Бесконечно малые величины

Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0.$$

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые при $x \to x_0$, если

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0,$$

то $\alpha(x)$ – *бесконечно малая более высокого порядка, чем бесконечно малая* $\beta(x)$, обозначают $\alpha(x) = o(\beta(x))$.

Если

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c\,(\neq 0,\ \neq \infty),$$

то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – *бесконечно малые одного порядка* при $x \to x_0$.

Если

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1,$$

то $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – *эквивалентные бесконечно малые* при $x \to x_0$, обозначают $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Теоремы о бесконечно малых

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые при $x \to x_0$, тогда имеют место следующие утверждения:

Теорема 1. $\alpha(x) \sim \beta(x)$ *при* $x \to x_0$ *тогда и только тогда, когда* $\alpha(x) = \beta(x) + o(\beta(x))$ *или* $\beta(x) = \alpha(x) + o(\alpha(x))$.

> **Следствие.** Если $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые при $x \to x_0$, то $\alpha(x) - \beta(x) = o(\beta(x))$ или $\beta(x) - \alpha(x) = o(\alpha(x))$, т.е. разность эквивалентных бесконечно малых, есть бесконечно малая более высокого порядка при $x \to x_0$, чем любая из функции $\alpha(x)$ или $\beta(x)$.

Теорема 2. *Если* $\alpha(x) \sim a(x)$ *и* $\beta(x) \sim b(x)$ *при* $x \to x_0$, *то*

1. $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{a(x)}{b(x)}$;
2. $\alpha(x) + \beta(x) \sim a(x) + b(x)$ *(кроме случая, когда* $\alpha(x) \sim -\beta(x)$, *т.е., когда* $\alpha(x) + \beta(x)$ *является, на самом деле, разностью эквивалентных).*

Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной* в некоторой окрестности точки x_0, если существует постоянная $M > 0$, такая, что для любого x из данной окрестности $|f(x)| \leq M$.

Теорема 3. *Пусть* $\alpha(x)$ *– бесконечно малая при* $x_0 \to x_0$ *и* $y = f(x)$ *ограниченная функция в некоторой окрестности точки* x_0, *тогда* $f(x) \cdot \alpha(x)$ *– бесконечно малая при* $x \to x_0$.

Первый замечательный предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

В общем виде первый замечательный предел можно записать так:

$$\sin \alpha(x) \sim \alpha(x) \text{ при } x \to x_0,$$

если $\alpha(x)$ является бесконечно малой при $x \to x_0$.

Таблица эквивалентных бесконечно малых

Справедливы следующие утверждения:

при $x \to 0$	если $\alpha(x)$ есть бесконечно малая при $x \to x_0$
$\sin x \sim x$	$\sin \alpha(x) \sim \alpha(x)$
$\operatorname{tg} x \sim x$	$\operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$
$\arcsin x \sim x$	$\arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x)$
$\operatorname{arctg} x \sim x$	$\operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x)$
$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$	$1 - \cos \alpha(x) \sim \frac{\alpha(x)^2}{2}$
$e^x - 1 \sim x$	$e^\alpha(x) - 1 \sim \alpha(x)$
$a^x - 1 \sim x \ln a$	$a^\alpha(x) - 1 \sim \alpha(x) \ln a$
$\ln(1 + x) \sim x$	$\ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x)$
$(1 + x)^p - 1 \sim px$	$(1 + \alpha(x))^p - 1 \sim p\alpha(x)$

Применим теоремы об эквивалентных для нахождения пределов

Пример 1. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 4x}$.

Р е ш е н и е. Воспользуемся теоремой о замене функций в пределе отношения эквивалентными:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{\operatorname{tg} 4x}=\left|\begin{array}{lll} 3x\to 0 & \Rightarrow & \sin 3x\sim 3x \\ 4x\to 0 & \Rightarrow & \operatorname{tg} 4x\sim 4x\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{4x}=\frac{3}{4}.$$

Пример 2. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x\sin x-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{x^2}$.

Р е ш е н и е. В числителе воспользуемся теоремой о замене функций в пределе разности эквивалентными:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin x-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{x^2}=\left|\begin{array}{lll} \sin x\sim x & & \\ \frac{x}{2}\to 0 & \Rightarrow & \operatorname{tg}\frac{x}{2}\sim\frac{x}{2}\end{array}\right|=\lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot x-\left(\frac{x}{2}\right)^2}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2-\frac{x^2}{4}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{7}{4}x^2}{x^2}=\frac{7}{4}.$$

Пример 3. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x+2\operatorname{arctg} 3x+3x^2}{\ln(1+3x+\sin^2 2x)}$.

Р е ш е н и е. Воспользуемся теоремой о замене функций в пределе суммы и отношения эквивалентными:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x+2\operatorname{arctg} 3x+3x^2}{\ln(1+3x+\sin^2 2x)}=\left|\begin{array}{c} \sin 2x\sim 2x;\quad \operatorname{arctg} 3x\sim 3x; \\ (3x+\sin^2 2x)\to 0 \text{ при } x\to 0\ \Rightarrow \\ \ln(1+3x+\sin^2 2x)\sim 3x+\sin^2 2x\sim 3x+(2x)^2\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x+2\cdot 3x+3x^2}{3x+(2x)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x+6x+3x^2}{3x+4x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x(8+3x)}{x(3+4x)}=\frac{8}{3}.$$

Важное замечание

Пусть $f(x) \sim g(x)$, т.е. по определению эквивалентных функций $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, тогда по определению предела функции в точке $\frac{f(x)}{g(x)} = 1 + \alpha(x)$, где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to x_0$ и

$$f(x) = g(x)(1 + \alpha(x)) = g(x) + g(x)\alpha(x) = g(x) + o(g(x)),$$

следовательно,

$$f(x) - g(x) = o(g(x)).$$

Так как порядок бесконечно малой $o(g(x))$ в общем случае неизвестен, то переход к эквивалентным функциям в разности нужно производить осторожно.

