Способы решения систем уравнений

Различные способы решения систем уравнений

- метод подстановки
- метод сложения
- метод введения новых переменных
- графический метод

Метод подстановки

- Одно из уравнений системы преобразуют к виду, в котором у выражено через х (или х через у)
- Полученное выражение подставляют вместо у (или вместо х) во второе уравнение. В результате получается уравнение с одной переменной
- Находят корни этого уравнения
- Воспользовавшись выражением у через х(или х через у), находят соответствующие значения х (или у)

Метод сложения

- Преобразовать коэффициенты так, чтобы коэффициенты при x или y были противоположными числами
- Сложить получившиеся уравнения
- Решить уравнение с одной переменной

Метод введения новых переменных

- Замени одно или два выражения в уравнениях системы новыми переменными так, чтобы вновь полученные уравнения стали более простыми.
- Реши полученную систему уравнений методами наиболее подходящим для э той системы уравнений.
- Сделай обратную замену, для того, чтобы найти значения первоначальных переменных.
- Запиши ответ в виде пар значений (x,y), которые были найдены на третьем шаге.

Графический метод

- Выразить в обоих уравнениях системы переменную *y* через переменную *x*
- Построить графики функций в одной системе координат.
- Отметить точки пересечения графиков, выписать их координаты.
- Записать в ответ полученные пары чисел *(x;y)*.

Способ подстановки

Решить систему уравнений: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = -3; \end{cases}$

Решение: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = -3; \end{cases}$ xy = -3; $y = \frac{-3}{x}$

$x^2 + \left(\frac{-3}{x}\right)^2 = 10;$ $x^2 + \frac{9}{x^2} = 10;$ $x^2 \neq 0$ $x^4 - 10x^2 + 9 = 0;$

$x^2 = z,$ $z^2 - 10z + 9 = 0,$ $z_1 = 9;$ $z_2 = 1;$

Если z =9, то $x^2 = 9$, $x_1 = 3$, $x_2 = -3$,

z =1, то $x^2 = 1$, $x_3 = -1$, $x_4 = 1$.

-3,-1,1,3 **отличны от нуля, значит, они являются корнями уравнения:** $x^2 + \frac{9}{x^2} = 10$;

$x_1 = 3$, $y_1 = \frac{-3}{3} = -1$, $x_3 = -1$, $y_3 = \frac{-3}{-1} = 3$,

$x_2 = -3$, $y_2 = \frac{-3}{-3} = 1$, $x_4 = 1$, $y_4 = \frac{-3}{1} = -3$.

Ответ: (3;-1), (-3;1), (-1;3), (1;-3)

Метод сложения

Решить систему уравнений: $\begin{cases} 3m + 2n = 0{,}5, \\ 2m + 5n = 4. \end{cases}$

Умножу первое уравнение системы на число 2, а второе на число -3, получу $\begin{cases} 6m + 4n = 1, \\ -6m - 15n = -12. \end{cases}$

Сложу уравнение системы:

$$6m + 4n + (-6m - 15n) = 1 + (-12),$$
$$6m + 4n - 6m - 15n = 1 - 12,$$
$$-11n = -11$$

Решу уравнение: $n = 1$

Подставлю найденное число вместо *n* в первое уравнение исходной системы: $3m + 2 \cdot 1 = 0{,}5,$

Решу уравнение относительно *m*:

$$3m = -2 + 0{,}5,$$
$$3m = -1{,}5,$$
$$m = -0{,}5.$$

- **Система имеет одно решение:** (-0,5;1)

Ответ: (-0,5;1)

Преимущества и недостатки метода

Преимущества:

- **Систему уравнений легче решать методом сложения, когда коэффициенты при X и Y сразу являются противоположными числами.**
- **Метод позволяет быстро исключить одну из неизвестных переменных и найти другую.**

Недостатки:

- **Метод сложения невозможно применить,когда у переменных в двух уравнениях разные показатели степени.**

Метод введения новых переменных

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = -3; \end{cases}$$

Пусть $xy = u$ $x + y = v$ и учитывая, что

$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = v^2 - 2u$ получим: $\begin{cases} v^2 - 2u = 10, \\ u = -3. \end{cases}$

Если u=-3, то $v^2 + 6 = 10,$ $v^2 = 4,$ $v = 2$ **или** $v = -2,$

Тогда получим: $\begin{cases} x + y = 2, \\ xy = -3; \end{cases}$ **и** $\begin{cases} x + y = 2, \\ xy = -3. \end{cases}$

Полученные системы тоже являются симметричными системами, которые уже решали.

