

ЗЛП і її властивості

3.1 Форми ЗЛП

3.2 Еквівалентність форм ЗЛП

3.3 Властивості множини допустимих розв'язків ЗЛП
(багатогранні множини, багатогранники, вершини , грані)

3.4 Основні властивості ЗЛП і теореми лінійного програмування

Основні властивості ЗЛП і теореми лінійного програмування

- **1. Застосування класичного апарату математичного аналізу для вирішення ЗЛП**
- **2. Теорема про оптимальність вершини багатогранника**
- **3. Базисні розв'язки**
- **4. Теореми ЛП**
 - Теорема «ДБР \leftrightarrow вершина»
 - Фундаментальна теорема
 - Теорема про скінченність множини ДБР ЗЛП
 - Теорема про скінченність координат ДБР

Існування глобального розв'язку

Теорема Вейерштрасса.

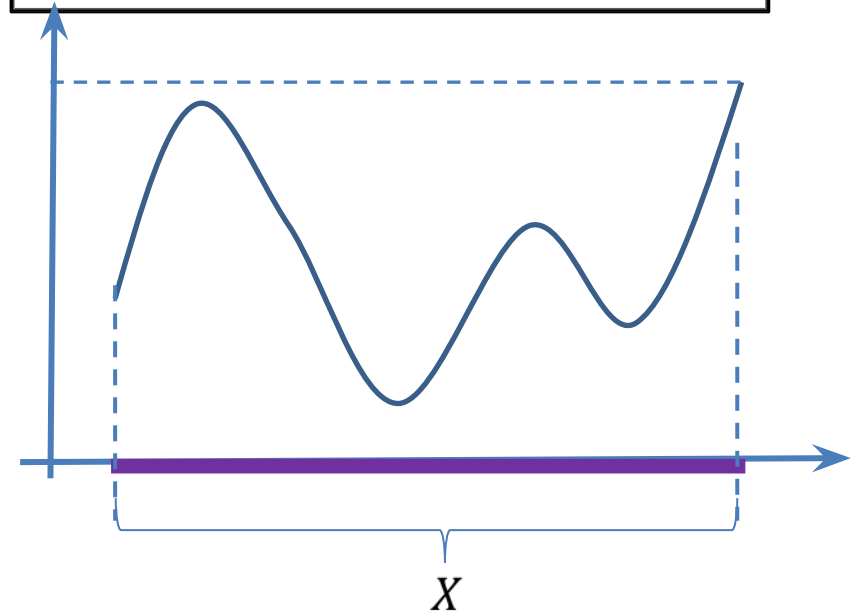
Нехай X - замкнута і обмежена множина в R^n ,

$f(x)$ - безперервна функція на X .

Тоді глобальний розв'язок задачі $f(x) \rightarrow \max, x \in X$, існує.



Безперервна функція $f(x)$ досягає на замкнутій обмеженій множині X свого максимуму у внутрішній або граничній точці



Існування глобального розв'язку

Теорема Вейерштрасса.

Нехай X - замкнута і обмежена множина в R^n ,

$f(x)$ - безперервна функція на X .

Тоді глобальний розв'язок задачі

$f(x) \rightarrow \max, x \in X$, існує.



Безперервна функція $f(x)$ досягає на замкнутій обмеженій множині X свого максимуму у внутрішній або граничній точці

В ЗЛП:

МДР – багатогранник X (замкнута і обмежена множина в R^n),

$f(x) = c^T x$ – безперервна функція на X .



ЗЛП має розв'язок

Максимум функції $c^T x$ - у внутрішній або граничній точці багатогранника X

Знаходження максимуму функції n змінних

Знайти максимум функції $f(x)$ на множині X :

$$f(x) \rightarrow \max_{x \in X},$$

$X \subset R^n$ – замкнена і обмежена множина
 $f(x)$ – диференціюється на множині X .

Необхідною умовою максимуму функції $f(x)$ у внутрішній точці x^0 множини X є рівність градієнта $grad f(x^0)$ нульовому вектору.

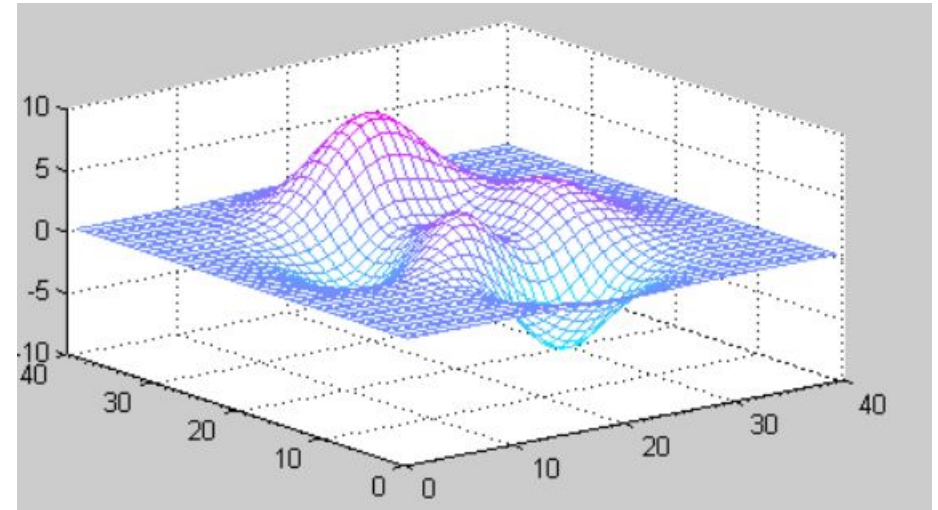
Знаходження максимуму функції n змінних

Для знаходження максимуму функції $f(x)$ на множині X треба:

1) знайти всі внутрішні точки множини $x^i \in X$ $i = \overline{1, k}$, для яких виконується:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = 0, \\ \dots, \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = 0 \end{array} \right.$$

2) обчислити значення $f(x^1), f(x^2), \dots, f(x^k)$ і значення $f(x)$ в усіх точках границі множини X , а потім вибрати з них максимальне.



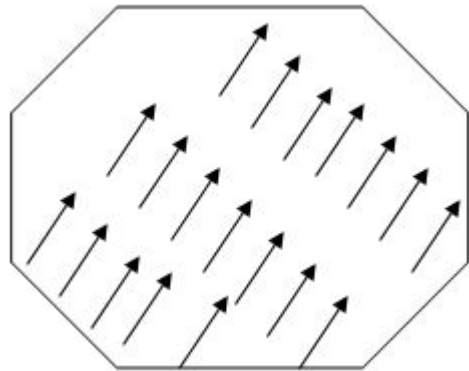
Знаходження максимуму функції n змінних (випадок ЗЛП)

ЗЛП:

$$f(x) = c^T x \rightarrow \max, \\ x \in X,$$

X – багатогранник

$$1) \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x) \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$



Функція $c^T x$ не має локальних максимумів

\Rightarrow

Максимумі функції $c^T x$ досягається на границі множини X

Величина постійна і не залежить від точки обчислення

Теорема про оптимальність вершини багатогранника

Маємо ЗЛП:

$$c^T x \rightarrow \max , \\ x \in X .$$

Теорема. *Нехай допустима множина X задачі ЛП є багатогранником. Тоді ЦФ $c^T x$ досягає свого максимуму у вершині X .*

Якщо функція $c^T x$ набуває максимального значення більш ніж в одній точці, то вона досягає того ж значення в будь-якій точці, що є їх опуклою лінійною комбінацією.

Теорема про оптимальність вершини багатогранника

- Доведення частини I: «максимум у вершині»


Нехай x^1, x^2, \dots, x^k - вершини багатогранника X ,
 x^* - оптимальний розв'язок задачі, тобто

$$c^T x^* \geq c^T x \text{ для } \forall x \in X.$$

Якщо x^* - вершина, то перша частина теореми доведена.

