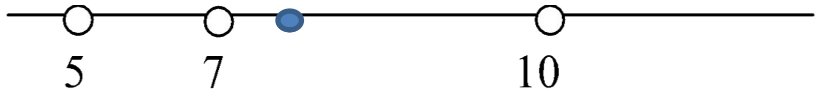
Якщо x^* - вершина, то перша частина теореми доведена.

Якщо ж точка x^* не є вершиною многогранника X , то вона може бути представлена у вигляді опуклої лінійної комбінації його вершин:

$$x^* = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot x^i, \quad \forall \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 .$$

$$c^T x^* = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c^T x^i$$

$$B = \sum_i \lambda_i A_i \quad \forall 0 \leq \lambda_i \leq 1 \quad \Rightarrow B \leq max\{A_i\}$$



Теорема про оптимальність вершини багатогранника

- Доведення частини I: *«максимум у вершині»*

Нехай $x^1, x^2, ..., x^k$ - вершини багатогранника X ,
x^* - оптимальний розв'язок задачі, тобто

$$c^T x^* \geq c^T x \text{ для } \forall x \in X .$$

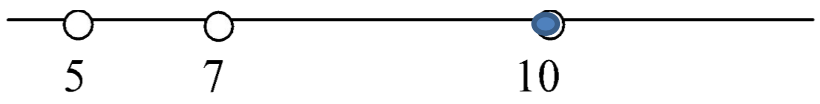
Якщо x^* - вершина, то перша частина теореми доведена.

Якщо ж точка x^* не є вершиною многогранника X , то вона може бути представлена у вигляді опуклої лінійної комбінації його вершин:

$$x^* = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot x^i, \quad \forall \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1.$$

$$c^T x^* = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c^T x^i$$

$$B = \sum_i \lambda_i A_i \quad \forall 0 \leq \lambda_i \leq 1 \quad \Rightarrow B \leq max\{A_i\}$$



Теорема про оптимальність вершини багатогранника

- Доведення частини I: *«максимум у вершині»*

Нехай $x^1, x^2, ..., x^k$ - вершини багатогранника X,

x^* - оптимальний розв'язок задачі, тобто

$c^T x^* \geq c^T x$ для $\forall x \in X$.

Якщо x^* - вершина, то перша частина теореми доведена.

Якщо ж точка x^* не є вершиною многогранника X, то вона може бути представлена у вигляді опуклої лінійної комбінації його вершин:

$$B = \sum_i \lambda_i A_i \quad \forall 0 \leq \lambda_i \leq 1 \quad \Rightarrow B \leq max\{A_i\}$$

$$x^* = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot x^i, \quad \forall \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1.$$

$$c^T x^* = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c^T x^i$$

$$c^T x^* = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i c^T x^i \leq c^T x^S, \text{ де } c^T x^S = \max_{1 \leq i \leq k} c^T x^i$$

Але за припущенням, x^* - оптимальний розв'язок, отже $c^T x^* = c^T x^S$, тобто існує вершина x^S у якій лінійна функція $c^T x$ набуває максимального значення.

Теорема про оптимальність вершини багатогранника

- Доведення частини II

Нехай $c^T x$ набуває максимального значення в точках $x^1, x^2, \ldots, x^p$ тобто

$$c^T x^i = z^0, i = \overline{1, p}$$

Візьмемо деяку ОЛК цих точок:

$$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_j x^i, \quad \forall \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1 .$$

$$c^T x = c^T \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x^i = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i c^T x^i = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i z^0 = z^0 \sum_{i=1}^{p} \lambda_i = z^0 .$$

Отже, ЦФ $c^T x$ досягає максимального значення z^0 у довільній точці x, що є ОЛК точок $x^1, x^2, \ldots, x^p$. ■

Базисні розв’язки

(Алгебраїчне представлення вершин)

- ЗЛП:

$$
\begin{aligned}
\max\ z &= 2x_1 + 1x_2 \\
-x_1 + x_2 &\le 1, \\
x_2 &\le 2, \\
3x_1 + 3x_2 &\le 12, \\
2x_1 &\le 6, \\
x_1, x_2 &\ge 0.
\end{aligned}
$$

ЗЛП в КФ

$$
\begin{aligned}
\max\ z &= 2x_1 + 1x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4 \\
-x_1 + x_2 + s_1 &= 1, \\
x_2 + s_2 &= 2, \\
3x_1 + 3x_2 + s_3 &= 12, \\
2x_1 + s_4 &= 6, \\
x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 &\ge 0.
\end{aligned}
$$

Базисні розв’язки

(Алгебраїчне представлення вершин)

$$\max\ z = 2x_1 + 1x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4$$

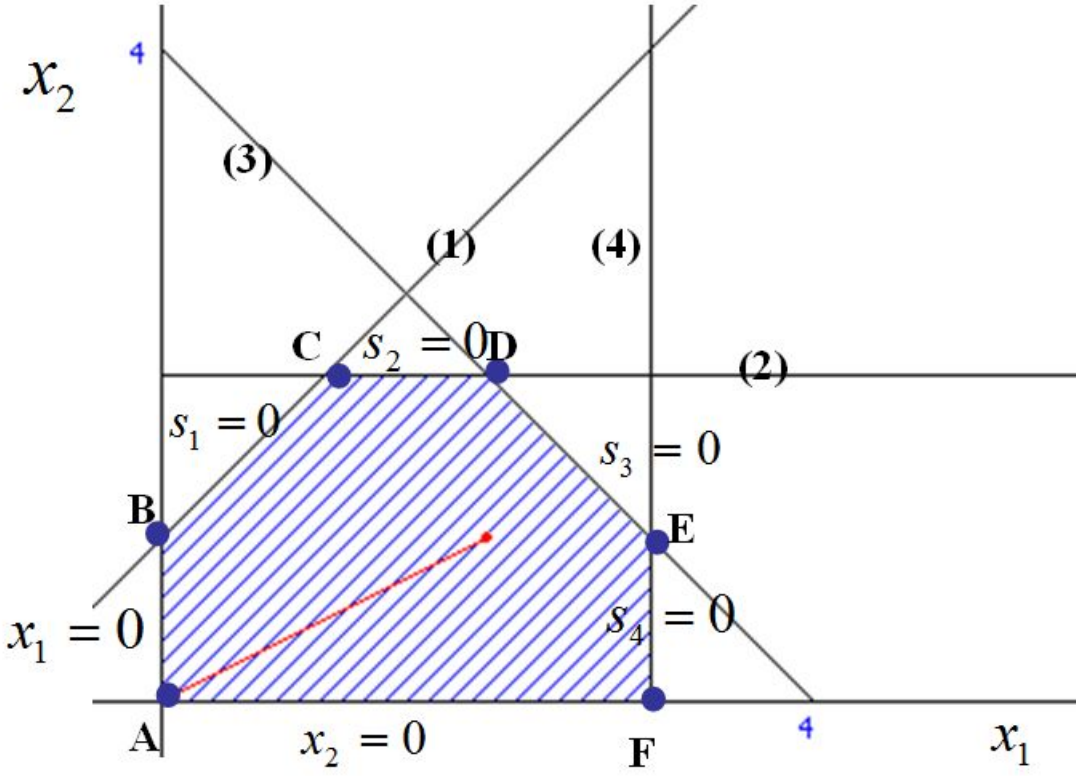
$$-x_1 + x_2 + s_1 = 1, \quad (1)$$

$$x_2 + s_2 = 2, \quad (2)$$

$$3x_1 + 3x_2 + s_3 = 12, \quad (3)$$

$$2x_1 + s_4 = 6, \quad (4)$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0.$$



