

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования

«Ижевский государственный технический университет  
имени М. Т. Калашникова»



Кафедра «Программное обеспечение»

Курс «Дискретная математика»

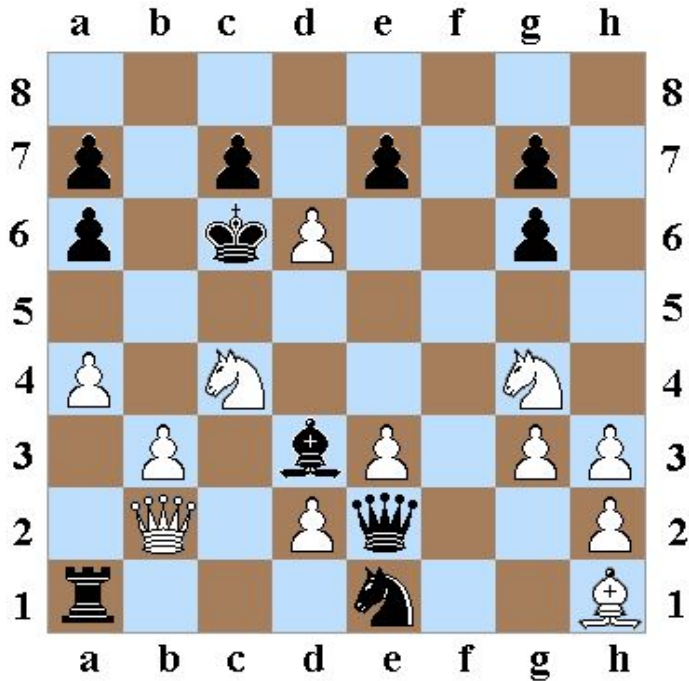
Тема «Отношения»

Автор Макарова О.Л.

- **Отношения**

1. Упорядоченные наборы
2. Произведение множеств
3. Бинарные отношения
4. Представление отношений
5. Функциональные отношения
6. Отношения эквивалентности
7. Отношения порядка

