Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Ижевский государственный технический университет
имени М. Т. Калашникова»

Кафедра «Программное обеспечение»

Курс «Дискретная математика»
Тема «Отношения»

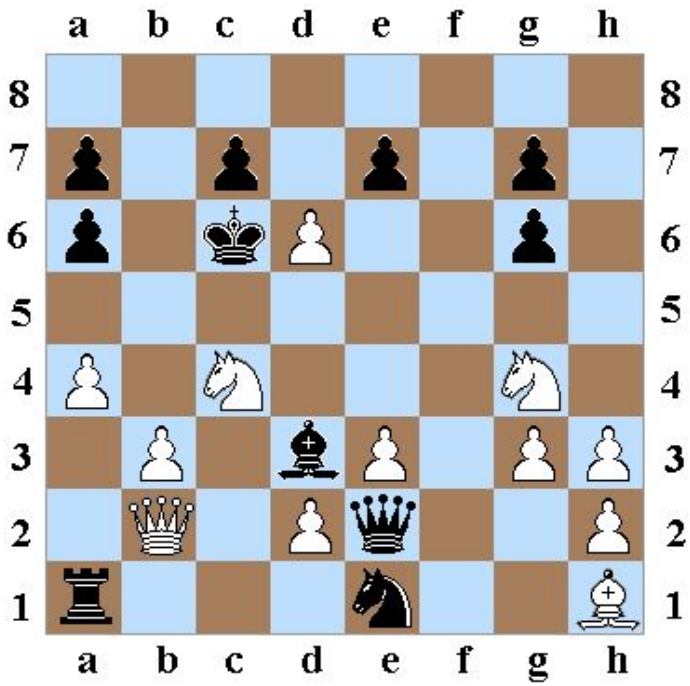
Автор Макарова О.Л.

Ижевск
2013

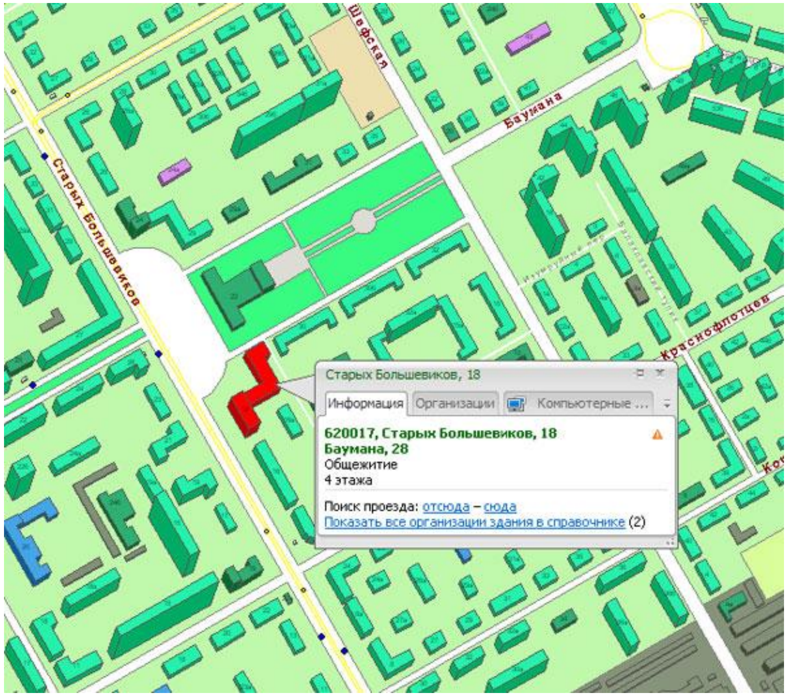
Вопросы

- **Отношения**
  1. Упорядоченные наборы
  2. Произведение множеств
  3. Бинарные отношения
  4. Представление отношений
  5. Функциональные отношения
  6. Отношения эквивалентности
  7. Отношения порядка