Кожну точку цієї множини можна визначити за допомогою шести змінних $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4$

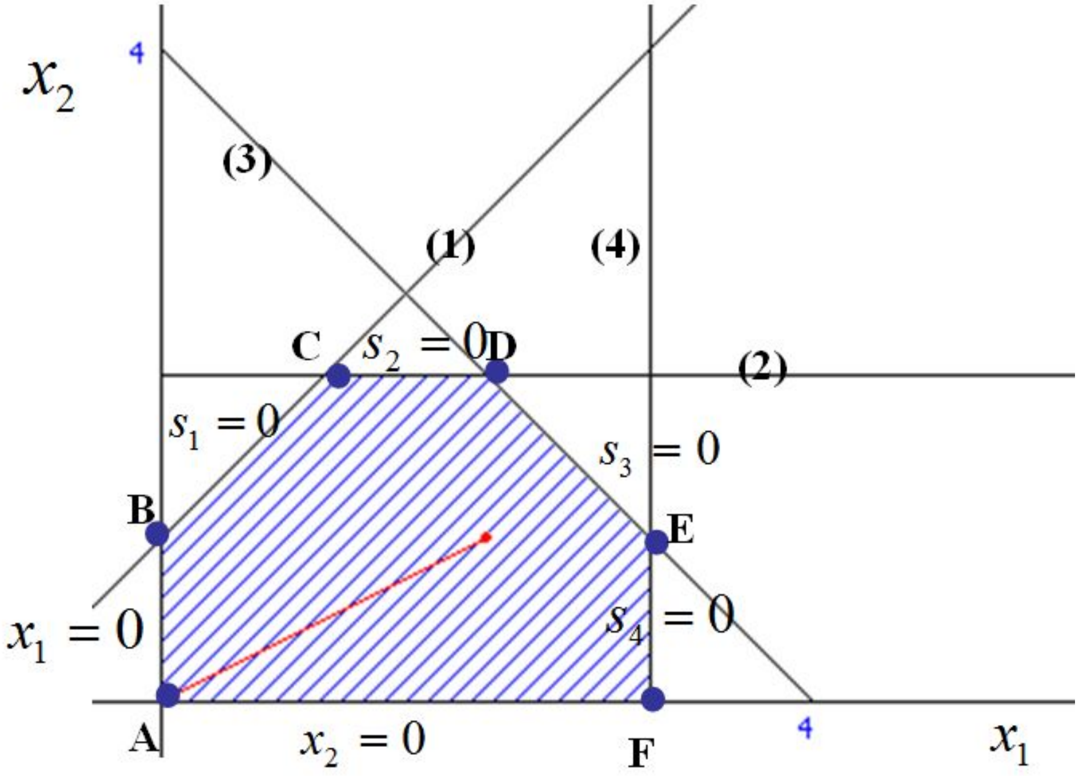
Базисні розв’язки

(Алгебраїчне представлення вершин)

$$\max\ z = 2x_1 + 1x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4$$

$$\begin{aligned}
-x_1 + x_2 + s_1 &= 1, \quad (1)\\
x_2 + s_2 &= 2, \quad (2)\\
3x_1 + 3x_2 + s_3 &= 12, \quad (3)\\
2x_1 + s_4 &= 6, \quad (4)\\
x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 &\geq 0.
\end{aligned}$$

Вершина	Змінні	
	нульові	ненульові
A	$x_1,\ x_2$	$s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4$



Базисні розв’язки

(Алгебраїчне представлення вершин)

$$\max\ z = 2x_1 + 1x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4$$

$$-x_1 + x_2 + s_1 = 1, \quad (1)$$

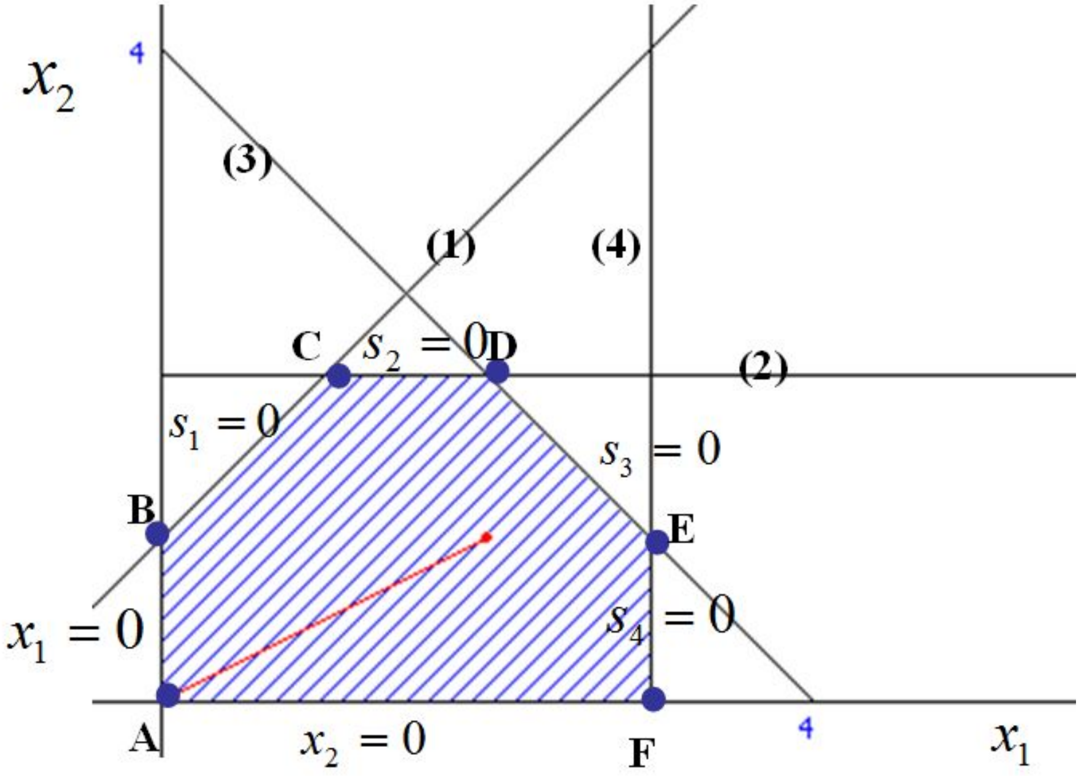
$$x_2 + s_2 = 2, \quad (2)$$

$$3x_1 + 3x_2 + s_3 = 12, \quad (3)$$

$$2x_1 + s_4 = 6, \quad (4)$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0.$$

