

Бесконечно малые величины

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \rightarrow x_0$, если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0.$$

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые при $x \rightarrow x_0$, если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0,$$

то $\alpha(x)$ – бесконечно малая более высокого порядка, чем бесконечно малая $\beta(x)$, обозначают $\alpha(x) = o(\beta(x))$.

Если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c (\neq 0, \neq \infty),$$

то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые одного порядка при $x \rightarrow x_0$.

Если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1,$$

то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – эквивалентные бесконечно малые при $x \rightarrow x_0$, обозначают $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Теоремы о бесконечно малых

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые при $x \rightarrow x_0$, тогда имеют место следующие утверждения:

Теорема 1. $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$ тогда и только тогда, когда $\alpha(x) = \beta(x) + o(\beta(x))$ или $\beta(x) = \alpha(x) + o(\alpha(x))$.

Следствие. Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые при $x \rightarrow x_0$, то $\alpha(x) - \beta(x) = o(\beta(x))$ или $\beta(x) - \alpha(x) = o(\alpha(x))$, т.е. разность эквивалентных бесконечно малых, есть бесконечно малая более высокого порядка при $x \rightarrow x_0$, чем любая из функции $\alpha(x)$ или $\beta(x)$.

Теорема 2. Если $\alpha(x) \sim a(x)$ и $\beta(x) \sim b(x)$ при $x \rightarrow x_0$, то

$$1. \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a(x)}{b(x)};$$

2. $\alpha(x) + \beta(x) \sim a(x) + b(x)$ (кроме случая, когда $\alpha(x) \sim -\beta(x)$, т.е., когда $\alpha(x) + \beta(x)$ является, на самом деле, разностью эквивалентных).

Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной* в некоторой окрестности точки x_0 , если существует постоянная $M > 0$, такая, что для любого x из данной окрестности $|f(x)| \leq M$.

Теорема 3. Пусть $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x_0 \rightarrow x_0$ и $y = f(x)$ ограниченная функция в некоторой окрестности точки x_0 , тогда $f(x) \cdot \alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \rightarrow x_0$.

Первый замечательный предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

В общем виде первый замечательный предел можно записать так:

$$\sin \alpha(x) \sim \alpha(x) \text{ при } x \rightarrow x_0,$$

если $\alpha(x)$ является бесконечно малой при $x \rightarrow x_0$.

Таблица эквивалентных бесконечно малых

Справедливы следующие утверждения:

при $x \rightarrow 0$	если $\alpha(x)$ есть бесконечно малая при $x \rightarrow x_0$
$\sin x \sim x$ $\operatorname{tg} x \sim x$ $\arcsin x \sim x$ $\operatorname{arctg} x \sim x$ $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$ $e^x - 1 \sim x$ $a^x - 1 \sim x \ln a$ $\ln(1 + x) \sim x$ $(1 + x)^p - 1 \sim px$	$\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$ $\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$ $\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$ $\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$ $1 - \cos \alpha(x) \sim \frac{\alpha(x)^2}{2}$ $e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x)$ $a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \ln a$ $\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$ $(1 + \alpha(x))^p - 1 \sim p\alpha(x)$

Применим теоремы об эквивалентных для нахождения пределов

Пример 1. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 4x}$.

Решение. Воспользуемся теоремой о замене функций в пределе отношения эквивалентными:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 4x} = \left| \begin{array}{l} 3x \rightarrow 0 \Rightarrow \sin 3x \sim 3x \\ 4x \rightarrow 0 \Rightarrow \operatorname{tg} 4x \sim 4x \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{4x} = \frac{3}{4}.$$

Пример 2. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{x^2}$.

Решение. В числителе воспользуемся теоремой о замене функций в пределе разности эквивалентными:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{x^2} &= \left| \begin{array}{l} \sin x \sim x \\ \frac{x}{2} \rightarrow 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \frac{x}{2} \sim \frac{x}{2} \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot x - \left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - \frac{x^2}{4}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{7}{4}x^2}{x^2} = \frac{7}{4}. \end{aligned}$$

Пример 3. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + 2 \operatorname{arctg} 3x + 3x^2}{\ln(1 + 3x + \sin^2 2x)}$.

Решение. Воспользуемся теоремой о замене функций в пределе суммы и отношения эквивалентными:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x + 2 \operatorname{arctg} 3x + 3x^2}{\ln(1 + 3x + \sin^2 2x)} &= \left| \begin{array}{l} \sin 2x \sim 2x; \quad \operatorname{arctg} 3x \sim 3x; \\ (3x + \sin^2 2x) \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow 0 \Rightarrow \\ \ln(1 + 3x + \sin^2 2x) \sim 3x + \sin^2 2x \sim 3x + (2x)^2 \end{array} \right| = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 2 \cdot 3x + 3x^2}{3x + (2x)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 6x + 3x^2}{3x + 4x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(8 + 3x)}{x(3 + 4x)} = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Важное замечание

Пусть $f(x) \sim g(x)$, т.е. по определению эквивалентных функций $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, тогда по определению предела функции в точке $\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow x_0$ и

$$f(x) = g(x)(1 + \alpha(x)) = g(x) + g(x)\alpha(x) = g(x) + o(g(x)),$$

следовательно,

$$f(x) - g(x) = o(g(x)).$$

Так как порядок бесконечно малой $o(g(x))$ в общем случае неизвестен, то переход к эквивалентным функциям в разности нужно производить осторожно.

