



ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

ОБМЕН ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. `c=a; a=b; b=c;`
2. `a=a+b; b=a-b; a=a-b;`
3. `a=a^b; b=a^b; a=a^b;`
4. `swap(a,b);`



ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

Использование теории чисел в олимпиадах по информатике в основном касается:

- общих понятий делимости и деления с остатком;
- простоты чисел, простых множителей;
- наибольшего общего делителя (НОД) и наименьшего общего кратного (НОК);
- моделирования арифметических операций («длинная арифметика»).



ДЕЛЕНИЕ С ОСТАТКОМ

$$r = a / b;$$

$$q = a \% b;$$

Указанные операции не соответствуют математическому определению в случае, когда число a отрицательное (проверьте). Кроме того, они определены и для отрицательных значений b .



СВОЙСТВА ОСТАТКОВ

- $(a + b) \bmod c = ((a \bmod c) + (b \bmod c)) \bmod c;$
- $(a - b) \bmod c = ((a \bmod c) - (b \bmod c)) \bmod c;$
- $(a * b) \bmod c = ((a \bmod c) * (b \bmod c)) \bmod c.$



ДЕЛИТЕЛИ НАТУРАЛЬНОГО ЧИСЛА

- ▣ Делителями натурального числа a называются все натуральные числа, на которые делится a (или, что то же самое, которые делят a).
- Для того, чтобы найти все делители числа a , можно просматривать на предмет делимости не все числа от 1 до a (следующим улучшением было бы от 1 до $a/2$), а лишь от 1 до \sqrt{a} , и для делителей, меньших \sqrt{a} , находить пары, большие \sqrt{a}



ПОИСК ДЕЛИТЕЛЕЙ ЧИСЛА

```
void divisors(int a)
{
    int i;
    for (i = 1; i * i < a; i++)
        if (a % i == 0)
        {
            process(i); /*обработать делитель*/
            process(a / i);
        }
    if (i * i == a)
        process(i);
}
```



ПРОСТЫЕ ЧИСЛА

- ❑ Число p называется **простым**, если все его делители - лишь 1 и само число p (ровно два делителя). Если же у числа есть делитель, отличный от 1 и его самого, оно называется **составным**. Число 1 не считается ни простым, ни составным.
- Исходя из этого определения и того, что делители входят в число парами, следует:
 - для того, чтобы число $p > 1$ было простым, достаточно, чтобы у него не было делителей, меньших либо равных \sqrt{p} , кроме 1.



ПРОВЕРКА НА ПРОСТОТУ

```
bool isPrime(int a)
{
    for (int i = 2; i * i <= a; ++i)
        if (a % i == 0)
            return false;
    return true;
}
```



РЕШЕТО ЭРАТОСФЕНА

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
101	102	103	104	105	106	107	108	109	110
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120

Prime numbers



РЕШЕТО ЭРАТОСФЕНА

При реализации алгоритма:

- остановиться можно на числе $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, т.к. далее для любого простого числа первый кандидат на вычеркивание уже больше n ;
- начинать вычеркивание на шаге, соответствующем простому числу p , можно не с $2p$, а с p^2 , т.к. все меньшие кандидаты на вычеркивание уже были вычеркнуты при обработке меньших простых чисел;
- в силу последнего наблюдения можно вообще остановить работу алгоритма после обработки $p = \left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor$ (у каждого составного числа $s \leq n$ есть простой множитель, не больший $\left\lfloor \sqrt{s} \right\rfloor \leq \left\lfloor \sqrt{n} \right\rfloor$)



РЕШЕТО ЭРАТОСФЕНА

```
void eratosthenes(int n)
{
    /* число 1 не является простым */
    p[1] = false;
    /* сначала все числа "не вычеркнуты" */
    for (int i = 2; i <= n; ++i)
        p[i] = true;
    for (int i = 2; i * i <= n; ++i)
    {
        /* если число простое... */
        if (p[i])
            /* начинаем "вычеркивать" составные числа */
            for (int j = i * i; j <= n; j += i)
                p[j] = false;
    }
}
```



- Простые числа можно хранить константным массивом в тексте программы:

```
int simple[25]={2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31,  
37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97};
```



ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА АРИФМЕТИКИ

□ Любое натуральное число, большее единицы, может быть однозначно представлено в виде произведения простых сомножителей с точностью до порядка следования;

Иными словами, для любого натурального числа $n > 1$ существует единственный набор упорядоченных по возрастанию различных простых делителей

$$p_1 < p_2 < \dots < p_k$$

и набор соответствующих натуральных степеней их вхождения в n

a_1, a_2, \dots, a_k , таких что

$$n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$$

Например, $12 = 2^2 \cdot 3^1$, $17 = 17^1$, $1\,073\,741\,824 = 2^{30}$.