Вершина	Змінні	
	нульові	ненульові
A	$x_1,\ x_2$	$s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4$
B	$x_1,\ s_1$	$s_1,\ s_2,\ s_3,\ x_1$



Базисні розв'язки

(Алгебраїчне представлення вершин)

$$\max \ z = 2x_1 + 1x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4$$

$$-x_1 + x_2 + s_1 = 1, \quad (1)$$

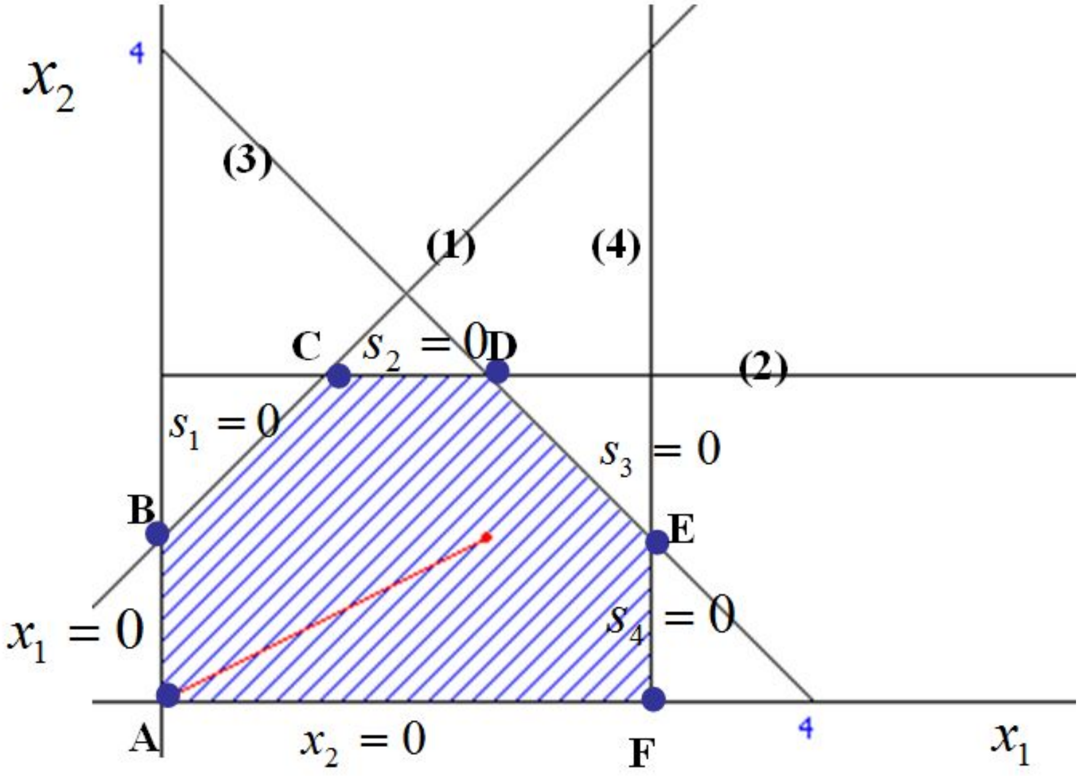
$$x_2 + s_2 = 2, \quad (2)$$

$$3x_1 + 3x_2 + s_3 = 12, \quad (3)$$

$$2x_1 + s_4 = 6, \quad (4)$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0.$$

Вершина	Змінні	
	нульові	ненульові
A	$x_1,\ x_2$	$s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4$
B	$x_1,\ s_1$	$s_1,\ s_2,\ s_3,\ x_1$
C	$s_2,\ s_1$	$s_3,\ s_4,\ x_2,\ x_1$
D	$s_2,\ s_3$	$s_1,\ s_4,\ x_2,\ x_1$
E	$s_4,\ s_3$	$s_1,\ s_2,\ x_2,\ x_1$
F	$s_4,\ x_2$	$s_3,\ s_4,\ x_2,\ s_2$

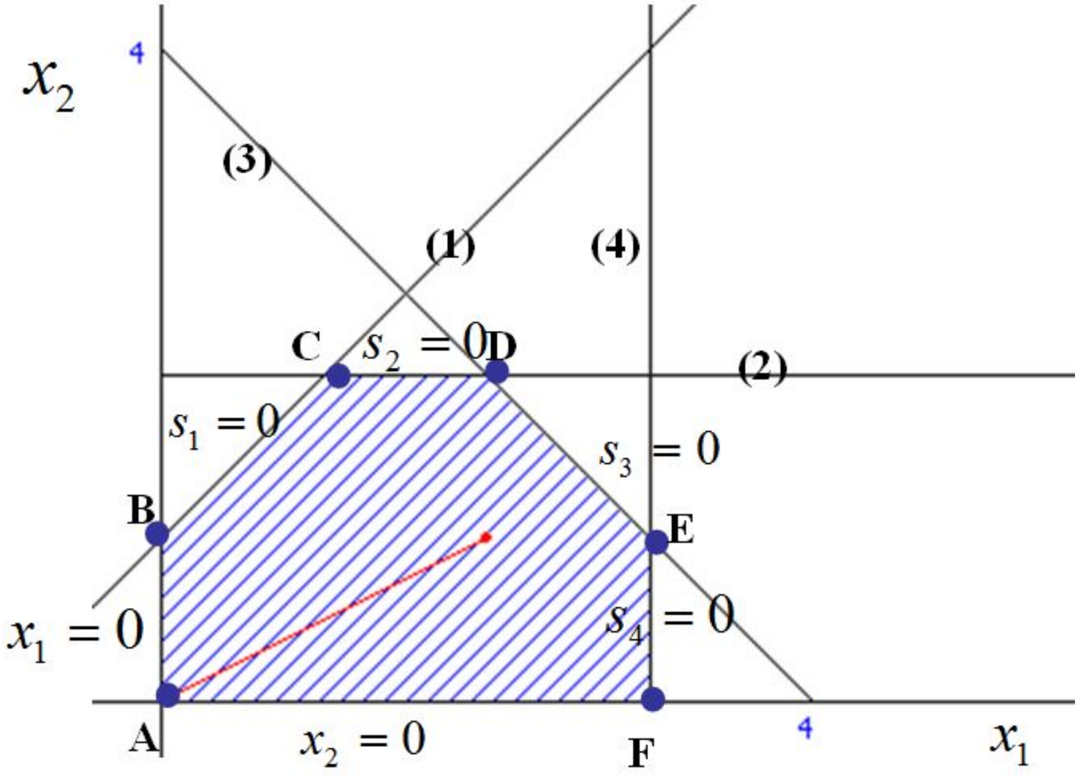


Базисні розв'язки

(Алгебраїчне представлення вершин)