Якщо ж точка x^* не є вершиною многогранника X , то вона може бути представлена у вигляді опуклої лінійної комбінації його вершин:

$$x^* = \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot x^i, \quad \forall \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1.$$


$$c^T x^* = \sum_{i=1}^k \lambda_i c^T x^i$$

Теорема про оптимальність вершини багатогранника.

- Доведення частини I: «максимум у вершині»

Нехай x^1, x^2, \dots, x^k - вершини багатогранника X ,
 x^* - оптимальний розв'язок задачі, тобто

$$c^T x^* \geq c^T x \text{ для } \forall x \in X.$$

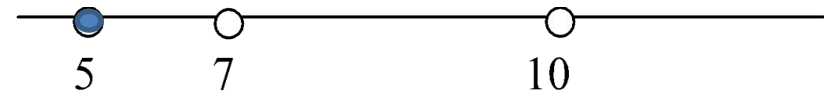
Якщо x^* - вершина, то перша частина теореми доведена.

Якщо ж точка x^* не є вершиною многогранника X , то вона може бути представлена у вигляді опуклої лінійної комбінації його вершин:

$$x^* = \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot x^i, \quad \forall \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1.$$

$$c^T x^* = \sum_{i=1}^k \lambda_i c^T x^i$$

$$B = \sum_i \lambda_i A_i \quad \forall 0 \leq \lambda_i \leq 1 \Rightarrow B \leq \max\{A_i\}$$



Теорема про оптимальність вершини багатогранника.

- Доведення частини I: «максимум у вершині»

Нехай x^1, x^2, \dots, x^k - вершини багатогранника X ,
 x^* - оптимальний розв'язок задачі, тобто

$$c^T x^* \geq c^T x \text{ для } \forall x \in X.$$

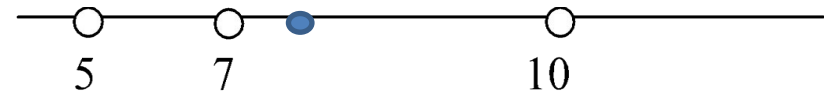
Якщо x^* - вершина, то перша частина теореми доведена.

Якщо ж точка x^* не є вершиною многогранника X , то вона може бути представлена у вигляді опуклої лінійної комбінації його вершин:

$$x^* = \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot x^i, \quad \forall \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1.$$

$$c^T x^* = \sum_{i=1}^k \lambda_i c^T x^i$$

$$B = \sum_i \lambda_i A_i \quad \forall 0 \leq \lambda_i \leq 1 \Rightarrow B \leq \max\{A_i\}$$



Теорема про оптимальність вершини багатогранника

- Доведення частини I: «максимум у вершині»

Нехай x^1, x^2, \dots, x^k - вершини багатогранника X ,
 x^* - оптимальний розв'язок задачі, тобто

$$c^T x^* \geq c^T x \text{ для } \forall x \in X.$$

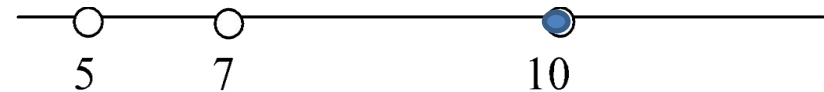
Якщо x^* - вершина, то перша частина теореми доведена.

Якщо ж точка x^* не є вершиною многогранника X , то вона може бути представлена у вигляді опуклої лінійної комбінації його вершин:

$$x^* = \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot x^i, \quad \forall \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1.$$

$$c^T x^* = \sum_{i=1}^k \lambda_i c^T x^i$$

$$B = \sum_i \lambda_i A_i \quad \forall 0 \leq \lambda_i \leq 1 \Rightarrow B \leq \max\{A_i\}$$



Теорема про оптимальність вершини багатогранника

- Доведення частини I: «максимум у вершині»

Нехай x^1, x^2, \dots, x^k - вершини багатогранника X ,
 x^* - оптимальний розв'язок задачі, тобто

$$c^T x^* \geq c^T x \text{ для } \forall x \in X.$$

Якщо x^* - вершина, то перша частина теореми доведена.

Якщо ж точка x^* не є вершиною многогранника X , то вона може бути представлена у вигляді опуклої лінійної комбінації його вершин:

$$x^* = \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot x^i, \quad \forall \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1.$$

$$c^T x^* = \sum_{i=1}^k \lambda_i c^T x^i$$

$$c^T x^* = \sum_{i=1}^k \lambda_i c^T x^i \leq c^T x^S, \quad \text{де } c^T x^S = \max_{1 \leq i \leq k} c^T x^i$$

$$B = \sum_i \lambda_i A_i \quad \forall 0 \leq \lambda_i \leq 1 \Rightarrow B \leq \max\{A_i\}$$

Але за припущенням, x^* - оптимальний розв'язок, отже $c^T x^* = c^T x^S$, тобто існує вершина x^S у якій лінійна функція $c^T x$ набуває максимального значення.

Теорема про оптимальність вершини багатогранника

- Доведення частини II

Нехай $c^T x$ набуває максимального значення в точках x^1, x^2, \dots, x^p тобто $c^T x^i = z^0, i = \overline{1, p}$

Візьмемо деяку ОЛК цих точок:

$$x = \sum_{i=1}^p \lambda_i x^i, \quad \forall \lambda_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1.$$

$$c^T x = c^T \sum_{i=1}^p \lambda_i x^i = \sum_{i=1}^p \lambda_i c^T x^i = \sum_{i=1}^p \lambda_i z^0 = z^0 \sum_{i=1}^p \lambda_i = z^0.$$

Отже, ЦФ $c^T x$ досягає максимального значення z^0 у довільній точці x , що є ОЛК точок x^1, x^2, \dots, x^p . ■

Базисні розв'язки

(Алгебраїчне представлення вершин)

- ЗЛП:

$$\max z = 2x_1 + 1x_2$$

$$-x_1 + x_2 \leq 1,$$

$$x_2 \leq 2,$$

$$3x_1 + 3x_2 \leq 12,$$

$$2x_1 \leq 6,$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

ЗЛП в
КФ

$$\max z = 2x_1 + 1x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4$$

$$-x_1 + x_2 + s_1 = 1,$$

$$x_2 + s_2 = 2,$$

$$3x_1 + 3x_2 + s_3 = 12,$$

$$2x_1 + s_4 = 6,$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0.$$

Базисні розв'язки

(Алгебраїчне представлення вершин)