ФАКТОРИЗАЦИЯ ЧИСЛА

Представление числа в виде

$$n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$$

называют **факторизацией** числа



ФАКТОРИЗАЦИЯ ЧИСЛА

```
void factorization(int n)
{
    int a = n; /* копия n, над которой производится деление */
    int p;
    for (p = 2; p * p <= n; ++p)
        if (a % p == 0)
        {
            int c = 0; /* счетчик степени вхождения числа */
            while (a % p == 0)
            {
                a /= p;
                c++;
            }
            report(p, c);
        }
    if (a != 1)
        report(a, 1);
}
```



□ Из основной теоремы арифметики и определения делимости следует, что одно число делится на другое тогда и только тогда, когда набор простых множителей первого (с учетом кратностей i) целиком содержит в себе набор простых множителей последнего.

Это значит, что при

$$n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$$

все его делители имеют вид

$$m = p_1^{b_1} \cdot p_2^{b_2} \cdot \dots \cdot p_k^{b_k}, \quad 0 \leq b_i \leq a_i, \quad i = \overline{1, k}$$

и определяются однозначно набором b_i .



□ Отсюда, в частности, следует, что количество различных делителей числа n при принятых обозначениях равно количеству всевозможных комбинаций b_i .

Каждое b_i может независимо принимать $a_i + 1$ значений (от 0 до a_i), а потому общее число делителей есть

$$\sigma(n) = (a_1 + 1)(a_2 + 1) \dots (a_k + 1)$$



ХРАНЕНИЕ ЧИСЛА В ВИДЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

- Любое число можно представить в виде произведения простых чисел. Такое представление выглядит в виде одномерного массива в каждой ячейке которого содержится степень соответствующего просто числа.
- Например, пусть у нас есть массив простых чисел [2; 3; 5; 7; 11; 13],
 - тогда число 2600 будет выглядеть как [3; 0; 2; 0; 0; 1]
($2^3 \cdot 5^2 \cdot 13^1 = 2600$),
 - число 11858 представляется массивом [1; 0; 0; 2; 2; 0]
($2^1 \cdot 7^2 \cdot 11^2 = 11858$)



ХРАНЕНИЕ ЧИСЛА В ВИДЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

Такие числа легко умножать. Чтобы получить произведение чисел, достаточно сложить соответствующие элементы массивов.

[3; 0; 2; 0; 0; 1]

[1; 0; 0; 2; 2; 0]

Результатом будет массив [4; 0; 2; 2; 2; 1], т.е. $2^4 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11^2 \cdot 13^1 = 30830800 = 2600 \cdot 11858$.

Можно реализовать деление с остатком, нахождение НОД и НОК.



НОД и НОК

- **Наибольшим общим делителем (НОД)** неотрицательных целых чисел a и b (не являющихся одновременно нулями) назовем наибольший элемент множества общих делителей чисел a и b .
- **Общим кратным** двух натуральных чисел a и b называется любое такое натуральное число c , что a делит c и b делит c . **Наименьшим общим кратным (НОК)** называется минимальное из таких натуральных чисел



НОД и НОК

- Пусть числа заданы разложением на простые множители.
- Разложение на простые множители $\text{НОД}(a; b)$ включает в себя только те простые числа, которые встречаются в как в разложении a , так и в разложении b . При этом степень, в которой простое число входит в разложение НОД, равна минимальной из степеней, в которых число входит в разложения a и b .
- НОК двух чисел состоит из тех простых множителей, которые встречаются хотя бы в одном из разложений исходных чисел, а кратность (степень) вхождения такого множителя равна максимальной из его кратностей в разложениях исходных чисел.



НОД и НОК

▣ Пусть есть два числа n и m

$$n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$$
$$m = p_1^b \cdot p_2^{b_2} \cdot \dots \cdot p_k^{b_k}$$

○ Тогда

$$\text{НОД}(n, m) = p_1^{\min(a_1, b_1)} \cdot p_2^{\min(a_2, b_2)} \cdot \dots \cdot p_k^{\min(a_k, b_k)}$$
$$\text{НОК}(n, m) = p_1^{\max(a_1, b_1)} \cdot p_2^{\max(a_2, b_2)} \cdot \dots \cdot p_k^{\max(a_k, b_k)}$$



Свойства НОД

- $\text{НОД}(a; a) = a$;
- $\text{НОД}(a; 1) = 1$;
- $\text{НОД}(a; 0) = a$;
- $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a - b, b)$
- $\text{НОД}(a, b) = \text{НОД}(a \bmod b, b)$
- $\text{НОД}(2a, 2b) = 2\text{НОД}(a, b)$
- $\text{НОД}(2a, b) = \text{НОД}(a, b)$, если b – нечетно.