Вершина	Змінні	
	нульові	ненульові
A	$x_1,\ x_2$	$s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4$
B	$x_1,\ s_1$	$s_1,\ s_2,\ s_3,\ x_1$
C	$s_2,\ s_1$	$s_3,\ s_4,\ x_2,\ x_1$
D	$s_2,\ s_3$	$s_1,\ s_4,\ x_2,\ x_1$
E	$s_4,\ s_3$	$s_1,\ s_2,\ x_2,\ x_1$
F	$s_4,\ x_2$	$s_3,\ s_4,\ x_2,\ s_2$

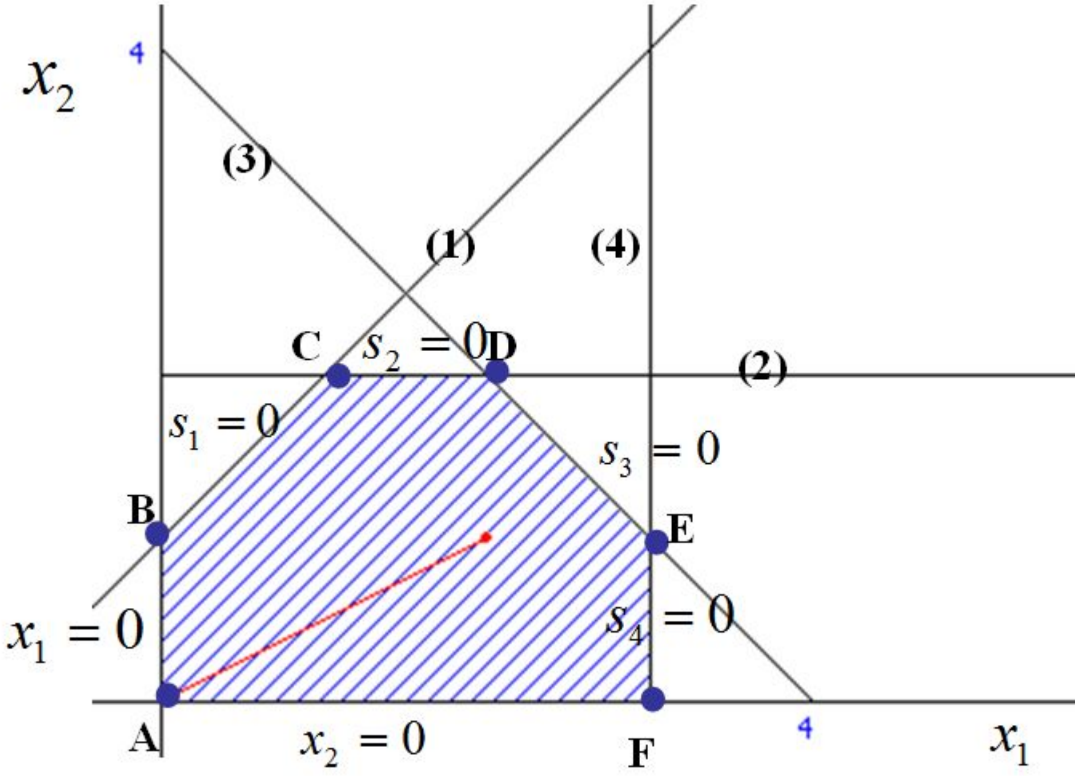
– канонічна модель містить $m = 4$ основних рівнянь і $n = 6$ змінних, тому в кожній з вершин дві $(n - m)$ змінні повинні мати нульові значення;



Базисні розв’язки

(Алгебраїчне представлення вершин)

Вершина	Змінні	
	нульові	ненульові
A	$x_1,\ x_2$	$s_1,\ s_2,\ s_3,\ s_4$
B	$x_1,\ s_1$	$s_1,\ s_2,\ s_3,\ x_1$
C	$s_2,\ s_1$	$s_3,\ s_4,\ x_2,\ x_1$
D	$s_2,\ s_3$	$s_1,\ s_4,\ x_2,\ x_1$
E	$s_4,\ s_3$	$s_1,\ s_2,\ x_2,\ x_1$
F	$s_4,\ x_2$	$s_3,\ s_4,\ x_2,\ s_2$



ЗАКОНОМІРНОСТІ:

– канонічна модель містить $m = 4$ основних рівнянь і $n = 6$ змінних, тому в кожній з вершин дві ($n - m$) змінні повинні мати нульові значення;

– суміжні вершини відрізняються лише однією змінною в кожній групі

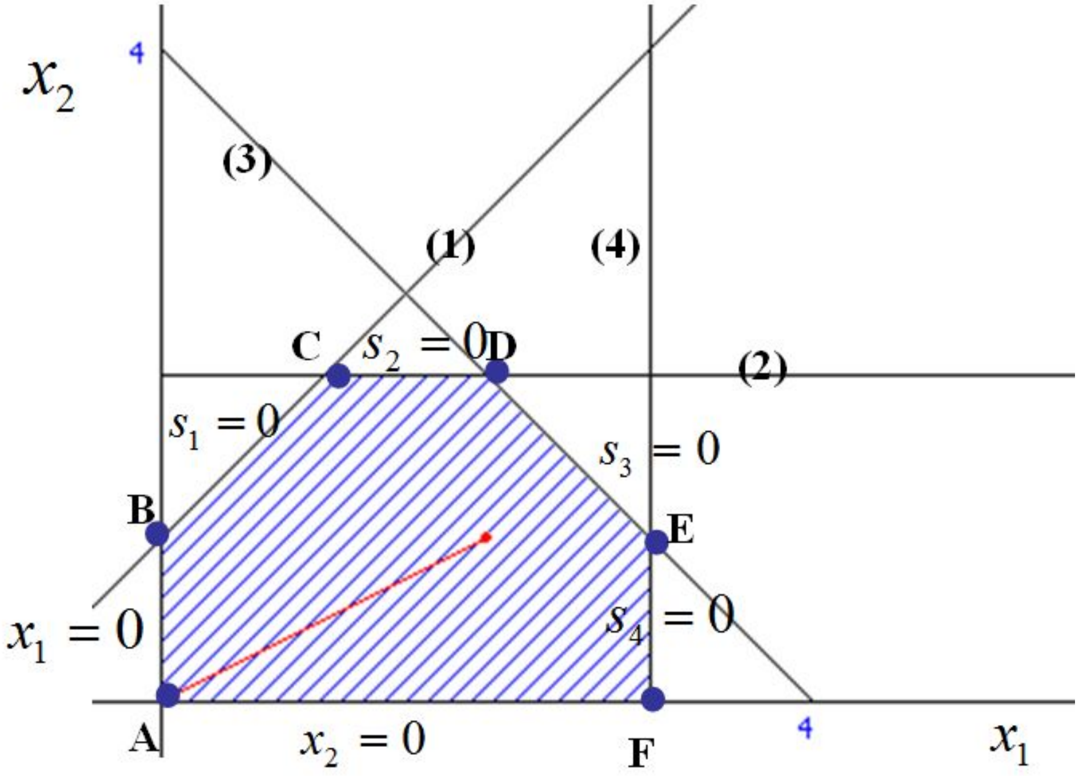
Базисні розв’язки

(Алгебраїчне представлення вершин)