Отношения. Упорядоченные наборы



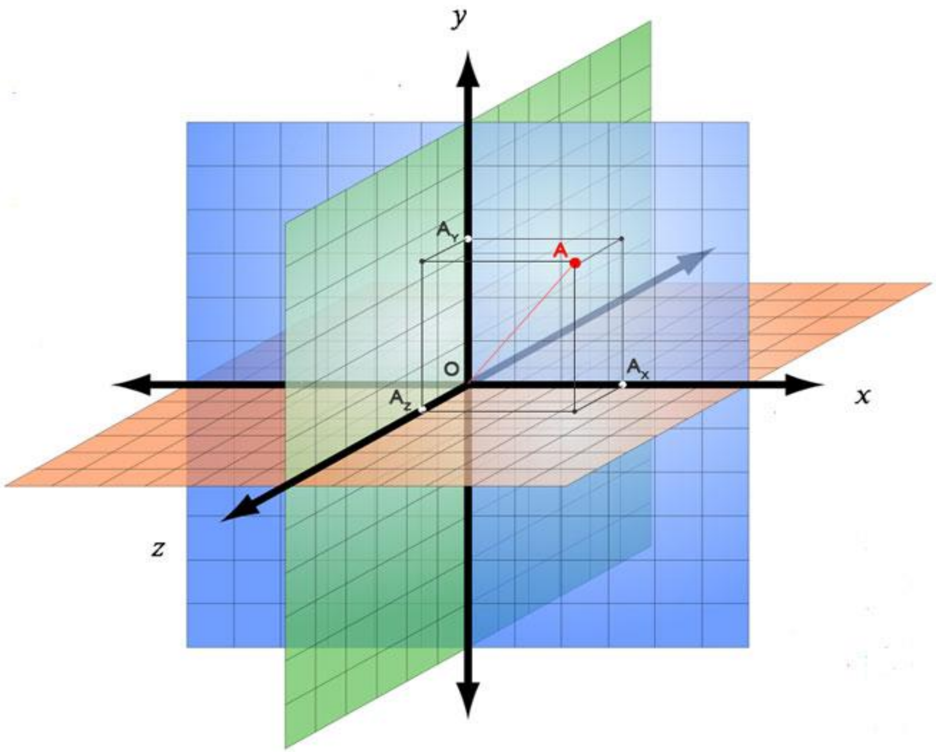
Положение шахматной фигуры однозначно определяется двумя символами: c4 – белый конь, e2 – черный король и т.д.



Положение общежития однозначно определяется двумя данными:

название улицы + номер дома.

Отношения. Упорядоченные наборы



Местоположение любого объекта однозначно определяется координатами:

(X, Y, Z)

$(10, -5, 3) \neq (3, 10, -5)$

Отношения. Упорядоченные наборы

Данные о человеке однозначно определяются:

- Фамилия
- Имя
- Отчество
- Дата рождения (чч.мм.гггг)
- Место рождения
- Паспортные данные (серия, номер, кем выдан, когда выдан)

Отношения. Упорядоченные наборы

- *Упорядоченный набор* (*кортеж*, *n-ка*) данных – последовательность из *n* объектов $a_1, a_2, \dots, a_n$,

где $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n$.

Обозначение: $(a_1, a_2, \dots, a_n)$

- **Теорема:** *Два набора одной длины равны, если равны их соответствующие элементы:*

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n) \Leftrightarrow \forall k\ (a_k = b_k),\ k = 1..n.$$

Пример:

(РФ, УР, г.Ижевск, ул.Студенческая, 42) – адрес корпуса 3 ИжГТУ;

(1,5,3) – координаты вектора в пространстве;

0101001101 – битовая шкала, двоичное представление числа 333.

Отношения. Прямое произведение множеств

- *Прямое произведение множеств* $A_1, A_2, \dots, A_n$ есть множество всех упорядоченных наборов вида $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, где $a_1 \in A_1$, $a_2 \in A_2$, …, $a_n \in A_n$.

Обозначение:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{ (a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i, i = 1..n \}$$

Пример:

Пусть $A = \{ 1, 3, 5 \}$, $D = \{ x, y \}$, $N = \{ 4 \}$.