АЛГОРИТМ ЕВКЛИДА

```
int gcd (int a, int b)
{
    while (b && a)
    {
        if (a > b)
            a %= b;
        else
            b %= a;
    }
    return a + b;
}
```



ВАРИАНТЫ РЕАЛИЗАЦИИ АЛГОРИТМА ЕВКЛИДА

1. нахождение разностей
2. обмен значений
3. рекурсивная реализация
4. рекурсия с тринарным оператором
5. бинарная реализация
6. использование библиотеки



ЕВКЛИД (НАХОЖДЕНИЕ РАЗНОСТЕЙ)

```
int gcd (int a, int b)
{
    while (b!=a)
    {
        if (a>b)
            a -= b;
        else
            b -= a;
    }
    return a;
}
```



ЕВКЛИД (ОБМЕН ЗНАЧЕНИЙ)

```
int gcd (int a, int b)
{
    while (b)
    {
        a %= b;
        swap (a, b);
    }
    return a;
}
```



ЕВКЛИД (РЕКУРСИВНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ)

```
int gcd (int a, int b)
{
    if (b == 0)
        return a;
    else
        return gcd (b, a % b);
}
```



ЕВКЛИД (РЕКУРСИЯ С ТРИНАРНЫМ ОПЕРАТОРОМ)

```
int gcd (int a, int b)
{
    return b ? gcd (b, a % b) : a;
}
```



ЕВКЛИД (БИНАРНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ)

```
int gcd (int a, int b)
{
    int c = 1;
    while (b && a)
    {
        unsigned int d = b & 1;
        if (!(a & 1))
            if (!d)
            {
                a >>= 1; b >>= 1; c <<= 1;
            }
            else a >>= 1;
        else
            if (!d) b >>= 1;
            else
                if (a > b)
                    a %= b;
                else
                    b %= a;
    }
    return (a + b) * c;
}
```



ЕВКЛИД (ИСПОЛЬЗОВАНИЕ БИБЛИОТЕКИ)

```
#include <iostream>
#include <algorithm>
#include <numeric>

using namespace std;

int main()
{
    cout << __gcd(78,56) << endl;
    return 0;
}
```



Функция Эйлера

- ◻ Функция Эйлера $\varphi(n)$ - это количество чисел от 1 до n , взаимно простых с n .
- Иными словами, это количество таких чисел в отрезке $[1; n]$, наибольший общий делитель которых с n равен единице.
 - ❖ $\varphi(1)=1$
 - ❖ $\varphi(2)=1$
 - ❖ $\varphi(3)=2$
 - ❖ $\varphi(4)=2$
 - ❖ $\varphi(5)=4$



СВОЙСТВА ФУНКЦИИ ЭЙЛЕРА

- ▣ Если p – простое число, то $\varphi(p) = p - 1$
 - Это очевидно, т.к. любое число, кроме самого p , взаимно просто с ним.
- Если p – простое число, а a – натуральное число, то
$$\varphi(p^a) = p^a - p^{a-1}$$
 - Поскольку с числом p^a не взаимно просты только числа вида $(pk, k \in \mathcal{N})$, которых $\frac{p^a}{p} = p^{a-1}$ штук.
- Если a и b взаимно простые, то $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$
("мультипликативность" функции Эйлера).



ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ЭЙЛЕРА

▣ Пусть $n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_k^{a_k}$

○ Тогда

$$\begin{aligned}\varphi(n) &= \varphi(p_1^{a_1}) \cdot \varphi(p_2^{a_2}) \cdot \dots \cdot \varphi(p_k^{a_k}) = \\ &= (p_1^{a_1} - p_1^{a_1-1}) \cdot (p_2^{a_2} - p_2^{a_2-1}) \cdot \dots \cdot (p_k^{a_k} - p_k^{a_k-1}) = \\ &= n \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right) = \\ &= \frac{n}{p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_k} (p_1 - 1)(p_2 - 1) \cdot \dots \cdot (p_k - 1)\end{aligned}$$



ВЫЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ЭЙЛЕРА

```
int phi (int n)
{
    int result = n;
    for (int i = 2; i * i <= n; i++)
        if (n % i == 0)
        {
            while (n % i == 0)
                n /= i;
            result -= result / i;
        }
    if (n > 1)
        result -= result / n;
    return result;
}
```



ВВОД – ВЫВОД НА C++

```
#include <cstdio>

using namespace std;

int main()
{
    freopen("input.txt", "r", stdin);
    freopen("output.txt", "w", stdout);
    int a,b;
    scanf("%d%d", &a, &b);
    printf("%d", a + b);
    return 0;
}
```

```
#include <fstream>

using namespace std;

int main()
{
    ifstream fin("input.txt");
    ofstream fout("output.txt");
    int a, b;
    fin >> a >> b;
    fout << a + b;
    return 0;
}
```



Код	действие
<code>%c</code>	Читает один символ
<code>%d</code>	Читает десятичное целое
<code>%f</code>	Читает вещественное число
<code>%s</code>	Читает строку
<code>%u</code>	Читает десятичное целое без знака
<code>%lld</code>	Читает целое типа <code>long long ()</code> – Linux
<code>%I64d</code>	Читает целое типа <code>long long ()</code> - Windows



Универсальный" код, который работает правильно под обеими системами, может выглядеть так:

```
#ifdef WIN32
    printf("%I64d\n",ans);
#else
    printf("%lld\n",ans);
#endif
```



```
ios_base::sync_with_stdio(0);
```

- Для ускорения ввода-вывода при использовании потокового ввода-вывода
- Не использовать вместе с:
 - freopen
 - #include <cstdio>



ИСПОЛЬЗОВАНИЕ БИБЛИОТЕКИ

□ `#include <bits/stdc++.h>`