$$\max \ z = 2x_1 + 1x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4$$

$$\begin{aligned}
-x_1 + x_2 + s_1 &= 1, \quad (1)\\
x_2 + s_2 &= 2, \quad (2)\\
3x_1 + 3x_2 + s_3 &= 12, \quad (3)\\
2x_1 + s_4 &= 6, \quad (4)\\
x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 &\geq 0.
\end{aligned}$$

З першої закономірності $\Longrightarrow$ всі вершини визначаються як всі **однозначні невід’ємні розв’язки системи рівнянь, в яких $n-m$ змінних дорівнюють нулю**.



Базисні розв’язки

(Алгебраїчне представлення вершин)

$$\max\ z = 2x_1 + 1x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4$$

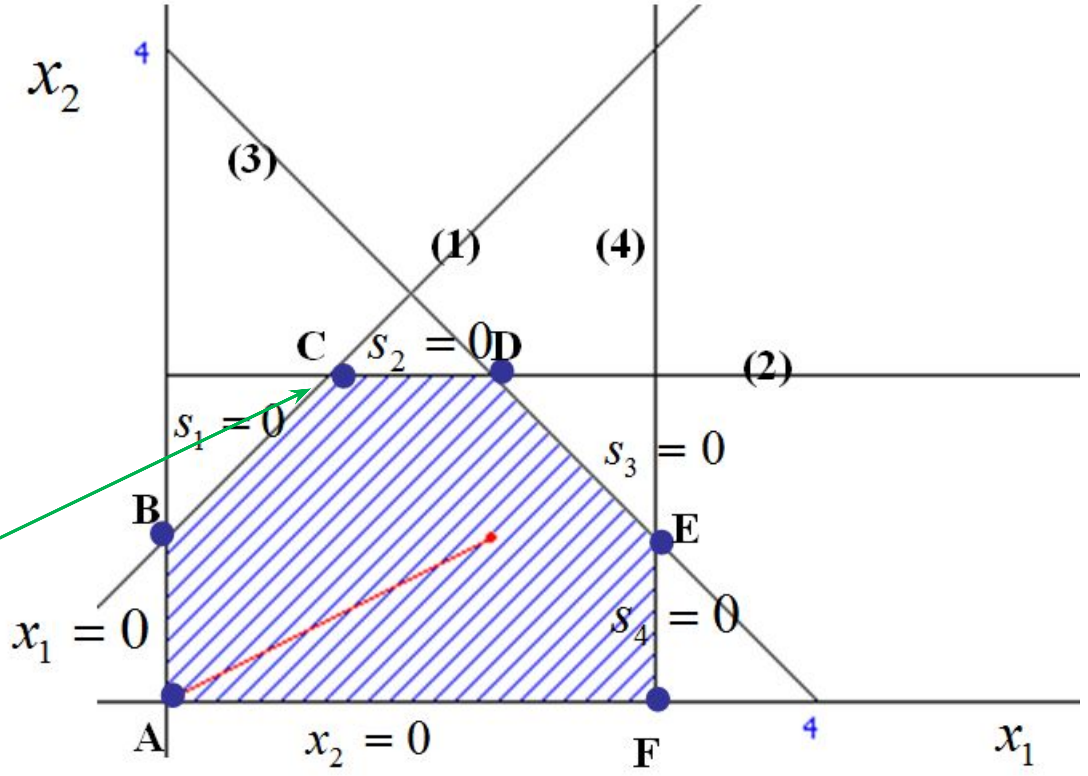
$$\begin{aligned}
-x_1 + x_2 + s_1 &= 1, &(1)\\
x_2 + s_2 &= 2, &(2)\\
3x_1 + 3x_2 + s_3 &= 12, &(3)\\
2x_1 + s_4 &= 6, &(4)
\end{aligned}$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0.$$

$$s_1 = s_2 = 0$$

$$\begin{aligned}
x_2 &= 1,\\
x_2 &= 2,\\
3x_1 + 3x_2 + s_3 &= 12,\\
2x_1 + s_4 &= 6,
\end{aligned}$$

$$x_1 = 1, x_2 = 2, s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 = 3, s_4 = 4$$



Щоб система мала єдиний розв’язок, стовпці матриці обмежень повинні бути **лінійно незалежними**

Базисні розв’язки

(Алгебраїчне представлення вершин)

- Нехай маємо канонічну ЗЛП

$$
\begin{aligned}
& c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \ldots + c_n \cdot x_n \to \max, \\
& a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n} \cdot x_n = b_1, \\
& \vdots \\
& a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \ldots + a_{mn} \cdot x_n = b_m, \\
& x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}.
\end{aligned}
$$

$$a_{*1} \cdot x_1 + a_{*2} \cdot x_2 + \ldots + a_{*n} \cdot x_n = b$$

Нехай задача має допустимі розв’язки і ранг матриці A дорівнює числу обмежень m, вважатимемо далі, що $n > m$,

Базисні розв’язки

(Алгебраїчне представлення вершин)

$$a_{*1} \cdot x_1 + a_{*2} \cdot x_2 + \dots + a_{*n} \cdot x_n = b$$

Визначення. ***Базисом*** ß матриці A називається набір з m лінійно незалежних стовпців ß $= \left\{ a_{*j_1}, a_{*j_2}, \dots, a_{*j_m} \right\}$.

Визначення. ***Базисною матрицею*** називається $(m \times m)$ – матриця, складена із стовпців, що входять в базис ß:

$\mathrm{B} = \left[a_{*j_1} \middle| a_{*j_2} \middle| \dots \middle| a_{*j_m} \right]$.

Визначення. ***Базисним розв’язком***, відповідним базису ß, називається вектор $x \in R^n$ у якому

– $x_j = 0$ при $a_{*j} \notin$ ß;

– x_{j_k} є k-й компонент вектора $\mathrm{B}^{-1}b$, де $k = 1, \dots, m$.

Процедура знаходження базисних розв'язків (БР)

1) Вибрати множину $\mathcal{B}$, що складається з m лінійно незалежних стовпців матриці A.

2) Покласти рівними 0 всі компоненти вектора x які відповідні стовпцям, що не входять в $\mathcal{B}$. Ці змінні називатимемо ***небазисними*** (їх $n-m$) .