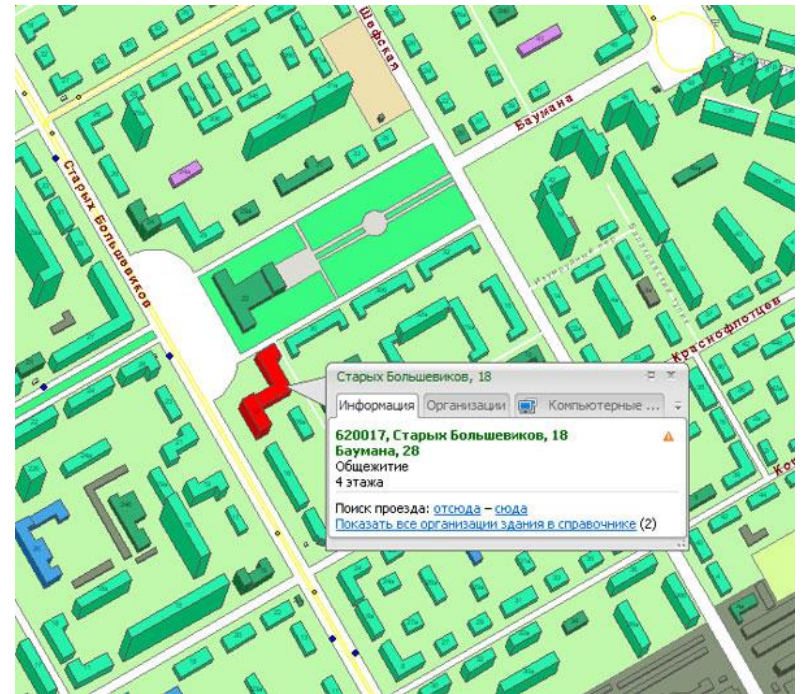
# Отношения. Упорядоченные наборы



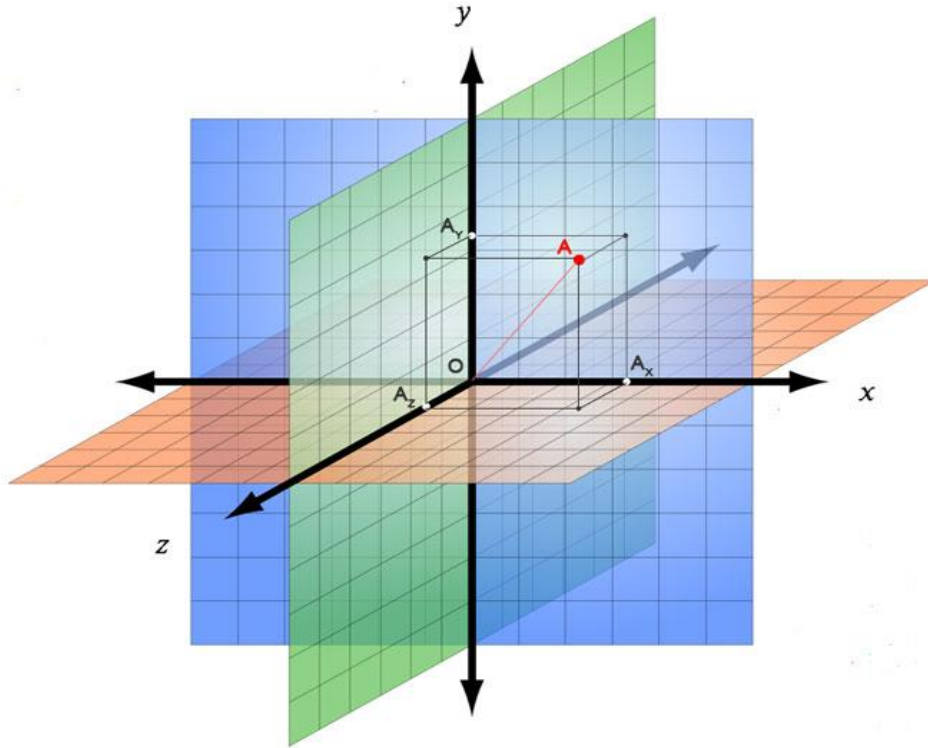
Положение шахматной фигуры однозначно определяется двумя символами: **c4** – белый конь, **e2** – черный король и т.д.

Положение общежития однозначно определяется двумя данными:

**название улицы + номер дома.**



# Отношения. Упорядоченные наборы



Местоположение  
любого объекта  
однозначно  
определяется  
координатами:

$(X, Y, Z)$

$(10, -5, 3) \neq (3, 10, -5)$

# Отношения. Упорядоченные наборы



Данные о человеке  
однозначно определяются:

- Фамилия
- Имя
- Отчество
- Дата рождения (чч.мм.гггг)
- Место рождения
- Паспортные данные  
(серия, номер, кем выдан,  
когда выдан)

# Отношения. Упорядоченные наборы

- *Упорядоченный набор (кортеж, n-ка)* данных – последовательность из  $n$  объектов  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , где  $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n$ .

Обозначение:  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$

- **Теорема:** Два набора одной длины равны, если равны их соответствующие элементы:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \Leftrightarrow \forall k (a_k = b_k), k = 1..n.$$

Пример:

(РФ, УР, г.Ижевск, ул.Студенческая, 42) – адрес корпуса 3 ИжГТУ;

(1,5,3) – координаты вектора в пространстве;

0101001101 – битовая шкала, двоичное представление числа 333.

# Отношения. Прямое произведение множеств

- Прямое произведение множеств  $A_1, A_2, \dots, A_n$  есть множество всех упорядоченных наборов вида  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , где  $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n$ .

Обозначение:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{ (a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i, i = 1..n \}$$

Пример:

Пусть  $A = \{ 1, 3, 5 \}, D = \{ x, y \}, N = \{ 4 \}$ .

Тогда  $A \times N = \{ (1, 4), (3, 4), (5, 4) \}$ ;

$A \times D = \{ (1, x), (3, x), (5, x), (1, y), (3, y), (5, y) \}$ ;

$D \times A = \{ (x, 1), (x, 3), (x, 5), (y, 1), (y, 3), (y, 5) \}$ ;

$A \times D \times N = \{ (1, x, 4), (3, x, 4), (5, x, 4), (1, y, 4), (3, y, 4), (5, y, 4) \}$ .

# Отношения. Прямое произведение множеств

□ Теорема: Для конечных множеств  $A$  и  $B$   $|A \times B| = |A| \times |B|$ .

□ Лемма:  $(A \times B) \times C \sim A \times (B \times C)$ .

- Степенью множества  $A$  называется  $n$ -кратное прямое произведение самого на себя.

Обозначение:  $A^n = A \times A \times \dots \times A$

Соответственно:  $A^0 = \{\Lambda\}$ ;  $A^1 = A$ ;  $A^2 = A \times A$ ;  $\dots$ ;  $A^n = A \times A^{n-1}$ .

□ Следствие:  $|A^n| = |A|^n$ .

Пример: Пусть  $B = \{0, 1\}$  – булево множество. Тогда

$B^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in B, i=1..n\}$  – множество битовых шкал (слов длины  $n$ ).



# Бинарные отношения

- **Бинарным отношением** между множествами  $A$  и  $B$  называется подмножество  $R$  прямого произведения  $A \times B$ . Если  $A = B$ , то говорят об отношении на множестве  $A$ .