Тогда $A \times N = \{ (1, 4), (3, 4), (5, 4) \}$;

$A \times D = \{ (1, x), (3, x), (5, x), (1, y), (3, y), (5, y)\}$;

$D \times A = \{ (x, 1), (x, 3), (x, 5), (y, 1), (y, 3), (y, 5)\}$;

$A \times D \times N = \{ (1, x, 4), (3, x, 4), (5, x, 4), (1, y, 4), (3, y, 4), (5, y, 4)\}$.

Отношения. Прямое произведение множеств

- **Теорема:** *Для конечных множеств A и B* $|A \times B| = |A| \times |B|$.
- **Лемма:** $(A \times B) \times C \sim A \times (B \times C)$.

• *Степенью множества A* называется *n*-кратное прямое произведение самого на себя.

Обозначение: $A^n = A \times A \times \ldots \times A$

Соответственно: $A^0 = \{\Lambda\}$; $A^1 = A$; $A^2 = A \times A$; $\ldots$; $A^n = A \times A^{n-1}$.

- **Следствие:** $|A^n| = |A|^n$.

Пример: *Пусть* $B = \{0, 1\}$ *– булево множество. Тогда*

$B^n = \{ (x_1, \ldots, x_n) | x_i \in B, i=1..n \}$ *– множество битовых шкал (слов длины n).*

Бинарные отношения

- *Бинарным отношением* между множествами A и B называется подмножество R прямого произведения $A \times B$. Если $A = B$, то говорят об отношении на множестве A.

Обозначение: $R \subset A \times B$ или $R : A \to B$

$R = \{ (x, y) \mid x \in A, y \in B, xRy \}$,

xRy – элемент x находится в отношении R к элементу y.

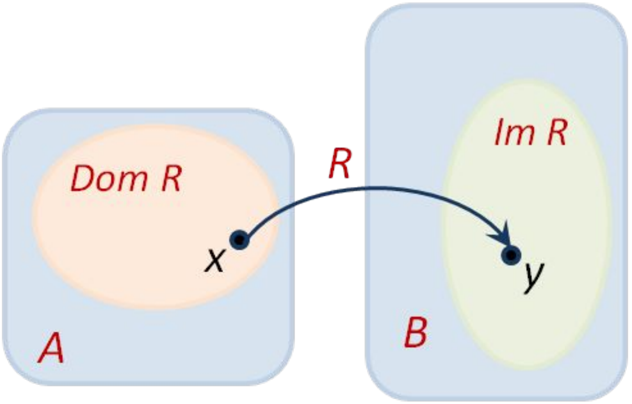
A - область отправления *B - область прибытия*