3) Розв'язати m отриманих рівнянь для визначення тих компонент вектора x, що залишилися. Вони називатимуться ***базисними змінними*** (їх m)

Допустимі базисні розв’язки (ДБР)

- **Визначення**. Розв’язок x називається ***допустимим базисним розв’язком (ДБР),*** якщо він є базисним і всі його компоненти невід’ємні.

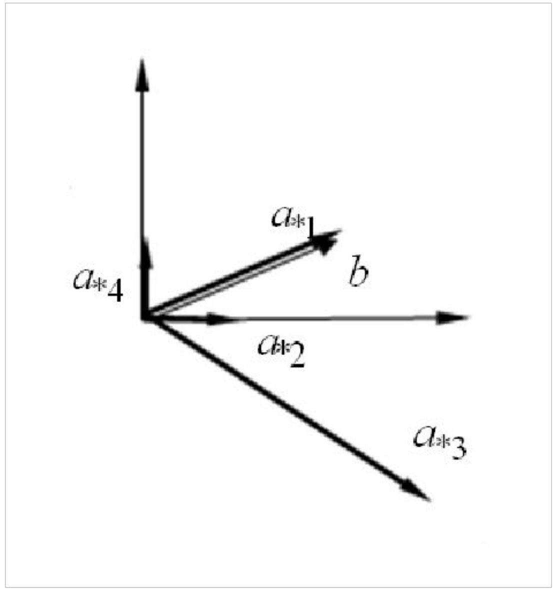
- Якщо нульовий вектор є допустимим, то його завжди вважатимемо за базисний.

- **Визначення**. ДБР називається ***невиродженим***, якщо він має точно m додатних компонентів (координат).

Приклад екзаменаційного завдання (0)

Нехай дана система обмежень з $m = 2$ та $n = 4$:

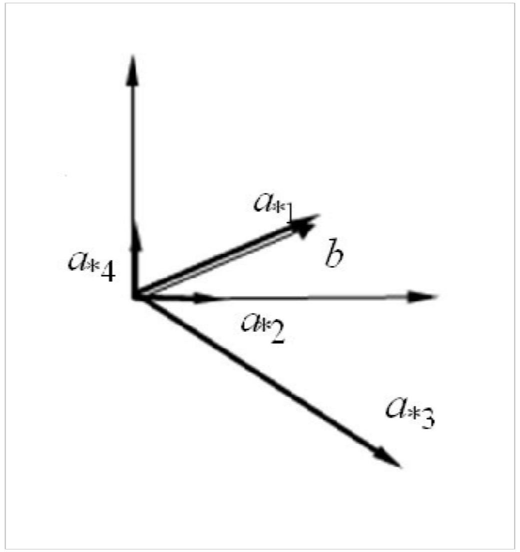
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \quad\quad &= 2, \\ x_1 \quad\quad - 2x_3 + x_4 &= 1. \end{aligned}$$



Чи є базисом наступні множини векторів?
Якщо так, то знайти відповідний базисний розв’язок.
Чи є він допустимим?

Приклад екзаменаційного завдання (1)

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \qquad = 2,$$
$$x_1 \qquad - 2x_3 + x_4 = 1.$$



Чи є базисом множина векторів $\{a_{*2}, a_{*4}\}$?
Якщо так, то знайти відповідний базисний розв'язок.
Чи є він допустимим?

$x_1 = 0$

$x_3 = 0$

$x_2 \qquad = 2,$

$x_4 = 1.$

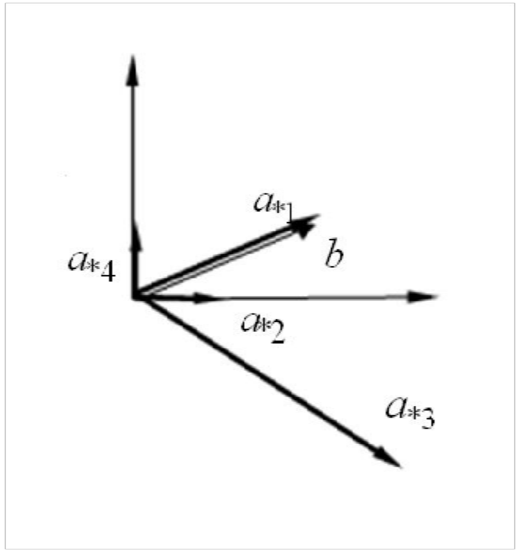
2	1	3	0
1	0	-2	1

$\{a_{*2}, a_{*4}\} = \mathcal{B}$

$x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ДБР

Приклад екзаменаційного завдання (2)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \qquad &= 2, \\ x_1 \qquad - 2x_3 + x_4 &= 1. \end{aligned}$$



Чи є базисом множина векторів $\{a_{*2}, a_{*3}\}$?
Якщо так, то знайти відповідний базисний розв'язок.
Чи є він допустимим?

$x_1 = 0$

$x_4 = 0$

$$\begin{aligned} x_2 + 3x_3 \qquad &= 2, \\ - 2x_3 \qquad &= 1. \end{aligned}$$

2	1	3	0
1	0	-2	1

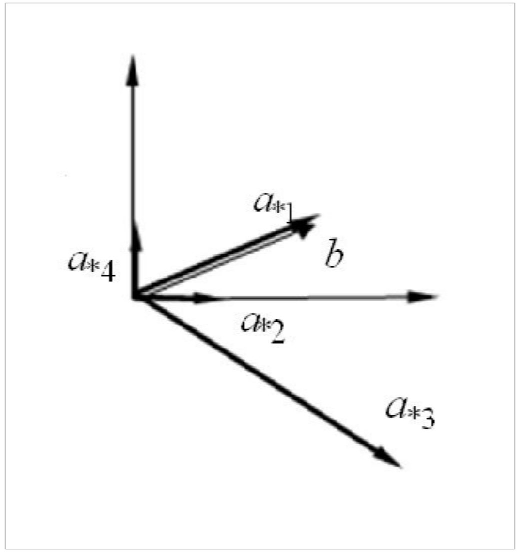
$$x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

БР не допустимий

$\{a_{*2}, a_{*3}\} = \mathcal{B}$

Приклад екзаменаційного завдання (3)

$$
\begin{aligned}
2x_1 + x_2 + 3x_3 \quad\quad &= 2,\\
x_1 \quad\quad - 2x_3 + x_4 &= 1.
\end{aligned}
$$



Чи є базисом множина векторів $\{a_{*1}, a_{*2}, a_{*3}\}$?