Обозначение:  $R \subset A \times B$  или  $R : A \rightarrow B$

$$R = \{ (x, y) \mid x \in A, y \in B, xRy \},$$

$xRy$  – элемент  $x$  находится в отношении  $R$  к элементу  $y$ .

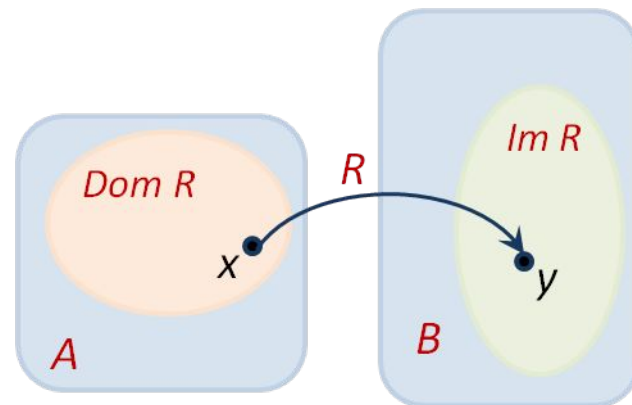
$A$  - область отправления  $B$  - область прибытия

- **Область определения отношения  $R$ :**

$$\text{Dom } R = \{ x \in A \mid \exists y \in B: (x, y) \in R \}$$

- **Область значения отношения  $R$ :**

$$\text{Im } R = \{ y \in B \mid \exists x \in A: (x, y) \in R \}$$



# Бинарные отношения

Пример: Семья Weasley.

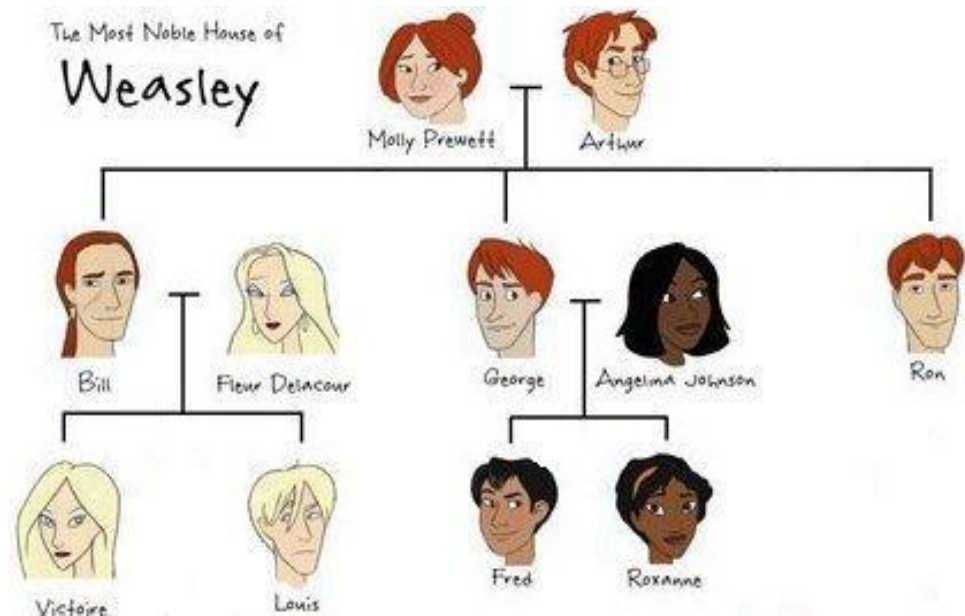
Отношение  $R = \{(x, y) \mid x - \text{отец } y\}$ .

Тогда  $A = B$  – семья Weasley

$R = \{(Arthur, Bill), (Arthur, George), (Arthur, Ron), (Bill, Victoire), (Bill, Louis), (George, Fred), (George, Roxanne)\}$

$Dom R = \{Arthur, Bill, George\}$

$Im R = \{Bill, George, Ron, Victoire, Louis, Fred, Roxanne\}$



# Бинарные отношения

Пример: Семья Weasley.