$$\max z = 2x_1 + 1x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4$$

$$-x_1 + x_2 + s_1 = 1, \quad (1)$$

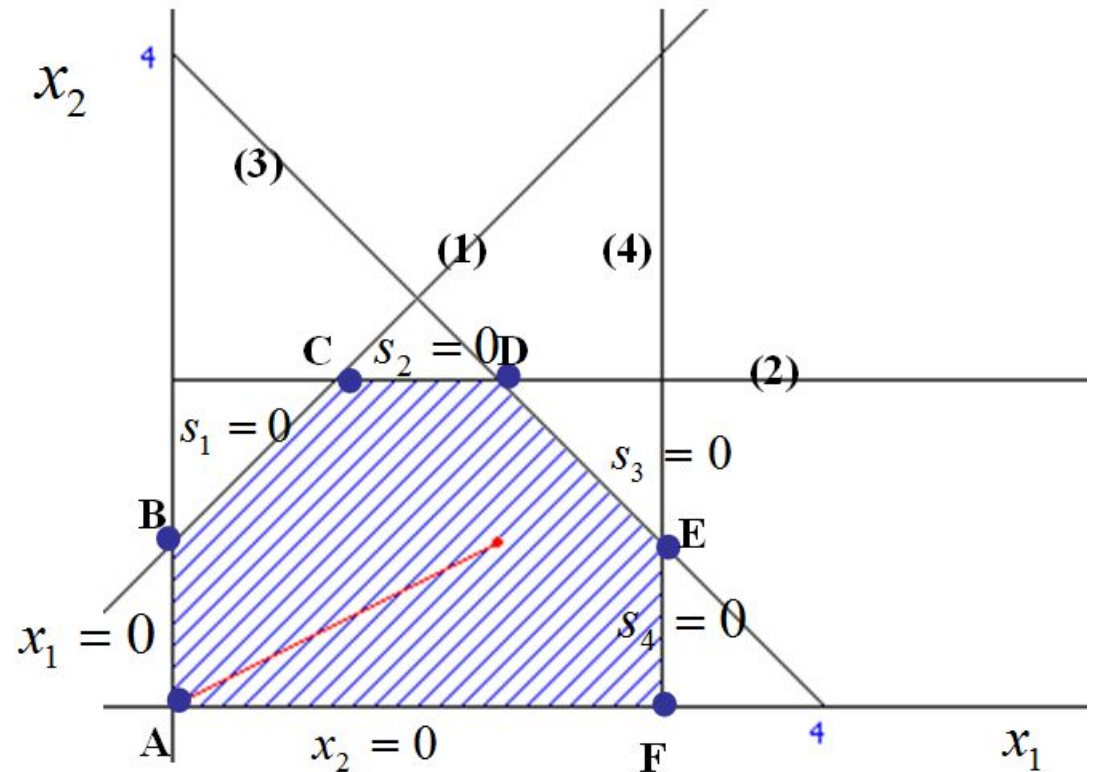
$$x_2 + s_2 = 2, \quad (2)$$

$$3x_1 + 3x_2 + s_3 = 12, \quad (3)$$

$$2x_1 + s_4 = 6, \quad (4)$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0.$$

Кожну точку цієї множини можна визначити за допомогою шести змінних $x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4$



Базисні розв'язки

(Алгебраїчне представлення вершин)

$$\max z = 2x_1 + 1x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4$$

$$-x_1 + x_2 + s_1 = 1, \quad (1)$$

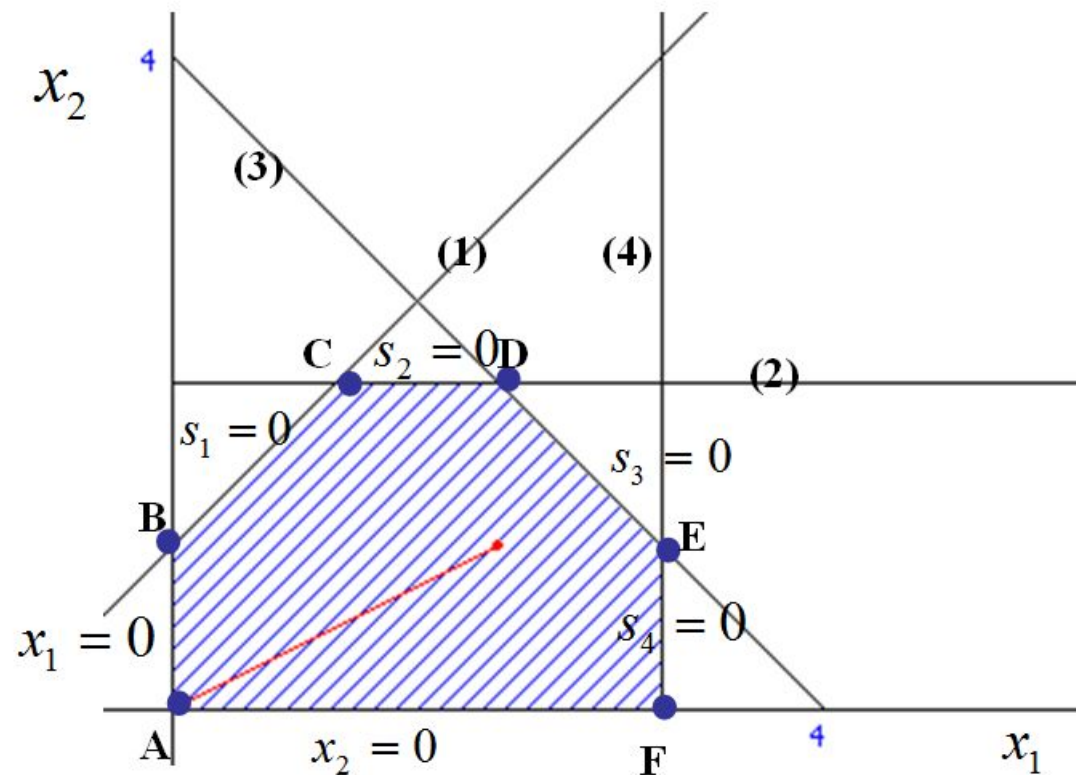
$$x_2 + s_2 = 2, \quad (2)$$

$$3x_1 + 3x_2 + s_3 = 12, \quad (3)$$

$$2x_1 + s_4 = 6, \quad (4)$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0.$$

Вершина	Змінні	
	нульові	ненульові
A	x_1, x_2	s_1, s_2, s_3, s_4



Базисні розв'язки

(Алгебраїчне представлення вершин)

$$\max z = 2x_1 + 1x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4$$

$$-x_1 + x_2 + s_1 = 1, \quad (1)$$

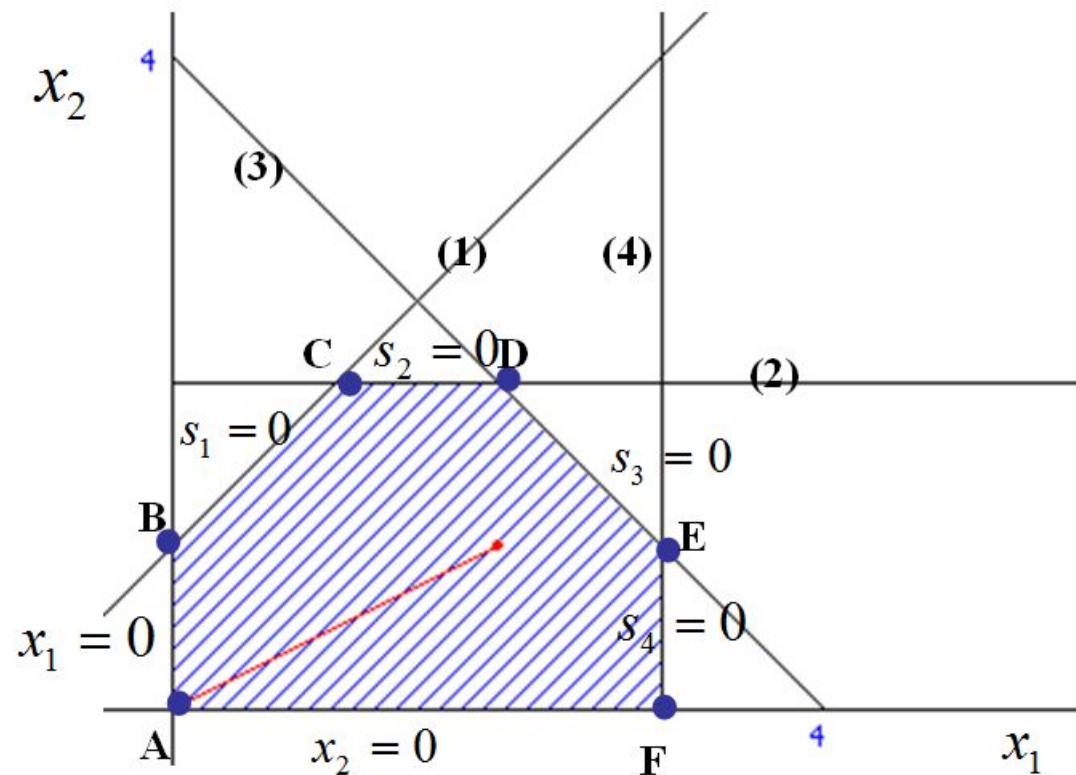
$$x_2 + s_2 = 2, \quad (2)$$

$$3x_1 + 3x_2 + s_3 = 12, \quad (3)$$

$$2x_1 + s_4 = 6, \quad (4)$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0.$$