- *Область определения отношения R:*

$Dom\ R = \{x \in A \mid \exists y \in B: (x, y) \in R \}$

- *Область значения отношения R:*

$Im\ R = \{y \in B \mid \exists x \in A: (x, y) \in R \}$



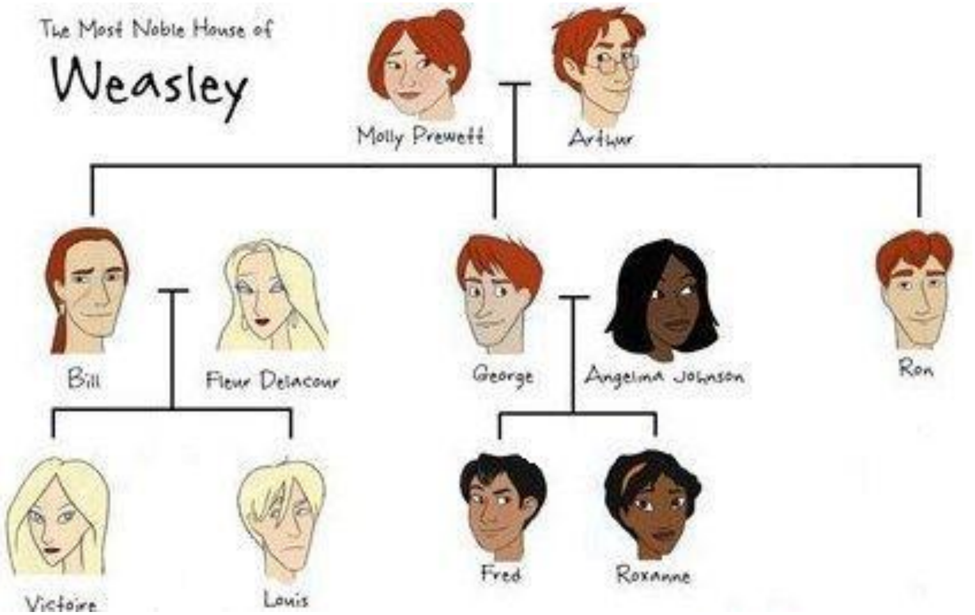
Бинарные отношения

Пример: Семья Weasley.
Отношение $R = \{(x, y) \mid x$ – отец $y\}$.
Тогда $A = B$ – семья Weasley

$R = \{(Arthur, Bill), (Arthur, George), (Arthur, Ron),$
$(Bill, Victoire), (Bill, Louis), (George, Fred), (George, Roxanne)\}$

$Dom\ R = \{Arthur, Bill, George\}$

$Im\ R = \{Bill, George, Ron,$
$Victoire, Louis,$
$Fred, Roxanne\}$



Пример: Семья Weasley.

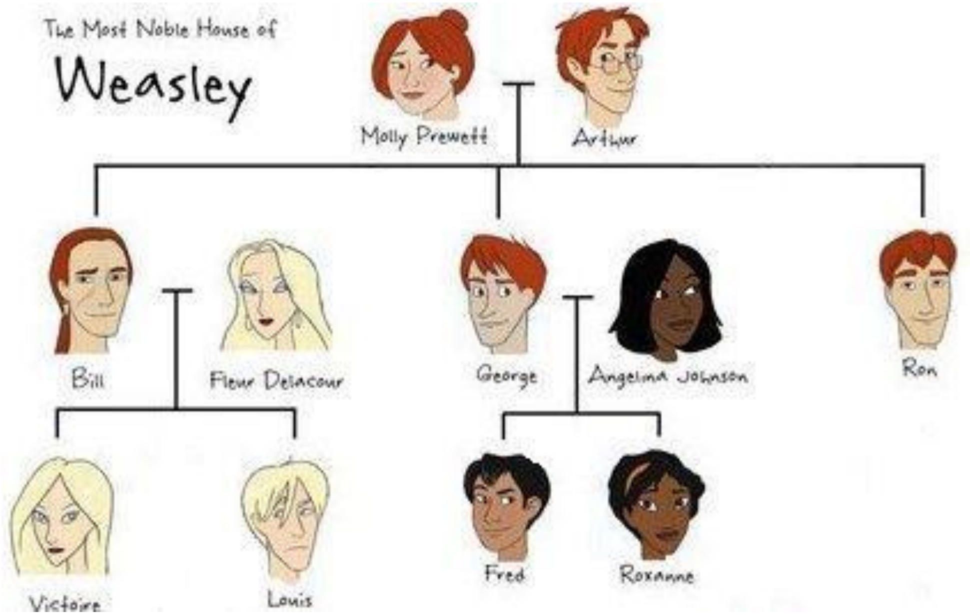
Отношение $R = \{(x, y) \mid x – \text{сестра } y\}$.

Тогда $A = B$ – семья Weasley

$R = \{ (Victoire, Louis), (Roxanne, Fred) \}$

$Dom\ R = \{Victoire, Roxanne\}$

$Im\ R = \{Louis, Fred\}$



Особые виды отношений

Пусть R - отношение между множествами A и B.