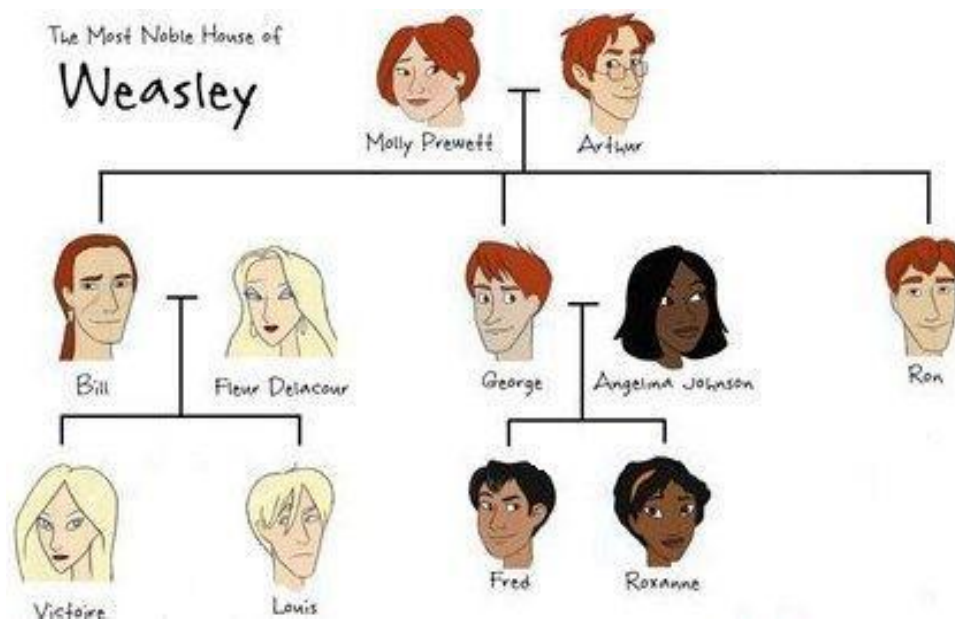
Отношение  $R = \{(x, y) \mid x - \text{сестра } y\}$ .

Тогда  $A = B$  – семья Weasley

$R = \{(Victoire, Louis), (Roxanne, Fred)\}$

$Dom R = \{Victoire, Roxanne\}$

$Im R = \{Louis, Fred\}$



# Бинарные отношения

## Особые виды отношений

Пусть  $R$  - отношение между множествами  $A$  и  $B$ .

- *Обратное* отношение

$$R^{-1} = \{ (a, b) \mid (b, a) \in R \} \subset B \times A$$

- *Дополнение* отношение

$$R = \{ (a, \bar{b}) \mid (a, b) \notin R \} \subset A \times B$$

- *Тождественное* отношение (*диагональ* множества)

$$Id = I = \{ (a, a) \mid a \in A \} \subset A^2$$

- *Универсальное* отношение

$$U = \{ (a, b) \mid a \in A \text{ и } b \in B \} = A \times B$$

# Бинарные отношения

## Операции над отношениями

- Отношение – это некоторое множество  $\Rightarrow$  допустимы все теоретико-множественные операции

Пример:  $\mathbb{N}$  - на множестве натуральных чисел, тогда если  $<$  - отношение «... меньше ...»

$=$  - отношение «... равно ...»

$|$  - отношение «... делит ...», то

$< \cup =$	получается отношение $\leq$
$< \cap  $	получается отношение «делит, но не равно»
$  \nabla =$	получается отношение «делит, но не равно»
$<$	получается отношение $\geq$



# Бинарные отношения

## Композиция отношений

Пусть  $R_1 : A \rightarrow B$  и  $R_2 : B \rightarrow C$ .

- **Композиция** отношений  $R_1$  и  $R_2$  - отношение  $R : A \rightarrow C$ , определяемое по правилу:

$$R = \{ (a, c) \mid \exists b \in B : (a, b) \in R_1 \text{ и } (b, c) \in R_2 \}$$

Обозначение:  $R = R_1 \circ R_2$

Пример:  $\mathbb{N}$  - на множестве натуральных чисел, тогда  
если  $<$  - отношение «... меньше ...»  
 $|$  - отношение «... делит ...», то

Композиция	Пояснение	Результат
$  \circ <$	$a (  \circ <) c$ , если найдется $b$ , что $b < c$ и $a   b$ , что верно для любых $a < c$	$<$

# Бинарные отношения

## Свойства отношений

Пусть  $R$  - отношение на множестве  $A$ .

- Рефлексивность  $\forall x \in A \Rightarrow (x, x) \in R$
- Симметричность  $\forall x, y \in A \Rightarrow ((x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R)$
- Транзитивность  $\forall x, y, z \in A \Rightarrow ((x, y) \in R \text{ и } (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R)$
- Линейность  $\forall x, y \in A \Rightarrow ((x, y) \in R \text{ или } (y, x) \in R \text{ или } x = y)$

Приставки	Действие
<i>анти, ир, а</i>	данное свойство <i>для любых элементов</i> не выполняется
<i>не</i>	данное свойство <i>нарушается для некоторых</i> элементов

# Бинарные отношения

## Свойства отношений

□ Теорема: Если  $R \subset A^2$  - отношение на множестве  $A$ , то

1.  $R$  - рефлексивно  $\Leftrightarrow Id \subset R$ ;
1.  $R$  - симметрично  $\Leftrightarrow R = R^{-1}$ ;
2.  $R$  - транзитивно  $\Leftrightarrow R \circ R \subset R$ ;
3.  $R$  - антирефлексивно  $\Leftrightarrow R \cap Id = \emptyset$ ;
4.  $R$  - антисимметрично  $\Leftrightarrow R \cap R^{-1} \subset Id$ ;
5.  $R$  – линейно  $\Leftrightarrow R \cup R^{-1} \cup Id = U$ .