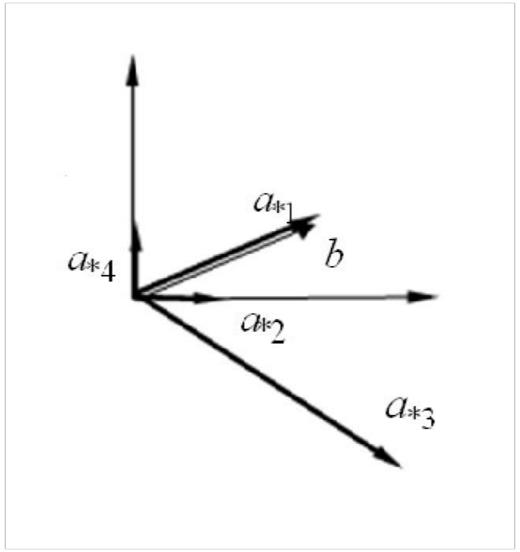
Якщо так, то знайти відповідний базисний розв'язок.

Чи є він допустимим?

2	1	3	0
1	0	-2	1

Приклад екзаменаційного завдання (4)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \quad\quad &= 2, \\ x_1 \quad\quad - 2x_3 + x_4 &= 1. \end{aligned}$$

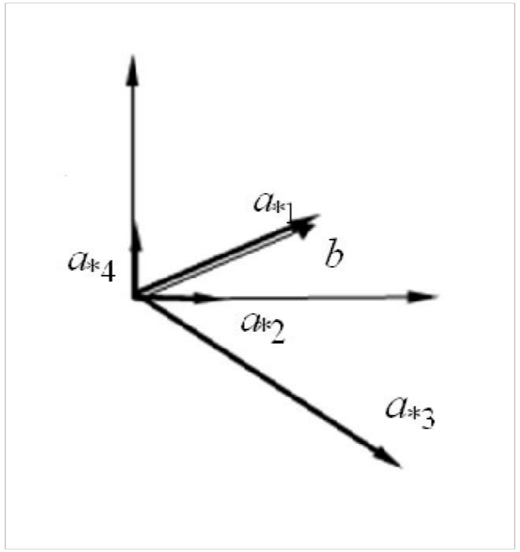


2	1	3	0
1	0	-2	1

Чи є базисом множина векторів $\{a_{*1}, a_{*2}\}$?
Якщо так, то знайти відповідний базисний розв'язок.
Чи є він допустимим?

Приклад екзаменаційного завдання (5)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \qquad &= 2, \\ x_1 \qquad - 2x_3 + x_4 &= 1. \end{aligned}$$



Чи є базисом множина векторів $\{a_{*1}, a_{*4}\}$?
Якщо так, то знайти відповідний базисний розв’язок.
Чи є він допустимим?

2	1	3	0
1	0	-2	1

$$x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x^5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ВИСНОВОК:

1) оскільки не вироджений ДБР містить точно m додатних координат, то його базис завжди єдиний;

2) базис виродженого розв’язку визначений неоднозначно.

ДБР $\leftrightarrow$ ВЕРШИНА

Теорема. *Вектор* $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ *тоді і тільки тоді є допустимим базисним розв'язком задачі*

$$c^T x \to \max,$$
$$a_{*1} \cdot x_1 + a_{*2} \cdot x_2 + \dots + a_{*n} \cdot x_n = b,$$
$$x \geq 0,$$

коли точка $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ *є вершиною його багатогранної множини* X.

Доведення

- «Необхідність»: x ДБР $\Rightarrow$ x ВЕРШИНА

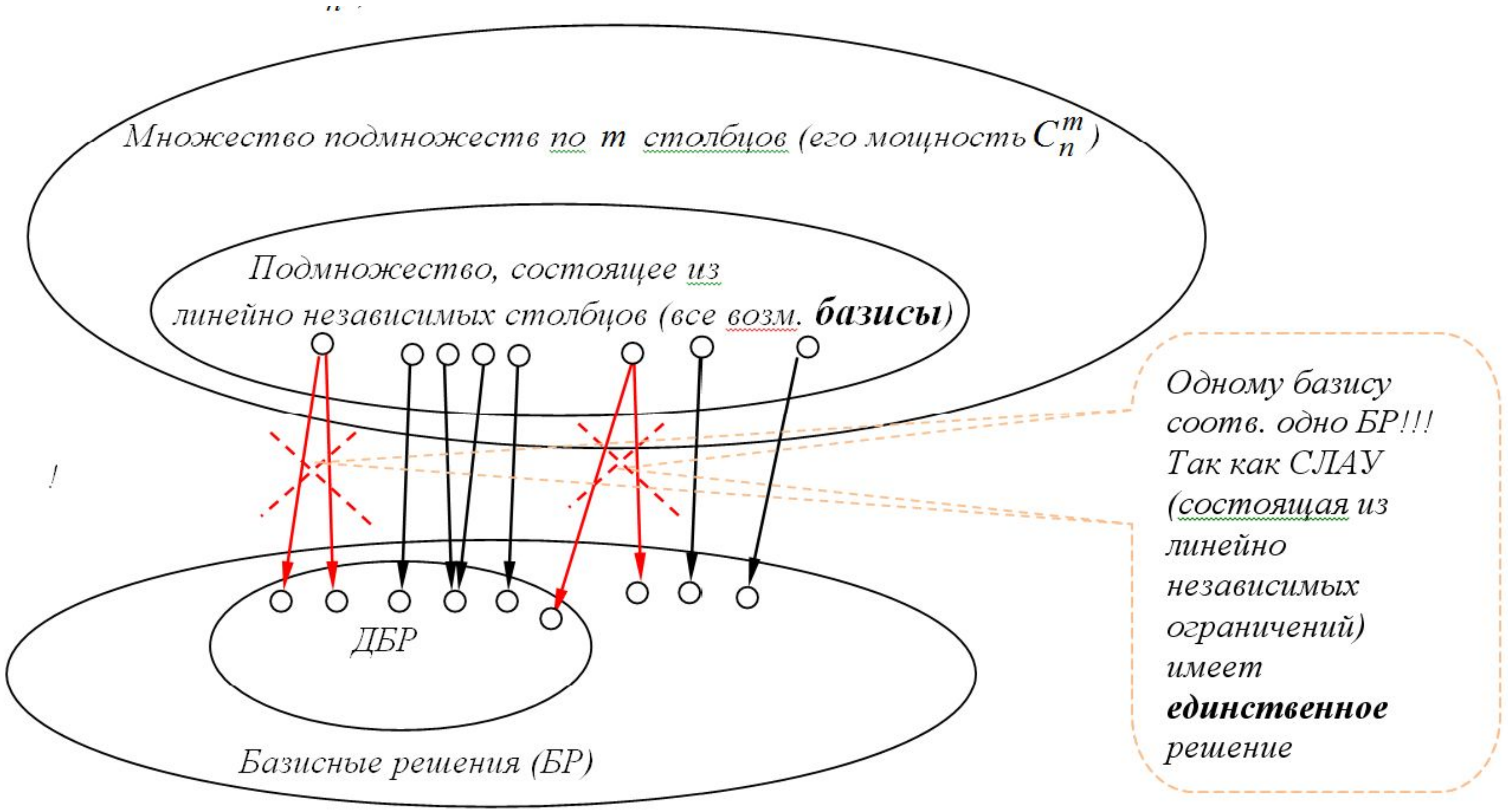
«Достатність» x ВЕРШИНА $\Rightarrow$ x ДБР

Теорема (фундаментальна)

Якщо ЗЛП має оптимальний розв’язок (у обмеженій області завжди, а в необмеженій – залежно від обмеженості цільової функції), то він збігається, принаймні, з одним з ДБР системи обмежень.