Итак, (3;1), (-1;3), (-3;1),(1;-3) **- решения данной системы.**

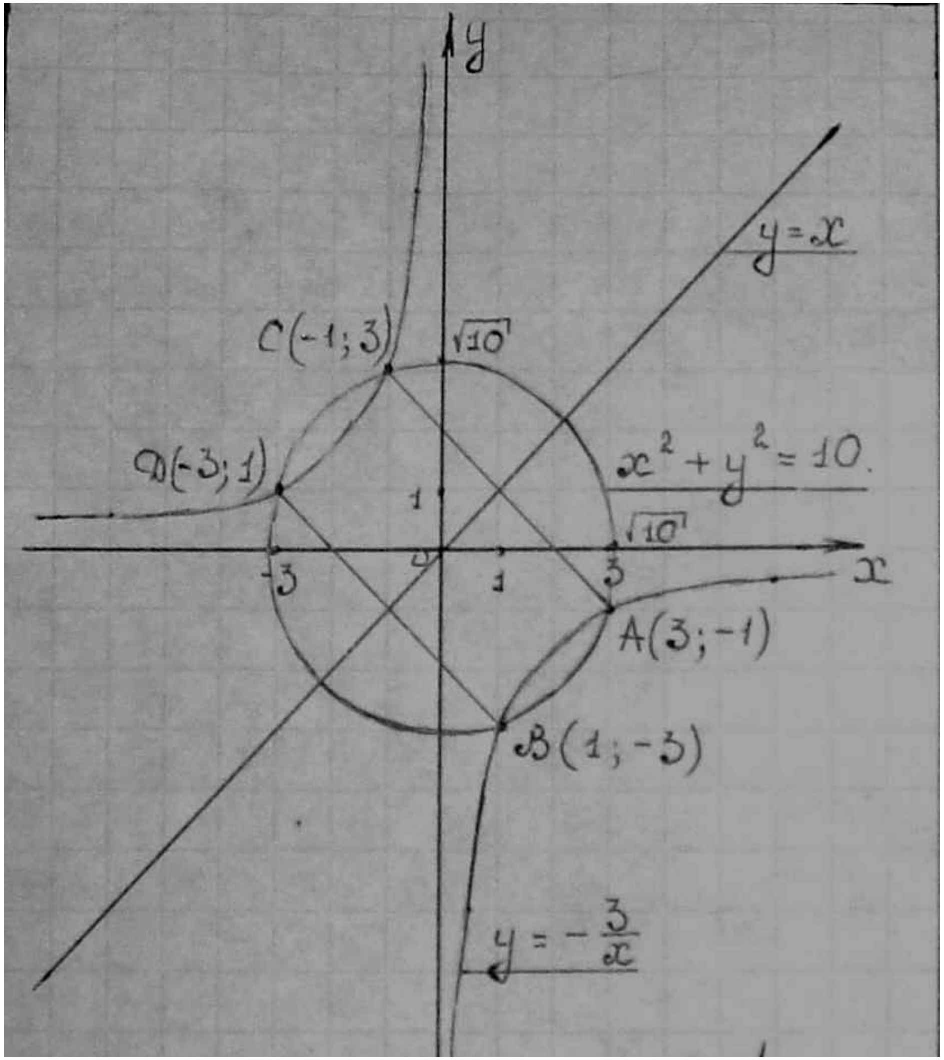
Графический способ

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10, \\ xy = -3; \end{cases}$$

В одной системе координат построим графики уравнений:
xy= -3 и $x^2 + y^2 = 10$

Графиком уравнения xy=-3 является гипербола, ветви которой расположены во II и IV координатных четвертях.

Графиком уравнения $x^2 + y^2 = 10$ является окружность с центром в точке (0;0) и радиусом $\sqrt{10}$



Графики пересекаются в четырех точках (они обозначены буквами А, В, С, Д), следовательно, данная система уравнений имеет четыре решения:

(3;-1), (-3;1), (-1;3), (1;-3).

Ответ: (3;-1), (-3;1), (-1;3), (1;-3).

Преимущества и недостатки метода

Графический метод решения систем, как и графический метод решения уравнений, красив, но ненадежен:

- во-первых, потому, что графики уравнений мы сумеем построить далеко не всегда;
- во-вторых, даже если графики уравнений удалось построить, точки пересечения могут быть не такими «хорошими», как в специально подобранных примерах учебника, а то и вовсе могут оказаться за пределами чертежа.

Проверь себя

- Реши систему уравнений, используя метод подстановки: $\begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 6. \end{cases}$
- Реши систему уравнений, используя метод сложения: $\begin{cases} 3x - 2y = 5, \\ 2x + 5y = 16. \end{cases}$
- Реши систему уравнений , используя графический способ: $\begin{cases} x + y = 1, \\ x^2 + y^2 = 25. \end{cases}$
- Реши систему уравнений, используя метод подстановки: $\begin{cases} 2x + y = 1, \\ 2x^2 + xy + y^2 = 1. \end{cases}$

Вывод

Мы рассмотрели четыре различных способов решения систем уравнений. Каждый выберет для себя способ, который ему больше всего понравился, самое главное - что каждый из Вас научился решать системы такого вида и поэтому эпиграфом могли служить слова Б.В.Гнеденко:

«Ничто так не содействует усвоению предмета, как действие с ним в разных ситуациях»