- *Обратное* отношение

$$R^{-1} = \{ (a, b) \mid (b, a) \in R \} \subset B \times A$$

- *Дополнение* отношение

$$R = \{ (a, b) \mid (a, b) \notin R \} \subset A \times B$$

- *Тождественное* отношение (*диагональ* множества)

$$Id = I = \{ (a, a) \mid a \in A \} \subset A^2$$

- *Универсальное* отношение

$$U = \{ (a, b) \mid a \in A \text{ и } b \in B \} = A \times B$$

Операции над отношениями

- Отношение – это некоторое множество ⟹ допустимы все теоретико-множественные операции

Пример: $\mathbb{N}$ - на множестве натуральных чисел, тогда
если $<$ - отношение «… меньше …»
$=$ - отношение «… равно …»
$|$ - отношение «… делит …», то

$< \cup =$	получается отношение $\leq$
$< \cap \mid$	получается отношение *«делит, но не равно»*
$\mid \not\mid =$	получается отношение *«делит, но не равно»*
$<$	получается отношение $\geq$

Композиция отношений

Пусть $R_1 : A \to B$ и $R_2 : B \to C$.

- *Композиция* отношений R_1 и R_2 - отношение $R : A \to C$, определяемое по правилу:

$R = \{ (a, c) \mid \exists b \in B : (a, b) \in R_1$ и $(b, c) \in R_2 \}$

Обозначение: $R = R_1 \circ R_2$

Пример: $\mathbb{N}$ - на множестве натуральных чисел, тогда

если $<$ - отношение «… меньше …»

$|$ - отношение «… делит …», то

Композиция	Пояснение	Результат
$\mid \circ <$	$a\ (\mid \circ <)c$, если найдется с такое b, что $b < c$ и $a \mid b$, что верно для любых $a < c$	$<$

Свойства отношений

Пусть R - отношение *на множестве A.*

- *Рефлексивность* $\forall x \in A \Rightarrow (x, x) \in R$
- *Симметричность* $\forall x, y \in A \Rightarrow ((x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R)$
- *Транзитивность* $\forall x, y, z \in A \Rightarrow ((x, y) \in R$ и $(y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$
- *Линейность* $\forall x, y \in A \Rightarrow ((x, y) \in R$ или $(y, x) \in R$ или $x = y)$

Приставки	Действие
анти, ир, а	данное свойство *для любых элементов не выполняется*
не	данное свойство *нарушается для некоторых* элементов

Свойства отношений

❑ **Теорема**: Если $R \subset A^2$ - отношение на множестве A, то

1. R - рефлексивно $\Leftrightarrow$ $Id \subset R$;
1. R - симметрично $\Leftrightarrow$ $R = R^{-1}$;
2. R - транзитивно $\Leftrightarrow$ $R \circ R \subset R$;

3. R - антирефлексивно $\Leftrightarrow$ $R \cap Id = \varnothing$;
4. R - антисимметрично $\Leftrightarrow$ $R \cap R^{-1} \subset Id$;

5. R – линейно $\Leftrightarrow$ $R \cup R^{-1} \cup Id = U$.

Представление отношений

- прямым перечислением всех пар
- в виде графа
- графиком
- матрицей (машинное представление)

Пусть $R \subset A \times B$ - отношение между множествами A и B или $R : A \to B$,
$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$.

- *Матрица отношения*– это прямоугольная *булева* матрица $S_{n \times m} = (S_{ij})$ $i = 1..n$,

  $j = 1..m$, у которой строки соответствуют множеству A, столбцы – множеству B, а элемент $S_{ij} = a_i S b_j$.

Программно ее можно описать

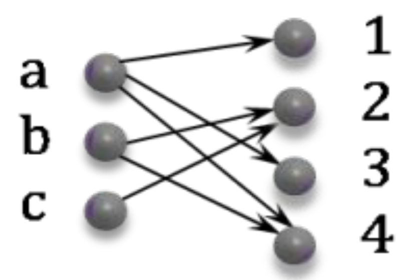
```
Var
   S: array [1..n,1..n] of 0..1;
   S: array [1..n,1..n] of boolean;
```

Представление отношений

<u>Пример</u>: Пусть $X = \{ a, b, c \}$, $Y = \{ 1, 2, 3, 4 \}$.

$R = \{(a, 1),(a, 3), (a, 4),(b, 2), (b,4),(c,2)\}$ — отношение из X в Y.