Теорема про скінченність множини ДБР ЗЛП

- **Теорема**. *Множина ДБР системи* $Ax = b$ *скінчена*.



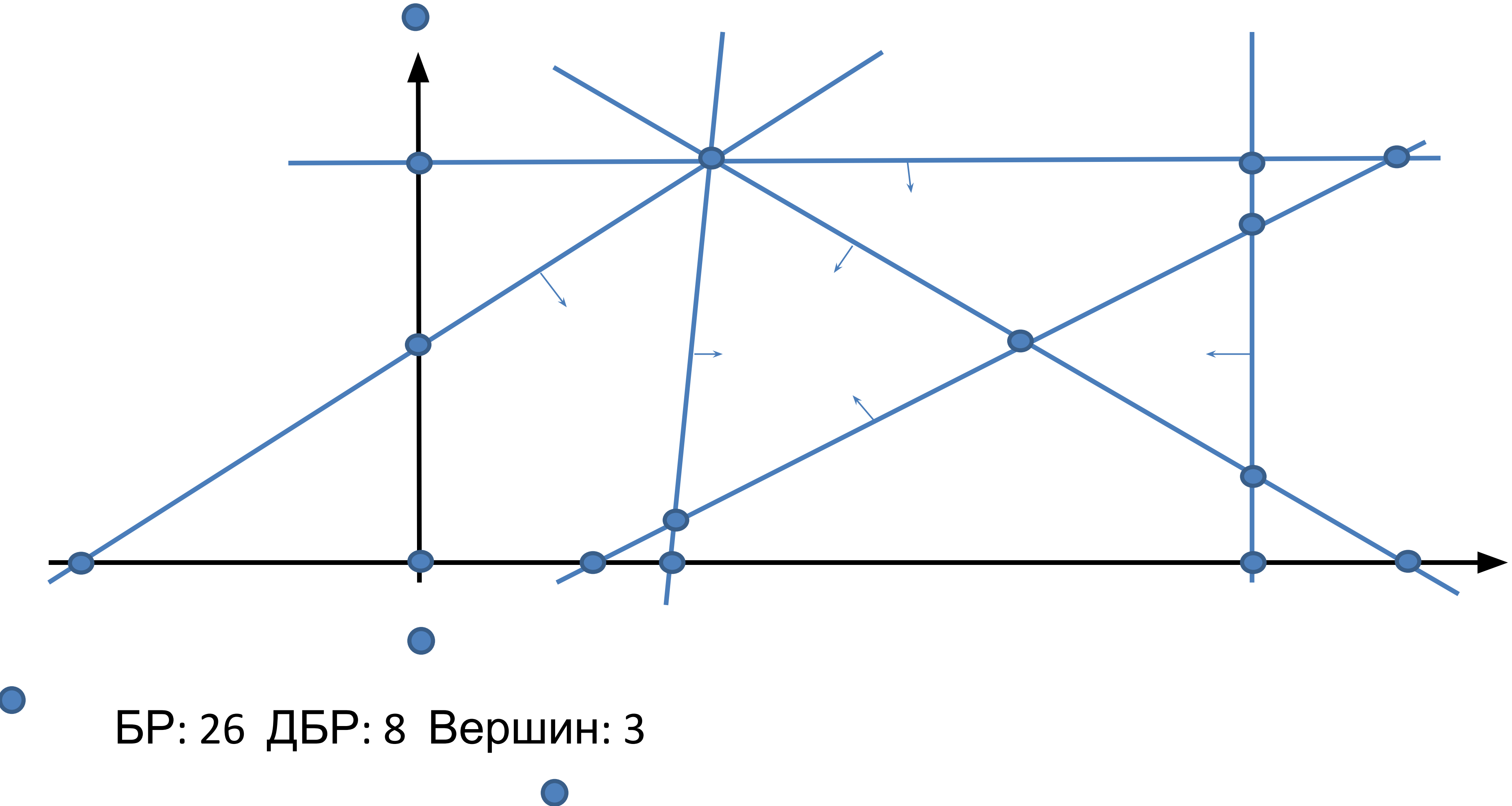
Теорема про скінченність множини ДБР ЗЛП

- **Теорема**. *Множина ДБР системи* $Ax = b$ *скінчена.*

$$\left|\text{Множина базисів}\right| \geq \left|\text{Множина ДБР}\right|$$

БР vs ДБР vs Вершини (екз.завдання)

- Яка кількість БР, ДБР, вершин?



БР: 26 ДБР: 8 Вершин: 3

Теорема про скінченність координат ДБР

(Довести самостійно №)

Теорема.
Нехай елементи матриці A і вектора b є цілими числами, *а*
$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)^T$ *- базисний розв'язок системи* $Ax = b$ *.*
Тоді $\left| x_j \right| \le m! \cdot \alpha^{m-1} \cdot \beta$*, де* $\alpha = \max\limits_{i,j} \left\{ \left| a_{ij} \right| \right\}$ *і* $\beta = \max\limits_{i=1,\ldots,m} \left\{ \left| b_j \right| \right\}$*.*

Приклад екзаменаційного завдання

Знайти верхню межу компонентів ДБР ЗЛП:

$$z = 2x_2 + 3x_4 + 3x_5 - x_6 + 5x_7 \to \max$$

$$\begin{aligned}
x_1 + 9x_2 + x_3 + 7x_4 + 6x_5 + 3x_6 - 2x_7 &= 67 \\
5x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 + 4x_5 + 3x_6 + 3x_7 &= 39 \\
4x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 9x_4 - 2x_5 - 2x_6 + 3x_7 &= 71 \\
5x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 3x_4 + 2x_5 + 3x_6 + 8x_7 &= 55
\end{aligned}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$

$$\left|x_j\right| \leq m! \cdot \alpha^{m-1} \cdot \beta$$

ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ

ТЕМА 3 ВЛАСТИВОСТІ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

3.1 Форми ЗЛП
3.2 Еквівалентність форм ЗЛП
3.3 Багатогранні множини, багатогранники, вершини
3.4 Основні властивості ЗЛП і теореми лінійного програмування

Презентація "Тема 3 підрозділи 3.1 3.2

Презентація "Тема 3, підрозділ 3.3

Презентація. Тема 3 підрозділ 3.4

Приклад завдання теоретичної контрольної роботи №2

ТКР2

Основні позначення ЗЛП (5 балів за 20 питань)