# Представление отношений

- прямым перечислением всех пар
- в виде графа
- графиком
- матрицей (машинное представление)

Пусть  $R \subset A \times B$  - отношение между множествами  $A$  и  $B$  или  $R : A \rightarrow B$ ,  
 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ,  $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ .

• **Матрица отношения** – это прямоугольная **булева** матрица  $S_{n \times m} = (S_{ij})$   $i = 1..n$ ,

$j = 1..m$ , у которой строки соответствуют множеству  $A$ , столбцы – множеству  $B$ , а элемент  $S_{ij} = a_i S b_j$ .

Программное представление:

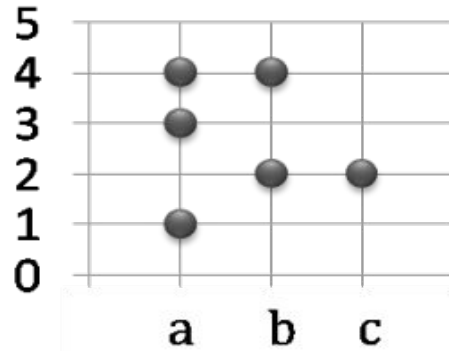
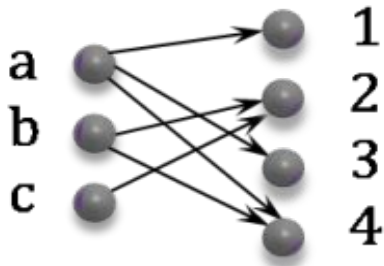
```
Var  
S: array [1..n, 1..m] of 0..1;  
S: array [1..n, 1..m] of boolean;
```

# Представление отношений

Пример: Пусть  $X = \{a, b, c\}$ ,  $Y = \{1, 2, 3, 4\}$ .

$R = \{(a, 1), (a, 3), (a, 4), (b, 2), (b, 4), (c, 2)\}$  — отношение из  $X$  в  $Y$ .

Тогда:



	1	2	3	4
<i>a</i>	1	0	1	1
<i>b</i>	0	1	0	1
<i>c</i>	0	1	0	0

Граф отношения

График отношения

Матрица отношения

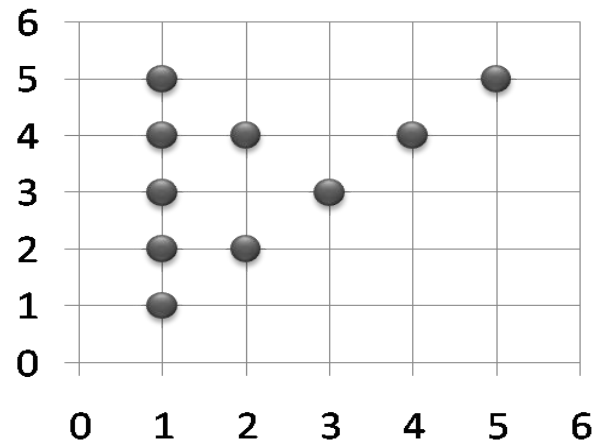
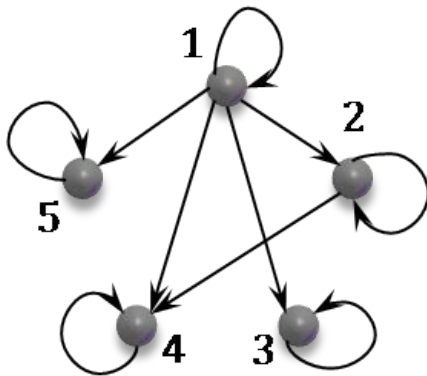
# Представление отношений

Пример: Пусть  $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ .

$R = \{(x, y) \mid x, y \in A, y \div x\}$  — отношение на  $A$ .

$y \div x$  -  $y$  делится на  $x$  без остатка. Тогда

$R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}$ .



	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	0
3	0	0	1	0	0
4	0	0	0	1	0
5	0	0	0	0	1

Граф отношения  
отношения

График отношения

Матрица

# Функции

Пусть  $f$  - отношение между множествами  $A$  и  $B$ .

