

Ключевые слова

- алгебра логики
- высказывание
- логическая операция
- конъюнкция
- дизъюнкция
- отрицание
- логическое выражение
- таблица истинности
- законы логики



Логика



Аристотель (384-322 до н.э.).
Основоположник формальной логики (понятие, суждение, умозаключение).



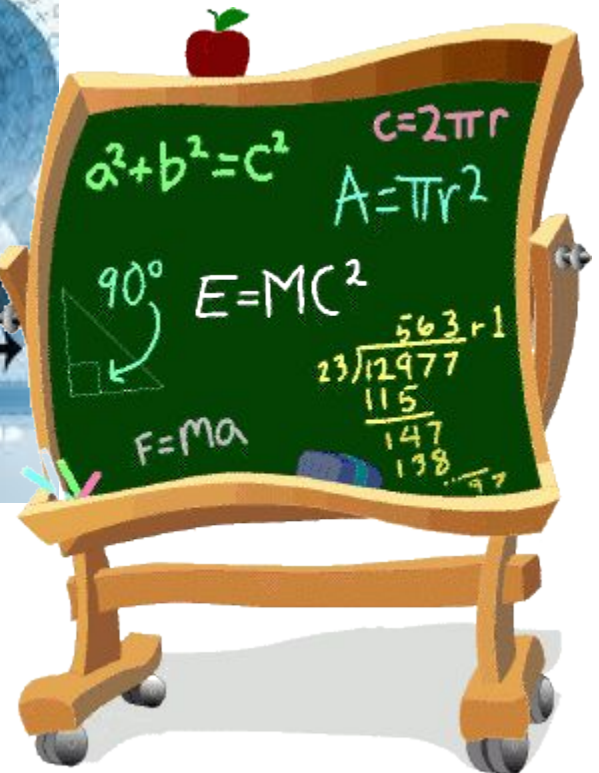
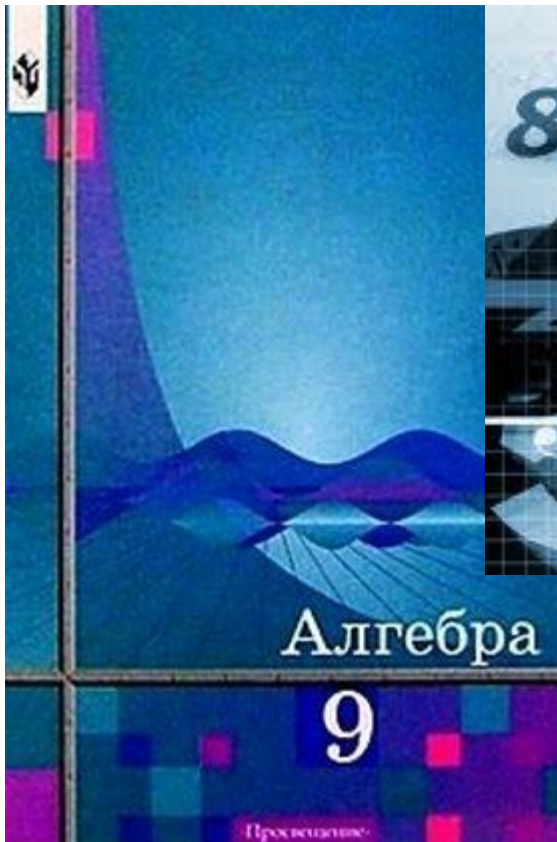
Джордж Буль (1815-1864). Создал новую область науки - Математическую логику (Булеву алгебру или Алгебру высказываний).



Клод Шеннон (1916-2001). Его исследования позволили применить алгебру логики в вычислительной технике

Алгебра

Алгебра - наука об общих операциях, аналогичных сложению и умножению, которые могут выполняться над разнообразными математическими объектами – числами, многочленами, векторами и др.



Высказывание

Высказывание - это предложение на любом языке, содержание которого можно однозначно определить как **истинное** или **ложное**.

В русском языке высказывания выражаются повествовательными предложениями:

*Земля вращается вокруг Солнца.
Москва - столица.*

Но не всякое повествовательное предложение является высказыванием:

Это высказывание ложное.

Побудительные и вопросительные предложения высказываниями не являются.

*Без стука не входите!
Откройте учебники.
Ты выучил стихотворение?*

Высказывание или нет?