Вершина	Змінні	
	нульові	ненульові
A	x_1, x_2	s_1, s_2, s_3, s_4
B	x_1, s_1	s_2, s_3, x_2



Базисні розв'язки

(Алгебраїчне представлення вершин)

$$\max z = 2x_1 + 1x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4$$

$$-x_1 + x_2 + s_1 = 1, \quad (1)$$

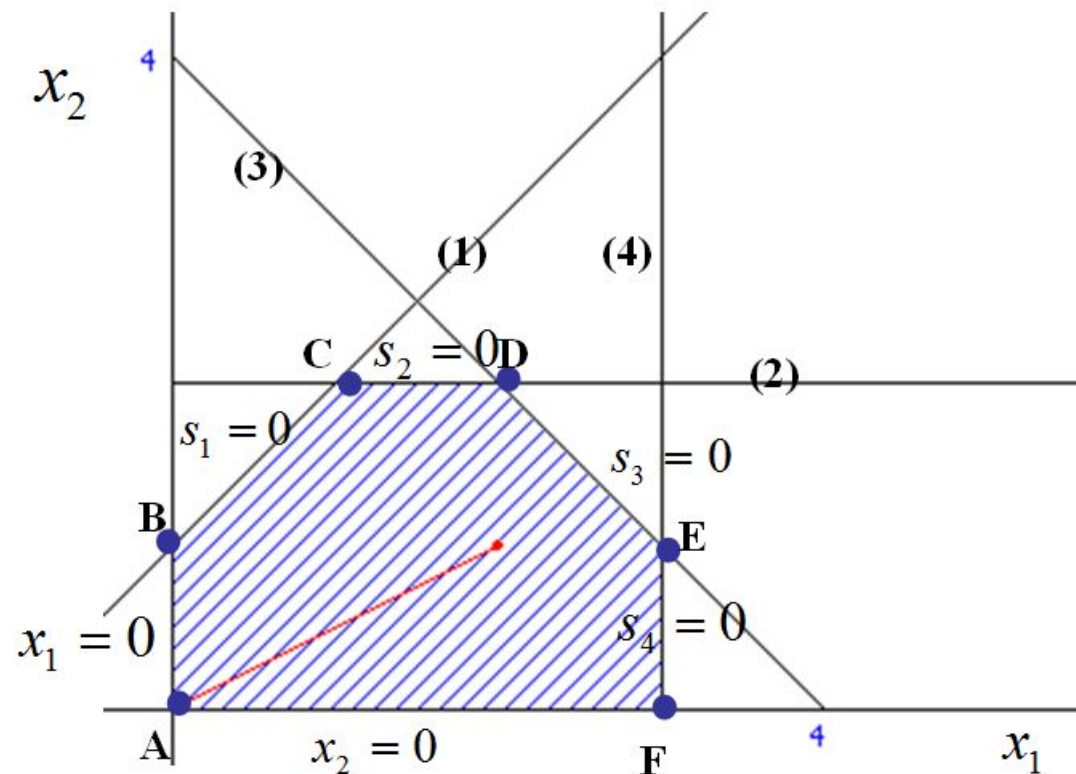
$$x_2 + s_2 = 2, \quad (2)$$

$$3x_1 + 3x_2 + s_3 = 12, \quad (3)$$

$$2x_1 + s_4 = 6, \quad (4)$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0.$$

Вершина	Змінні	
	нульові	ненульові
<i>A</i>	x_1, x_2	s_1, s_2, s_3, s_4
<i>B</i>	x_1, s_1	s_2, s_3, x_2
<i>C</i>	s_2, s_1	s_3, s_4, x_2, x_1
<i>D</i>	s_2, s_3	s_1, s_4, x_2, x_1
<i>E</i>	s_4, s_3	s_1, s_2, x_2, x_1
<i>F</i>	s_4, x_2	s_3, s_1, x_1

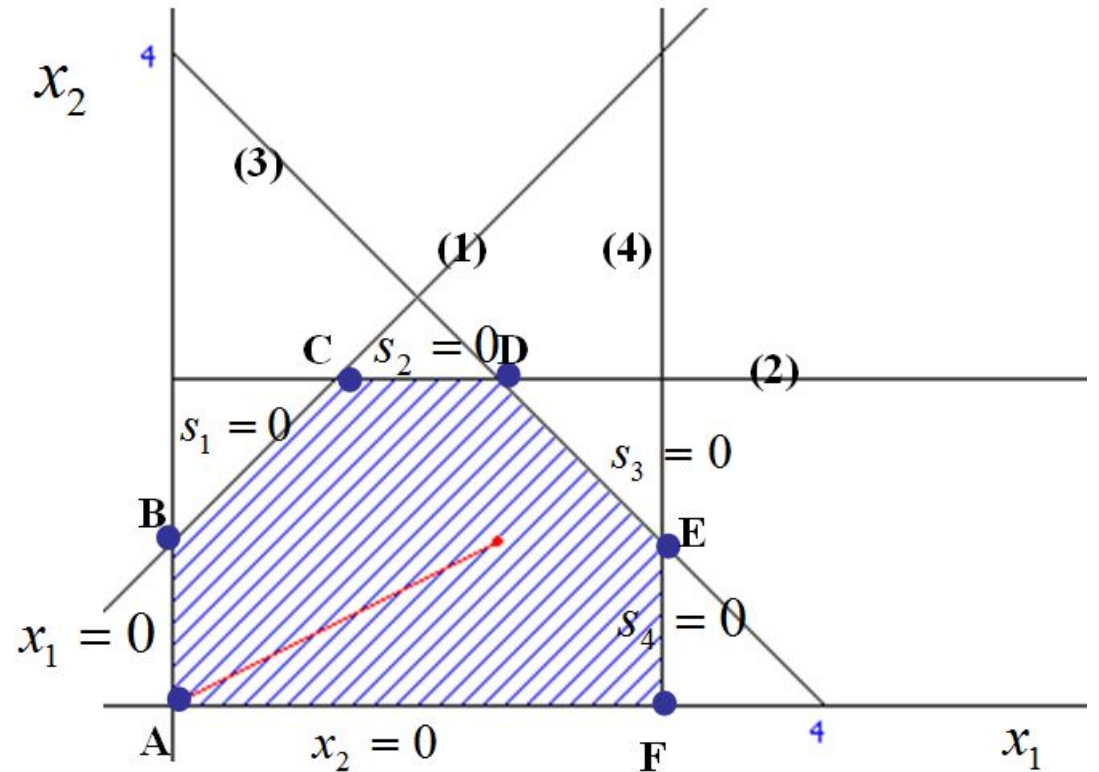


Базисні розв'язки

(Алгебраїчне представлення вершин)

Вершина	Змінні	
	нульові	ненульові
<i>A</i>	x_1, x_2	s_1, s_2, s_3, s_4
<i>B</i>	x_1, s_1	s_2, s_3, x_2
<i>C</i>	s_2, s_1	s_3, s_4, x_2, x_1
<i>D</i>	s_2, s_3	s_1, s_4, x_2, x_1
<i>E</i>	s_4, s_3	s_1, s_2, x_2, x_1
<i>F</i>	s_4, x_2	s_3, s_1, x_1, s_2

– канонічна модель містить $m = 4$ основних рівнянь і $n = 6$ змінних, тому в кожній з вершин дві $(n - m)$ змінні повинні мати нульові значення;