- Отношение называется **функциональным (функцией)**, если

$$\forall x \in A \Rightarrow ((x, y) \in R \text{ и } (x, z) \in R) \Rightarrow y = z$$

Обозначение:  $f: A \rightarrow B$  или  $y = f(x)$

$y$  – значение функции       $x$  – аргумент

$Dom f = \{x \in A \mid \exists y \in B: y = f(x)\}$  - область определения функции

$Im f = \{y \in B \mid \exists x \in A: y = f(x)\}$  - область значения функции

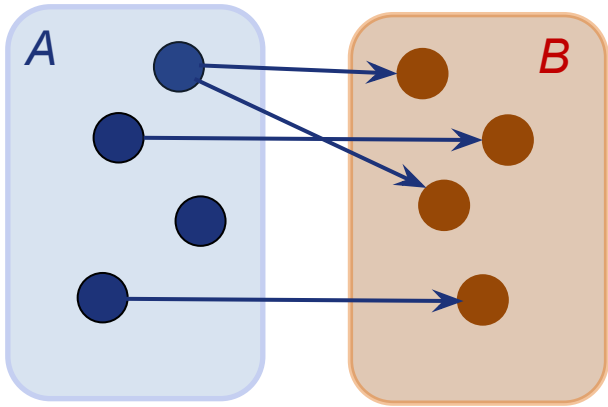
Свойства:

**инъективность:** если  $y = f(x_1)$  и  $y = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ ;

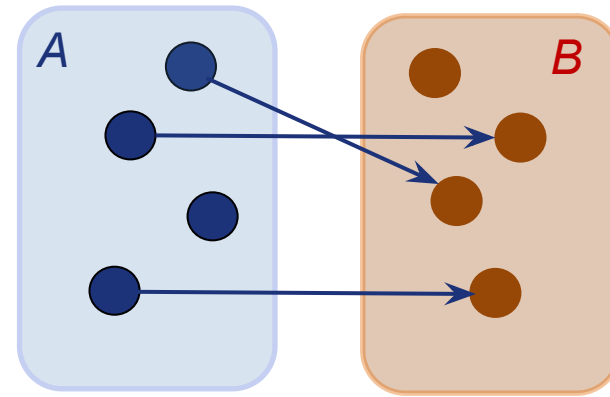
**сюръективность:** если  $\forall y \in B (\exists x \in A: y = f(x))$ ;

**биективность:** если функция инъективна  
и сюръективна.

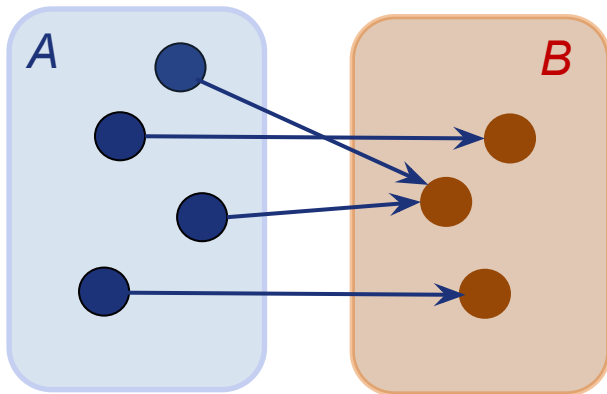
# Функции



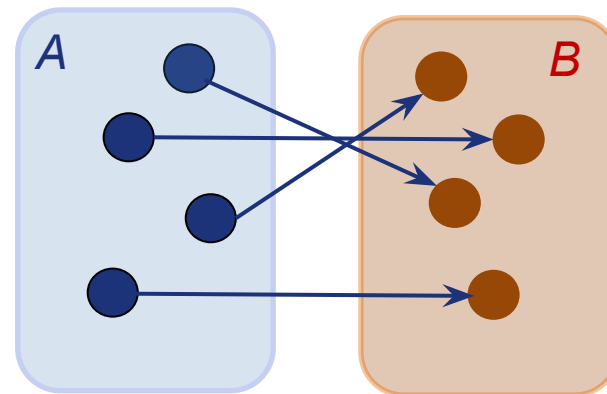
Отношение, но не функция



Инъекция, но не сюръекция



Тотальная сюръекция,  
но не инъекция



Биекция

- **Теорема:** Если  $f : A \rightarrow B$  - тотальная биекция, то отношение  $f^{-1} \subset B \times A$  (обратная функция) тоже является биекцией.
- **Следствие:** Если  $f : A \rightarrow B$  - инъективная функция, то отношение  $f^{-1} \subset B \times A$  тоже является функцией (возможно, частичной), т.е.  $f^{-1} : B \rightarrow A$ .
- **Теорема:** Если  $f : A \rightarrow B$  - функция, то  $F : 2^{f(A)} \rightarrow 2^{f(B)}$  (переход к образам) и  $F^{-1} : 2^{f(B)} \rightarrow 2^{f(A)}$  (переход к прообразам) - тоже функция.