- ✓ Зимой идет дождь.
- ✓ Снегири живут в Крыму.

Кто к нам пришел?

- ✓ У треугольника 5 сторон.

Как пройти в библиотеку?

Переведите число в десятичную систему.

Запишите домашнее задание

Алгебра логики

Алгебра логики определяет правила записи, вычисления значений, упрощения и преобразования высказываний.

В алгебре логики высказывания обозначают буквами и называют **логическими переменными**.

Если высказывание истинно, то значение соответствующей ему логической переменной обозначают единицей (**$A = 1$**), а если ложно - нулём (**$B = 0$**).

0 и **1** называются **логическими значениями**.

Простые и сложные высказывания

Высказывания бывают простые и сложные.

Высказывание называется **простым**, если никакая его часть сама не является высказыванием.

Сложные (составные) высказывания строятся из простых с помощью логических операций.

Название логической операции	Логическая связка
Конъюнкция	«и»; «а»; «но»; «хотя»
Дизъюнкция	«или»
Инверсия	«не»; «неверно, что»

Логические операции

Конъюнкция - логическая операция, ставящая в соответствие каждому двум высказываниям новое высказывание, являющееся истинным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания истинны.

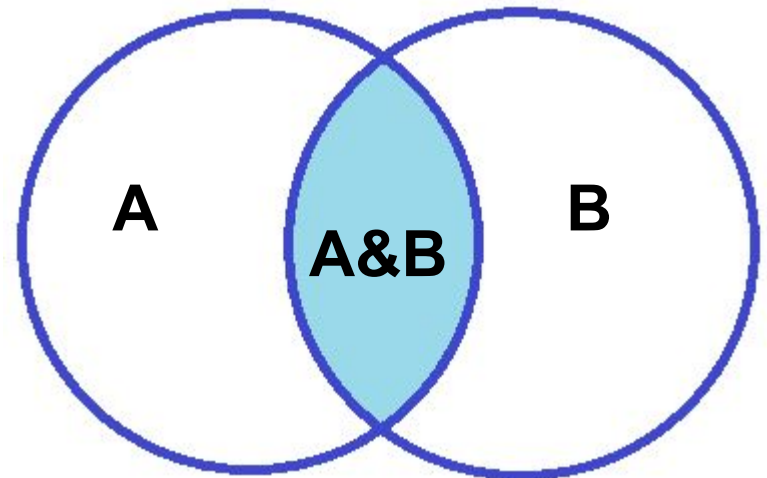
Другое название: **логическое умножение**.

Обозначения: \wedge , \times , $\&$, И.

Таблица истинности:

A	B	A&B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Графическое представление



Логические операции

Дизъюнкция - логическая операция, которая каждому двум высказываниям ставит в соответствие новое высказывание, являющееся ложным тогда и только тогда, когда оба исходных высказывания ложны.

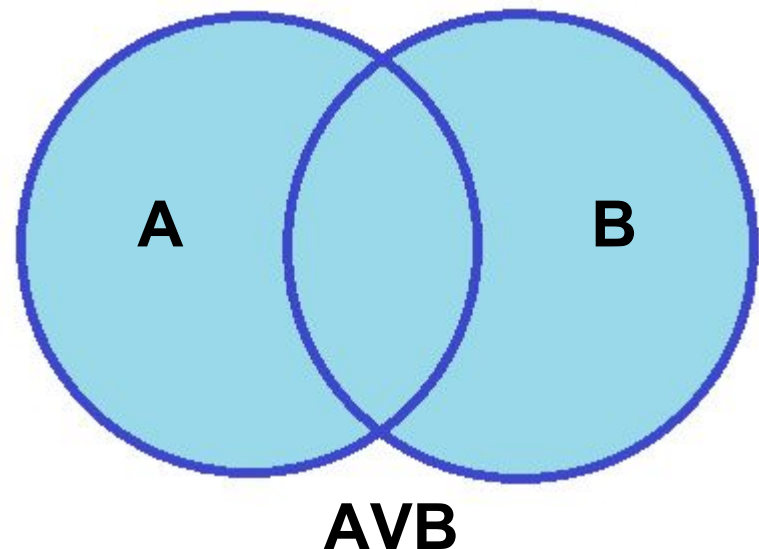
Другое название: **логическое сложение**.