Например, заменим на эквивалентные слагаемые в числителе в следующем пределе:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos x - \sin^2 x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2(1 - \cos x) - \sin^2 x}{x^4} = \left| \begin{array}{l} 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} \\ \sin^2 x \sim x^2 \end{array} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \frac{x^2}{2} - x^2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0}{x^4} = 0.$$

Однако, выполнив тождественные преобразования тригонометрического выражения в числителе, получим:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos x - \sin^2 x}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos x - (1 - \cos^2 x)}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2 \cos x + \cos^2 x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{x^4} = \\ &= \left| 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^4}{4}}{x^4} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Порядок бесконечно малой $o(g(x))$ и более точные эквивалентные функции научимся определять позже с помощью формулы Тейлора.

Замечание. В рассмотренном ранее примере $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{x^2}$ разность в числителе заменили на эквивалентные, так как $2x \sin x \sim 2x^2$, $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \sim \frac{x^2}{4}$ при $x \rightarrow 0$ и $2x^2 \neq \frac{x^2}{4}$.

Примеры вычисления пределов

Пример 4. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{e^{3x^2} - 1}$.

Р е ш е н и е. По таблице эквивалентных бесконечно малых получаем:

$$\operatorname{arctg} x^2 \sim x^2, e^{3x^2} - 1 \sim 3x^2 \text{ при } x \rightarrow 0.$$

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{e^{3x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}.$$

Пример 5. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$

Решение. Величины $2x$ и $3x$ не являются бесконечно малыми при $x \rightarrow \pi$, поэтому бесконечно малые при $x \rightarrow \pi$ величины $\sin 2x$ и $\sin 3x$ нельзя заменить на их аргументы $2x$ и $3x$ соответственно.

Сделаем замену переменной. Пусть $y = x - \pi$, тогда $x = \pi + y$ и $y \rightarrow 0$ при $x \rightarrow \pi$.

Получим

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin (2\pi + 2y)}{\sin (3\pi + 3y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin 2y}{(-\sin 3y)} = \lim_{y \rightarrow 0} -\frac{2y}{3y} = -\frac{2}{3}.$$

Пример 6. Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^x - 2}{\ln x}$.

Решение. Преобразуем выражения в числителе:

$$2^x - 2 = 2(2^{x-1} - 1)$$

и в знаменателе:

$$\ln x = \ln(1 + (x - 1)).$$

$2^{x-1} - 1$ и $\ln(1 + (x - 1))$ есть бесконечно малые величины при $x \rightarrow 1$,

поэтому из таблицы эквивалентных функций имеем:

$$2^{x-1} - 1 \sim (x - 1) \ln 2 \text{ и } \ln(1 + (x - 1)) \sim (x - 1) \text{ при } x \rightarrow 1.$$

Таким образом,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2^x - 2}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(2^{x-1} - 1)}{\ln(1 + (x - 1))x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x - 1) \ln 2}{x - 1} = 2 \ln 2.$$

Этот предел можно вычислить, сделав замену переменной $x - 1 = t$ при $t \rightarrow 0$ и перейдя к пределу $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{2^{t+1} - 2}{\ln(1+t)}$.

Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x^3}{3^{x^3} - 1}.$$

- 1
- $\frac{1}{\ln 3}$
- $\frac{1}{3}$
- ∞
- 0

Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg}(1 - \cos x)}{\sin^2 \frac{x}{2}}.$$

- $\frac{1}{2}$
- 0
- 2
- 1
- $\frac{1}{4}$

Вычислить предел

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln \cos 2x}{\left(1 - \frac{\pi}{x}\right)^2}$$

- π
- $\frac{1}{\pi^2}$
- 2
- $-2\pi^2$
- 0

Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\ln(2x-5)}{e^{\sin \pi x} - 1}$.

- 2π
- $-\frac{2}{\pi}$
- 1
- $\frac{3}{e}$
- $\frac{1}{\pi}$

Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 + \sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x}}$

- 0
- 1
- 1
- ∞
- $\frac{1}{e}$

Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\ln \cos 3x}$

∞

$\frac{1}{9}$

0

$\frac{1}{3}$

1

Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$

- 0
- $\frac{1}{3}$
- $-\frac{1}{3}$
- 1
- ∞

Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \sin x} - \sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$

- 2
- 0
- ∞
- 1
- 6