Например, заменим на эквивалентные слагаемые в числителе в следующем пределе:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 - 2\cos x - \sin^2 x}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{2(1 - \cos x) - \sin^2 x}{x^4} = \left| \begin{array}{c} 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}\,; \quad \sin^2 x \sim x^2 \\ \sin^2 x \sim x^2 \end{array} \right| = \lim_{x \to 0} \frac{2\frac{x^2}{2} - x^2}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{0}{x^4} = 0.$$

Однако, выполнив тождественные преобразования тригонометрического выражения в числителе, получим:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2 - 2\cos x - \sin^2 x}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{2 - 2\cos x - (1 - \cos^2 x)}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{1 - 2\cos x + \cos^2 x}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{x^4} =$$

$$= \left| 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2} \right| = \lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{x^2}{2}\right)^2}{x^4} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x^4}{4}}{x^4} = \frac{1}{4}.$$

Порядок бесконечно малой $o(g(x))$ и более точные эквивалентные функции научимся определять позже с помощью формулы Тейлора.

<u>Замечание.</u> В рассмотренном ранее примере $\lim\limits_{x \to 0} \frac{2x \sin x - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{x^2}$ разность в числителе заменили на эквивалентные, так как $2x \sin x \sim 2x^2$, $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} \sim \frac{x^2}{4}$ при $x \to 0$ и $2x^2 \neq \frac{x^2}{4}$.

Примеры вычисления пределов

Пример 4. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{e^{3x^2}-1}$.

Р е ш е н и е. По таблице эквивалентных бесконечно малых получаем:

$$\operatorname{arctg} x^2 \ \sim \ x^2,\ e^{3x^2} - 1 \ \sim \ 3x^2 \text{ при } x \to 0.$$

Тогда

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{arctg} x^2}{e^{3x^2}-1} = \lim_{x \to 0} \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}.$$

Пример 5. Вычислить предел $\lim\limits_{x \to \pi} \frac{\sin 2x}{\sin 3x}$

Р е ш е н и е. Величины $2x$ и $3x$ не являются бесконечно малыми при $x \to \pi$, поэтому бесконечно малые при $x \to \pi$ величины $\sin 2x$ и $\sin 3x$ нельзя заменить на их аргументы $2x$ и $3x$ соответственно.

Сделаем замену переменной. Пусть $y = x - \pi$, тогда $x = \pi + y$ и $y \to 0$ при $x \to \pi$.

Получим

$$\lim_{x \to \pi} \frac{\sin 2x}{\sin 3x} = \lim_{y \to 0} \frac{\sin (2\pi + 2y)}{\sin (3\pi + 3y)} = \lim_{y \to 0} \frac{\sin 2y}{(-\sin 3y)} = \lim_{y \to 0} -\frac{2y}{3y} = -\frac{2}{3}.$$

Пример 6. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}\frac{2^x-2}{\ln x}$.

Р е ш е н и е. Преобразуем выражения в числителе:

$$2^x-2=2(2^{x-1}-1)$$

и в знаменателе:

$$\ln x=\ln(1+(x-1)).$$

$2^{x-1}-1$ и $\ln(1+(x-1))$ есть бесконечно малые величины при $x\to 1$,

поэтому из таблицы эквивалентных функций имеем:

$$2^{x-1}-1\sim(x-1)\ln 2 \text{ и } \ln(1+(x-1))\sim(x-1) \text{ при } x\to 1.$$

Таким образом,

$$\lim_{x\to 1}\frac{2^x-2}{\ln x}=\lim_{x\to 1}\frac{2(2^{x-1}-1)}{\ln(1+(x-1))x}=\lim_{x\to 1}\frac{2(x-1)\ln 2}{x-1}=2\ln 2.$$

Этот предел можно вычислить, сделав замену переменной $x-1=t$ при $t\to 0$ и перейдя к пределу $\lim\limits_{t\to 0}\frac{2^{t+1}-2}{\ln(1+t)}$.

Вычислить предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\arcsin x^3}{3^{x^3} - 1}.$$

- 1
- $\frac{1}{\ln 3}$
- $\frac{1}{3}$
- ∞
- 0

Вычислить предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg}(1-\cos x)}{\sin^2\frac{x}{2}}.$$

- $\frac{1}{2}$
- 0
- 2
- 1
- $\frac{1}{4}$

Вычислить предел

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\ln\cos 2x}{\left(1-\frac{\pi}{x}\right)^2}$$

- π
- $\frac{1}{\pi^2}$
- 2
- $-2\pi^2$
- 0

Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\ln(2x-5)}{e^{\sin \pi x}-1}$.

- 2π
- $-\frac{2}{\pi}$
- 1
- $\frac{3}{e}$
- $\frac{1}{\pi}$

Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 0} \left(\frac{1+\operatorname{tg} x}{1+\sin x} \right)^{\frac{1}{\sin x}}$

- 0
- 1
- -1
- ∞
- $\frac{1}{e}$

Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln \cos x}{\ln \cos 3x}$

- ∞
- $\frac{1}{9}$
- 0
- $\frac{1}{3}$
- 1

Вычислить предел $\lim\limits_{x \to +0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$

- 0
- $\frac{1}{3}$
- $-\frac{1}{3}$
- 1
- ∞

Вычислить предел $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$

- 2
- 0
- ∞
- 1
- 6