Обозначения: **\vee , $|$, ИЛИ, $+$** .

Таблица истинности:

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Графическое представление



Логические операции

Инверсия - логическая операция, которая каждому высказыванию ставит в соответствие новое высказывание, значение которого противоположно исходному.

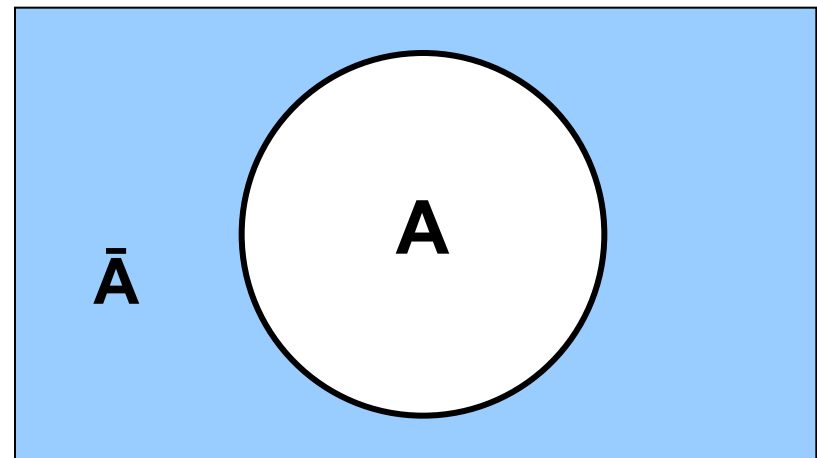
Другое название: **логическое отрицание**.

Обозначения: **НЕ**, \neg , $\bar{}$.

Таблица истинности:

A	\bar{A}
0	1
1	0

Графическое представление



Логические операции имеют следующий приоритет:
инверсия, конъюнкция, дизъюнкция.

Решаем задачу

Пусть A = «На Web-странице встречается слово "крейсер"», B = «На Web-странице встречается слово "линкор"».

В некотором сегменте сети Интернет 5000000 Web-страниц. В нём высказывание A истинно для 4800 страниц, высказывание B - для 4500 страниц, а высказывание AVB - для 7000 страниц.

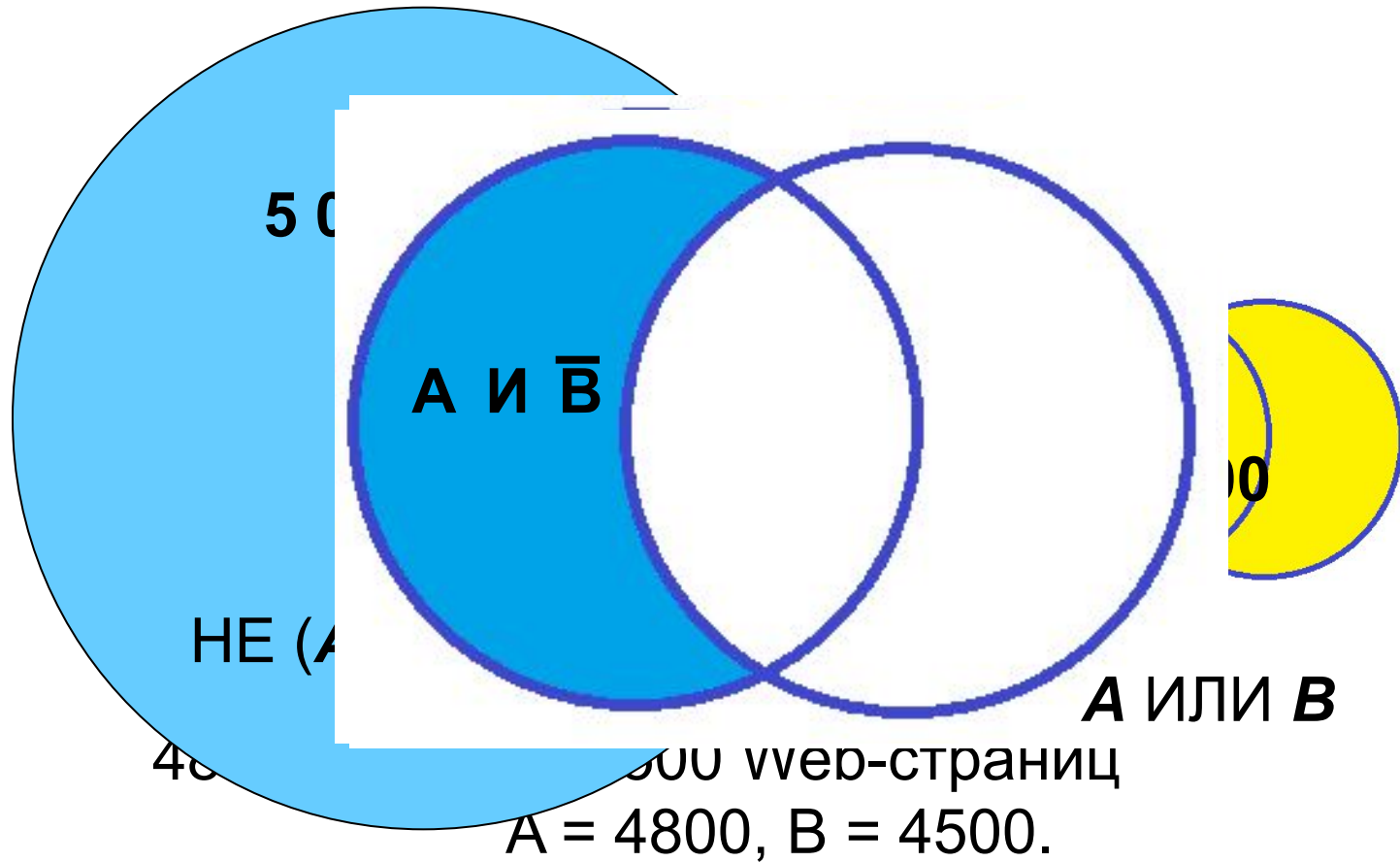
Для какого количества Web-страниц в этом случае будут истинны следующие выражения и высказывание?