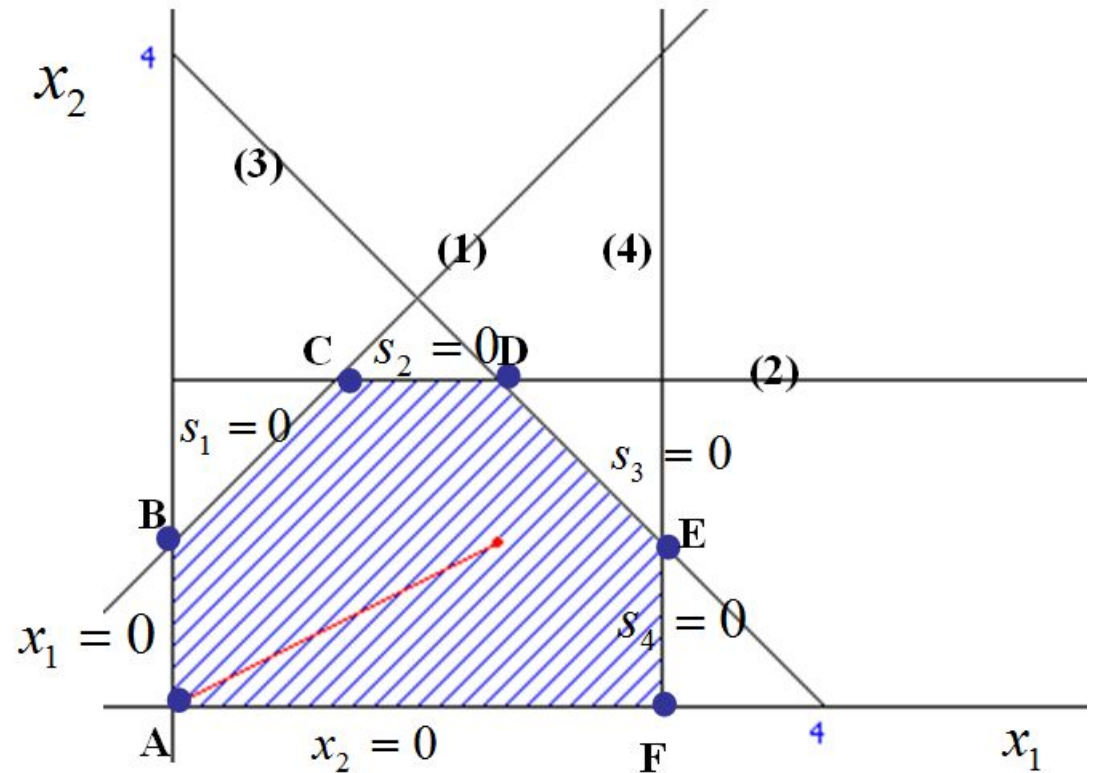
Базисні розв'язки

(Алгебраїчне представлення вершин)

Вершина	Змінні	
	нульові	ненульові
<i>A</i>	x_1, x_2	s_1, s_2, s_3, s_4
<i>B</i>	x_1, s_1	s_2, s_3, x_2
<i>C</i>	s_2, s_1	s_3, s_4, x_2, x_1
<i>D</i>	s_2, s_3	s_1, s_4, x_2, x_1
<i>E</i>	s_4, s_3	s_1, s_2, x_2, x_1
<i>F</i>	s_4, x_2	s_3, s_1, x_1, s_2

ЗАКОНОМІРНОСТІ:

- канонічна модель містить $m = 4$ основних рівнянь і $n = 6$ змінних, тому в кожній з вершин дві $(n - m)$ змінні повинні мати нульові значення;
- суміжні вершини відрізняються лише однією змінною в кожній групі



Базисні розв'язки

(Алгебраїчне представлення вершин)

$$\max z = 2x_1 + 1x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4$$

$$-x_1 + x_2 + s_1 = 1, \quad (1)$$

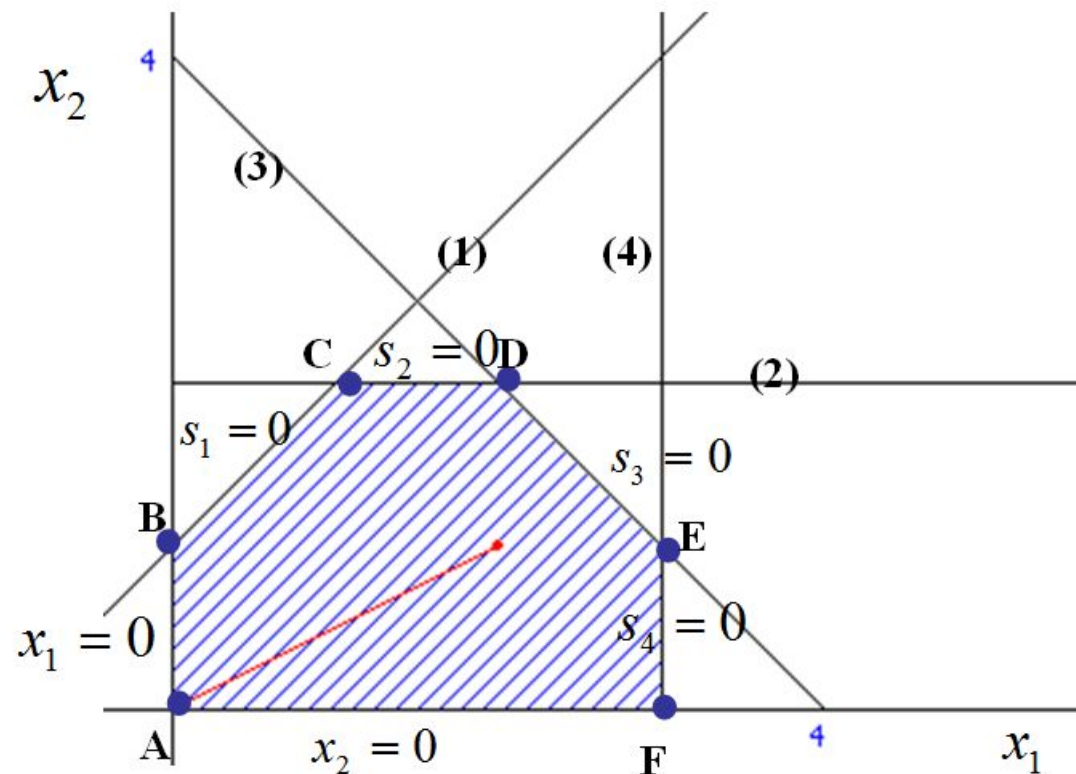
$$x_2 + s_2 = 2, \quad (2)$$

$$3x_1 + 3x_2 + s_3 = 12, \quad (3)$$

$$2x_1 + s_4 = 6, \quad (4)$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0.$$

З першої закономірності \implies всі вершини визначаються як всі **однозначні невід'ємні розв'язки системи рівнянь, в яких $n - m$ змінних дорівнюють нулю.**



Базисні розв'язки

(Алгебраїчне представлення вершин)

$$\max z = 2x_1 + 1x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + 0s_4$$

$$-x_1 + x_2 + s_1 = 1, \quad (1)$$

$$x_2 + s_2 = 2, \quad (2)$$

$$3x_1 + 3x_2 + s_3 = 12, \quad (3)$$

$$2x_1 + s_4 = 6, \quad (4)$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, s_4 \geq 0.$$