# Функции

- Композиция функций называется *суперпозицией*

Обозначение: если  $f: A \rightarrow B$  и  $g: B \rightarrow C$ , то

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$  – суперпозиция функций  $f$  и  $g$

□ **Теорема:** Суперпозиция функций является функцией.

Пример: Пусть  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  и  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = x^2 \text{ и } g(x) = \begin{cases} 2x + 1, & \text{если } x \geq 0, \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Тогда:  $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = (x^2)^2 = x^4;$

$$(f \circ g)(x) = g(f(x)) = 2x^2 + 1;$$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = \begin{cases} 4x + 3, & \text{если } x \geq 0, \\ 1 - 2x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

$$(g \circ f)(x) = f(g(x)) = \begin{cases} (2x + 1)^2, & \text{если } x \geq 0, \\ x^2, & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

# Отношения эквивалентности

- Отношение *эквивалентности* – рефлексивное, симметричное, транзитивное отношение.
- Если  $R$  - отношение эквивалентности, то говорят, что элемент  $x$  *эквивалентен* элементу  $y \Leftrightarrow xRy$ .

Обозначение:  $x \sim y$  или  $x \equiv y$

Отношение	Пояснение
<i>«... имеет те же углы, что и ...» на множестве треугольников</i>	треугольники эквивалентны $\Leftrightarrow$ они подобны
$xRy \Leftrightarrow xy > 0$ на множестве ненулевых целых чисел	числа эквивалентны $\Leftrightarrow$ имеют одинаковый знак
<i>«... имеет тот же возраст, что и ...» на множестве людей</i>	«эквивалентные» люди принадлежат одной возрастной группе



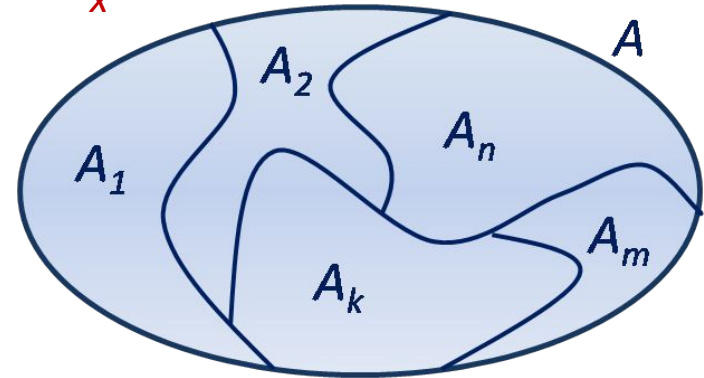
# Отношения эквивалентности

□ **Теорема:** отношение эквивалентности на некотором множестве  $A$  порождает его разбиение на **классы эквивалентности** – множества элементов, эквивалентных между собой.

• **Класс эквивалентности** для  $x$ :  $E_x = [x] = \{y \in A \mid x \sim y\}$

Свойства:

- $\forall a \in A [a] \neq \emptyset$
- $a \not\sim b \Rightarrow [a] \cap [b] = \emptyset$
- $a \sim b \Rightarrow [a] \cap [b] = [a]$



- **Фактормножество** множества  $A$  относительно эквивалентности  $R$  – множество всех классов эквивалентности