а) **НЕ (A ИЛИ B)**;

б) **A & B**;

в) *На Web-странице встречается слово "крейсер" И НЕ встречается слово "линкор"*.

Представим условие задачи графически:



Сегмент Web-страниц
 На 2500 Web-страниц не встречается слово "пинкор"
 На 2500 Web-страниц встречается слово "пинкор"
 На 4800 Web-страниц встречается слово "пинкор"
 На 4500 Web-страниц не встречается слово "пинкор"
 На 2300 Web-страниц встречается слово "пинкор"
 И НЕ встречается слово "пинкор"
 $9300 - 7000 = 2300$ Web-страниц A&B

Построение таблиц истинности для логических выражений

подсчитать n - число переменных в выражении

подсчитать общее число логических операций в выражении

установить последовательность выполнения логических операций

определить число столбцов в таблице

заполнить шапку таблицы, включив в неё переменные и операции

определить число строк в таблице без шапки: $m = 2^n$

выписать наборы входных переменных

провести заполнение таблицы по столбцам, выполняя логические операции в соответствии с установленной последовательностью

Пример построения таблицы ИСТИННОСТИ

$$A \vee A \& B$$

$$n = 2, m = 2^2 = 4.$$

Приоритет операций: $\&$, \vee

A	B	$A \& B$	$A \vee A \& B$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

Свойства логических операций

Законы алгебры-логики

Закон исключения
третьего

$$A \& \bar{A} = 0$$

$$A \vee \bar{A} = 1$$

Закон повторения

$$A \& A = A$$

$$A \vee A = A$$

Законы операций
с 0 и 1

$$A \& 0 = 0; A \& 1 = A$$

$$A \vee 0 = A; A \vee 1 = 1$$

Законы общей
инверсии

$$\overline{A \& B} = \bar{A} \vee \bar{B}$$

$$\overline{A \vee B} = \bar{A} \& \bar{B}$$

Доказательство закона

Распределительный закон для логического сложения:

$$A \vee (B \& C) = (A \vee B) \& (A \vee C).$$

A	B	C	B&C	$A \vee (B \& C)$	$A \vee B$	$A \vee C$	$(A \vee B) \& (A \vee C)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Утверждение $(A \vee (B \& C)) \equiv ((A \vee B) \& (A \vee C))$ истинно для всех значений переменных. Доказывает распределительный закон.