$$s_1 = s_2 = 0$$

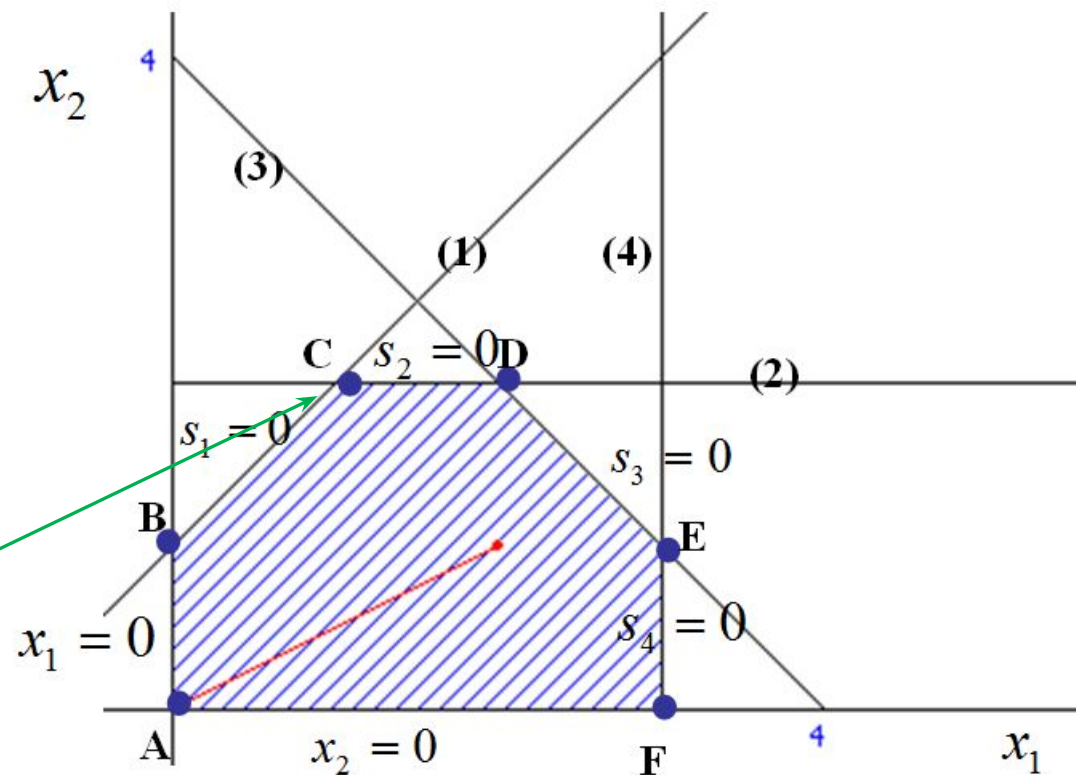
$$x_2 = 1,$$

$$x_2 = 2,$$

$$3x_1 + 3x_2 + s_3 = 12,$$

$$2x_1 + s_4 = 6,$$

$$x_1 = 1, x_2 = 2, s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 = 3, s_4 = 4$$



Щоб система мала єдиний розв'язок, стовпці матриці обмежень повинні бути **лінійно незалежними**

Базисні розв'язки

(Алгебраїчне представлення вершин)

Нехай маємо канонічну ЗЛП

$$c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_n \cdot x_n \rightarrow \max,$$

$$a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n = b_1,$$

\dots

$$a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n = b_m,$$

$$x_j \geq 0, j = \overline{1, n}.$$

$$a_{*1} \cdot x_1 + a_{*2} \cdot x_2 + \dots + a_{*n} \cdot x_n = b$$

Нехай задача має допустимі розв'язки і ранг матриці A дорівнює числу обмежень m ,
вважатимемо далі, що $n > m$,

Базисні розв'язки

(Алгебраїчне представлення вершин)

$$a_{*1} \cdot x_1 + a_{*2} \cdot x_2 + \dots + a_{*n} \cdot x_n = b$$

Визначення. **Базисом** \mathcal{B} матриці A називається набір з m лінійно незалежних стовпців $\mathcal{B} = \{a_{*j_1}, a_{*j_2}, \dots, a_{*j_m}\}$.

Визначення. **Базисною матрицею** називається $(m \times m)$

– матриця, складена із стовпців, що входять в базис \mathcal{B} :

$$B = \left[a_{*j_1} \mid a_{*j_2} \mid \dots \mid a_{*j_m} \right].$$

Визначення. **Базисним розв'язком**, відповідним базису

\mathcal{B} , називається вектор $x \in R^n$ у якому

– $x_j = 0$ при $a_{*j} \notin \mathcal{B}$;

– x_{j_k} є k -й компонент вектора $B^{-1}b$, де $k = 1, \dots, m$.

Процедура знаходження базисних розв'язків (БР)

1) Вибрати множину \mathcal{B} , що складається з m лінійно незалежних стовпців матриці A .

2) Покласти рівними 0 всі компоненти вектора x які відповідні стовпцям, що не входять в \mathcal{B} . Ці змінні називатимемо **небазисними** (їх $n - m$).

3) Розв'язати m отриманих рівнянь для визначення тих компонент вектора x , що залишилися. Вони називатимуться **базисними змінними** (їх m)

Допустимі базисні розв'язки (ДБР)

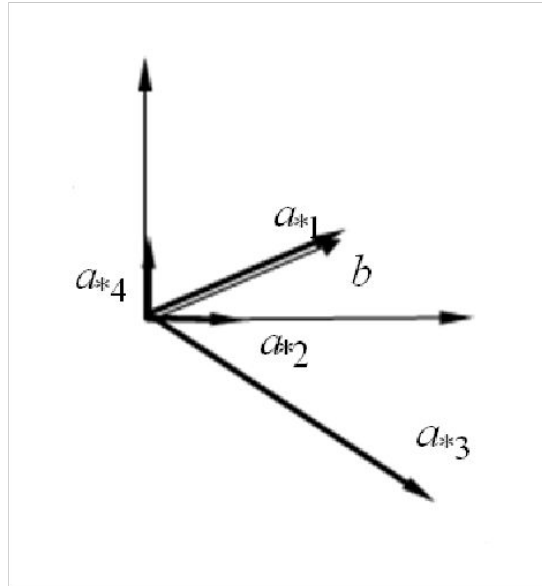
- **Визначення.** Розв'язок x називається **допустимим базисним розв'язком (ДБР)**, якщо він є базисним і всі його компоненти невід'ємні.
- Якщо нульовий вектор є допустимим, то його завжди вважатимемо за базисний.
- **Визначення.** ДБР називається **невиродженим**, якщо він має точно m додатних компонентів (координат)

Приклад екзаменаційного завдання (0)

Нехай дана система обмежень з $m = 2$ та $n = 4$:

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2,$$

$$x_1 - 2x_3 + x_4 = 1.$$



Чи є базисом наступні множини векторів?

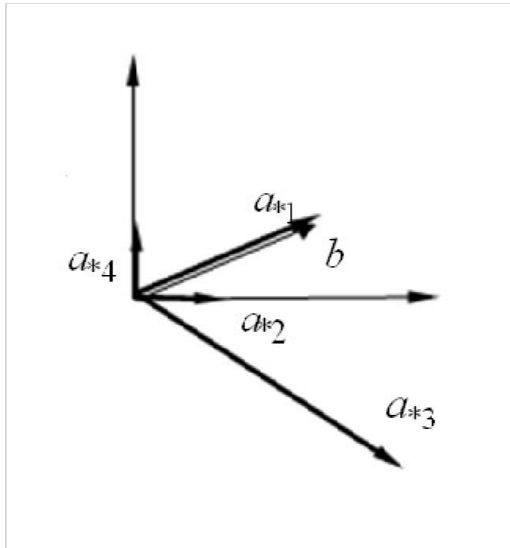
Якщо так, то знайти відповідний базисний розв'язок.

Чи є він допустимим?

Приклад екзаменаційного завдання (1)

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2,$$

$$x_1 - 2x_3 + x_4 = 1.$$



2	1	3	0
1	0	-2	1

$$\{a_{*2}, a_{*4}\} = \mathcal{B}$$

Чи є базисом множина векторів $\{a_{*2}, a_{*4}\}$?
Якщо так, то знайти відповідний базисний розв'язок.
Чи є він допустимим?

$$x_1 = 0$$

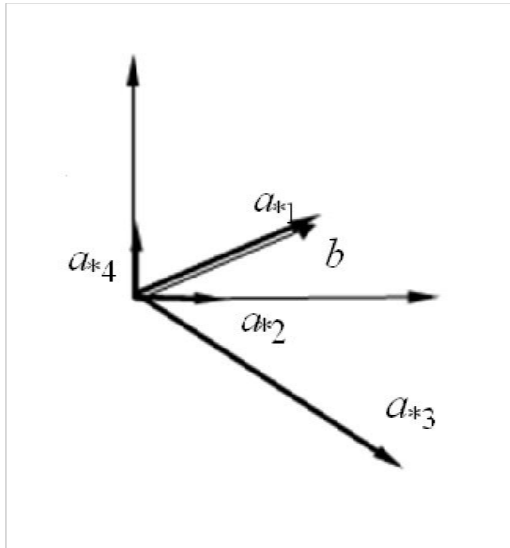
$$x_3 = 0$$

$$\begin{matrix} \boxed{} & x_2 & \boxed{} & = 2, \\ \boxed{} & & \boxed{} & x_4 = 1. \end{matrix}$$

$$x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{ДБР}$$

Приклад екзаменаційного завдання (2)

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 2, \\ x_1 - 2x_3 + x_4 &= 1. \end{aligned}$$



2	1	3	0
1	0	-2	1

$$\{a_{*2}, a_{*3}\} = \mathcal{B}$$

Чи є базисом множина векторів $\{a_{*2}, a_{*3}\}$?
Якщо так, то знайти відповідний базисний розв'язок.
Чи є він допустимим?