# Отношения порядка

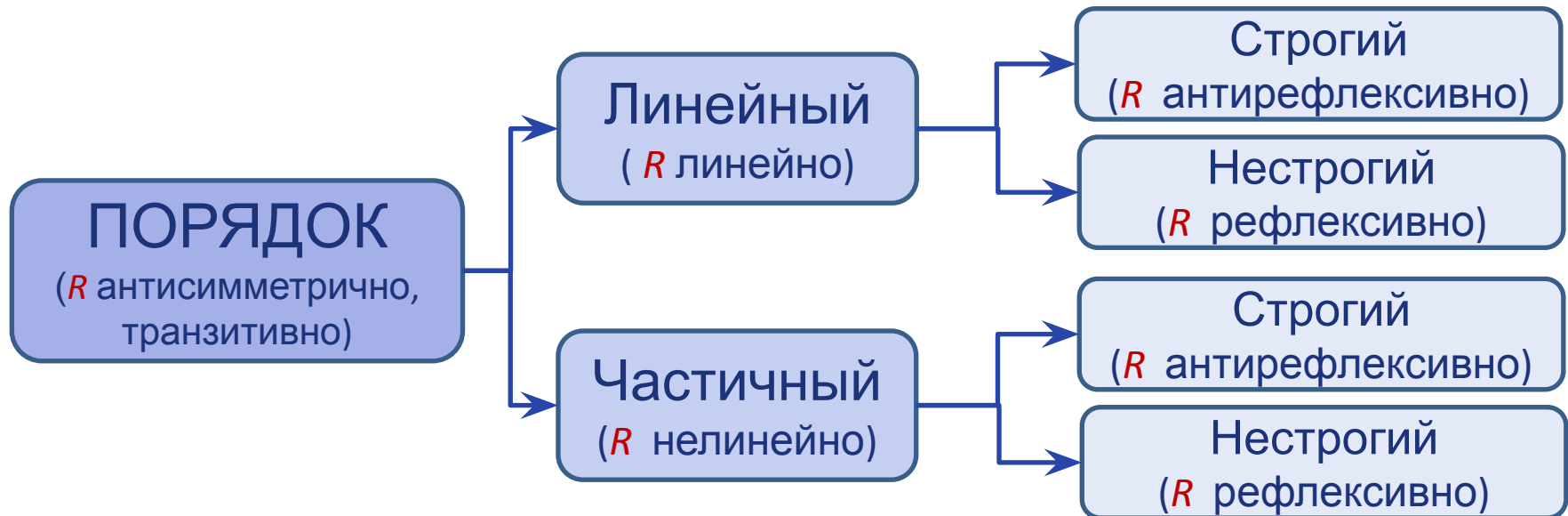
- Отношение *порядка* – антисимметричное, транзитивное отношение.

Обозначение:  $R$  – отношение порядка на множестве  $A$

$R \sim <$  или  $xRy \Leftrightarrow x < y \Leftrightarrow x$  предшествует  $y$

предок

потомок



# Отношения порядка

## Примеры:

Отношение	Свойства	Вид
$<$ на множестве $\mathbb{Z}$	<ul style="list-style-type: none"><li>• антирефлексивно</li><li>• антисимметрично</li><li>• транзитивно</li></ul>	строгий линейный порядок
$\subset$ на булеане $2^A, A \neq \emptyset$	<ul style="list-style-type: none"><li>• рефлексивно</li><li>• антисимметрично</li><li>• транзитивно</li></ul>	нестрогий частичный порядок
$\equiv \pmod{m}$ на множестве $\mathbb{N}$	<ul style="list-style-type: none"><li>• рефлексивно</li><li>• симметрично</li><li>• транзитивно</li></ul>	отношение эквивалентности
$ $ (делит) на множестве $\mathbb{N}$	<ul style="list-style-type: none"><li>• рефлексивно</li><li>• антисимметрично</li><li>• транзитивно</li></ul>	нестрогий частичный порядок

# Отношения порядка

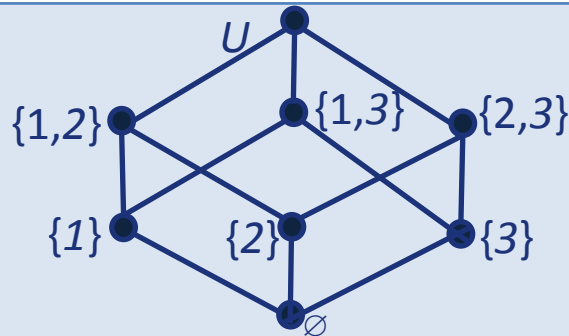
## Диаграммы Хассе

$R$  – отношение частичного порядка на  $A$ . Говорят:

- $x \in A$  является непосредственным предком для  $y$ , если  $\forall z \in A (x < z \text{ и } z < y) \Rightarrow (x = z \text{ или } z = y)$  Обозначение:  $x \preceq y$
- $x \in A$  называется *минимальным*, если у него нет предков
- $x \in A$  называется *максимальным*, если у него нет потомков

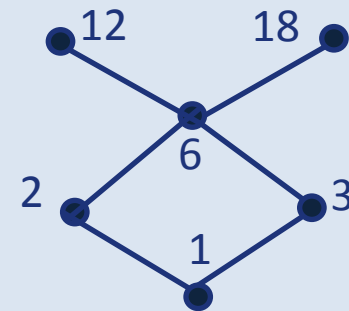
Отношение  $\subset$  на булеане  $2^A$ ,  $A = \{1, 2, 3\}$

Диаграмма  
Хассе



Свойства  $\emptyset$  – минимальный элемент  
 $U$  – максимальный элемент

$|$  (делит) на множестве  $A = \{1, 2, 3, 6, 12, 18\}$



1 – минимальный элемент  
12, 18 – максимальные элементы

**СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ**

© ФГБОУ ВПО ИжГТУ имени М.Т. Калашникова, 2013

© Макарова Ольга Леонидовна, 2013