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 \\ x_4 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 + 3x_3 &= 2, \\ -2x_3 &= 1. \end{aligned}$$

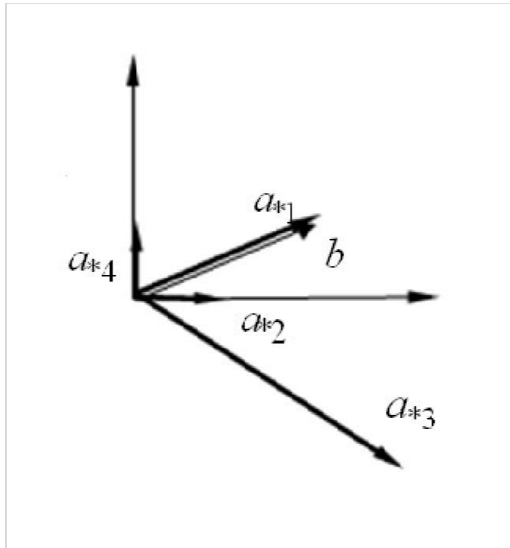
$$x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

БР не
допустимий

Приклад екзаменаційного завдання (3)

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2,$$

$$x_1 - 2x_3 + x_4 = 1.$$



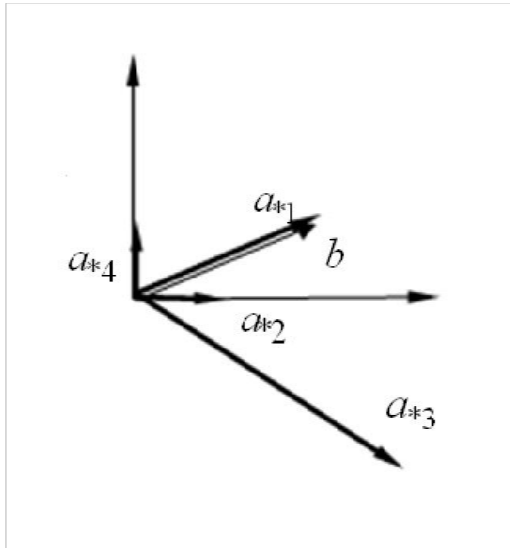
Чи є базисом множина векторів $\{a_{*1}, a_{*2}, a_{*3}\}$?
Якщо так, то знайти відповідний базисний розв'язок.
Чи є він допустимим?

2	1	3	0
1	0	-2	1

Приклад екзаменаційного завдання (4)

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2,$$

$$x_1 - 2x_3 + x_4 = 1.$$



2	1	3	0
1	0	-2	1

Чи є базисом множина векторів $\{a_{*1}, a_{*2}\}$?

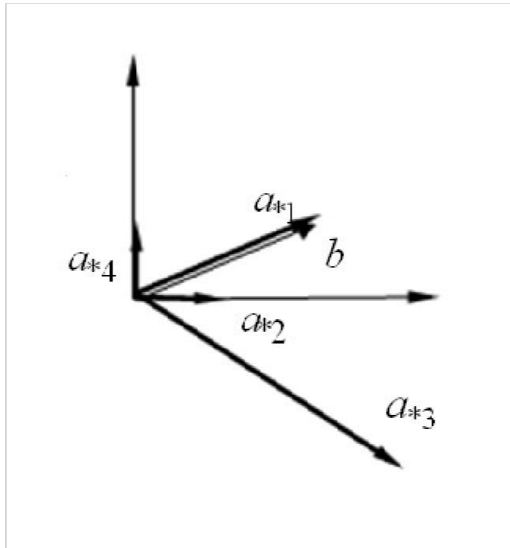
Якщо так, то знайти відповідний базисний розв'язок.

Чи є він допустимим?

Приклад екзаменаційного завдання (5)

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2,$$

$$x_1 - 2x_3 + x_4 = 1.$$



Чи є базисом множина векторів $\{a_{*1}, a_{*4}\}$?

Якщо так, то знайти відповідний базисний розв'язок.

Чи є він допустимим?

2	1	3	0
1	0	-2	1

$$x^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 7/2 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x^4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x^5 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ВИСНОВОК:

- 1) оскільки не вироджений ДБР містить точно m додатних координат, то його базис завжди єдиний;
- 2) базис виродженого розв'язку визначений неоднозначно.

ДБР \leftrightarrow ВЕРШИНА

Теорема. Вектор $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ тоді і тільки тоді є допустимим базисним розв'язком задачі

$$c^T x \rightarrow \max,$$

$$a_{*1} \cdot x_1 + a_{*2} \cdot x_2 + \dots + a_{*n} \cdot x_n = b,$$

$$x \geq 0,$$

коли точка $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ є вершиною його багатогранної множини X .

Доведення

● «Необхідність»: x ДБР \Rightarrow x ВЕРШИНА

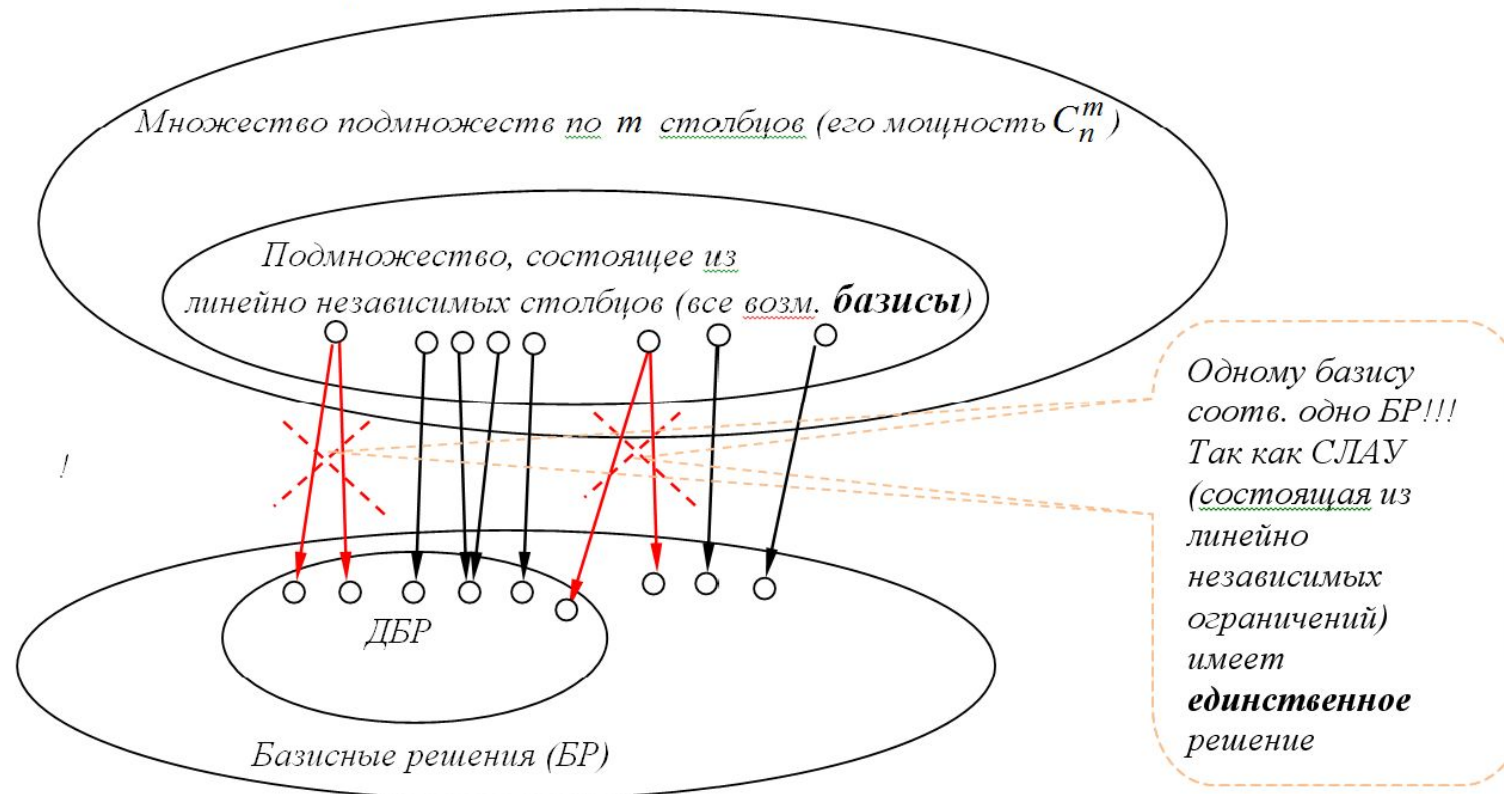
«Достатність» x ВЕРШИНА \Rightarrow x ДБР

Теорема (фундаментальна)

Якщо ЗЛП має оптимальний розв'язок (у обмеженій області завжди, а в необмеженій – залежно від обмеженості цільової функції), то він збігається, принаймні, з одним з ДБР системи обмежень.

Теорема про скінченність множини ДБР ЗЛП

Теорема. Множина ДБР системи $Ax = b$ скінчена.



Теорема про скінченність множини ДБР ЗЛП

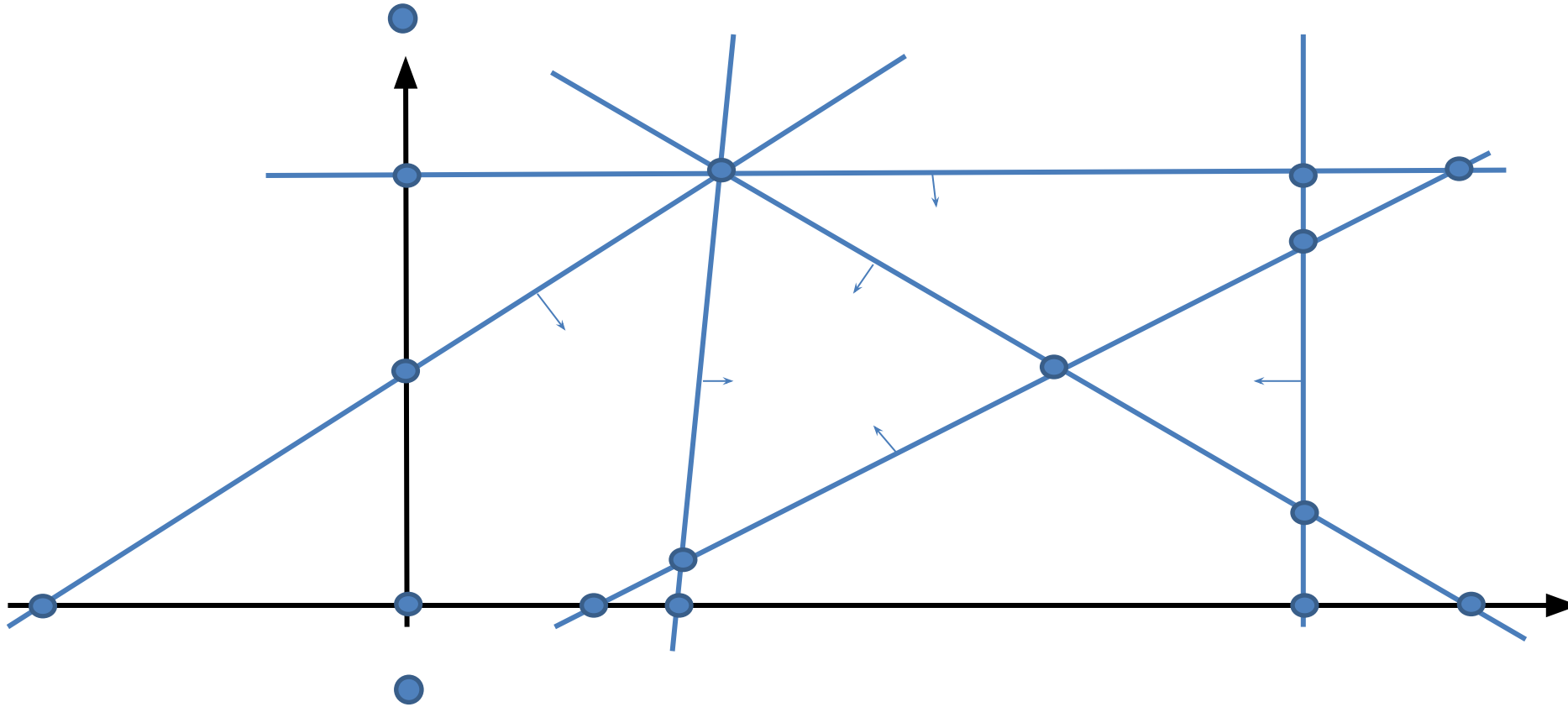
• Теорема. Множина ДБР системи $Ax = b$ скінчена.



$$\left| \text{Множина базисів} \right| \geq \left| \text{Множина ДБР} \right|$$

БР vs ДБР vs Вершини (екз.завдання)

- Яка кількість БР, ДБР, вершин?



БР: 26 ДБР: 8 Вершин: 3

Теорема про скінченність координат ДБР

(Довести самостійно №)

Теорема.

Нехай елементи матриці A і вектора b є цілими числами, а

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ - базисний розв'язок системи $Ax = b$.

Тоді $|x_j| \leq m! \cdot \alpha^{m-1} \cdot \beta$, де $\alpha = \max_{i,j} \{|a_{ij}|\}$ і $\beta = \max_{i=1, \dots, m} \{|b_j|\}$.

Приклад екзаменаційного завдання

Знайти верхню межу компонентів ДБР ЗЛП:

$$z = 2x_2 + 3x_4 + 3x_5 - x_6 + 5x_7 \rightarrow \max$$

$$x_1 + 9x_2 + x_3 + 7x_4 + 6x_5 + 3x_6 - 2x_7 = 67$$

$$5x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 + 4x_5 + 3x_6 + 3x_7 = 39$$

$$4x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 9x_4 - 2x_5 - 2x_6 + 3x_7 = 71$$

$$5x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 3x_4 + 2x_5 + 3x_6 + 8x_7 = 55$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$

$$|x_j| \leq m! \cdot \alpha^{m-1} \cdot \beta$$

ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ



ТЕМА 3 ВЛАСТИВОСТІ ЗАДАЧІ ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ

3.1 Форми ЗЛП

3.2 Еквівалентність форм ЗЛП

3.3 Багатогранні множини, багатогранники, вершини

3.4 Основні властивості ЗЛП і теореми лінійного програмування



Презентація "Тема 3 підрозділи 3.1 3.2"



Презентація "Тема 3, підрозділ 3.3"



Презентація. Тема 3 підрозділ 3.4



Приклад завдання теоретичної контрольної роботи №2



ТКР2

Основні позначення ЗЛП (5 балів за 20 питань)