Тогда:



Граф отношения

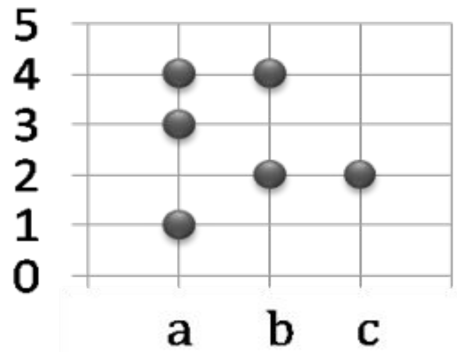


График отношения

	1	2	3	4
a	1	0	1	1
b	0	1	0	1
c	0	1	0	0

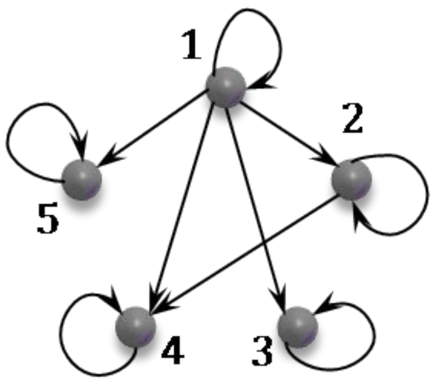
Матрица отношения

Пример: Пусть $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$.

$R = \{ (x, y) \mid x, y \in A,\ y \vdots x \}$ — отношение на A.

$y \vdots x$ - y делится на x без остатка. Тогда

$R = \{(1, 1),(1, 2),(1, 3), (1, 4),(1, 5), (2, 2), (2, 4),(3, 3), (4, 4),(5, 5)\}$.



Граф отношения

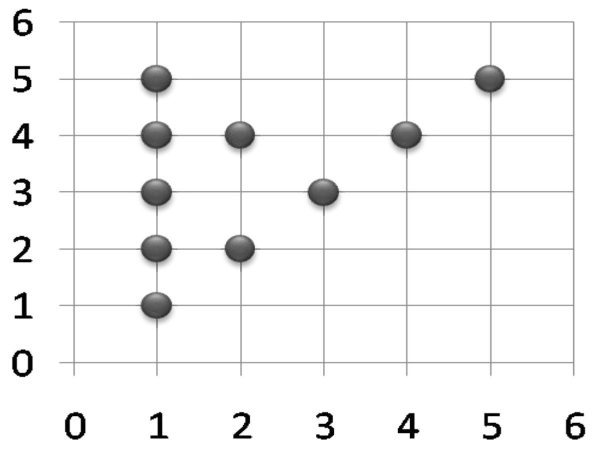


График отношения

	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	0	1	0	1	0
3	0	0	1	0	0
4	0	0	0	1	0
5	0	0	0	0	1

Матрица отношения

Функции

Пусть f - отношение между множествами A и B.

- Отношение называется *функциональным* (*функцией*), если

$\forall x \in A \Rightarrow (\ ((x, y) \in R$ и $(x, z) \in R)) \ \Rightarrow \ y = z)$

Обозначение: $f : A \to B$ или $y = f(x)$

y – значение функции x – аргумент

$Dom\ f = \{x \in A \mid \exists y \in B\!: y = f(x)\}$ - область определения функции

$Im\ f = \{y \in B \mid \exists x \in A\!: y = f(x)\}$ - область значения функции

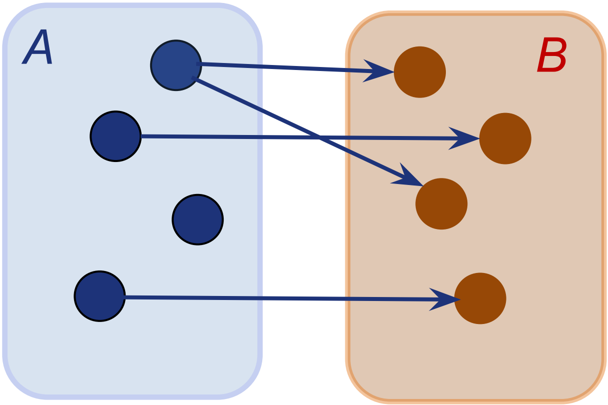
Свойства:

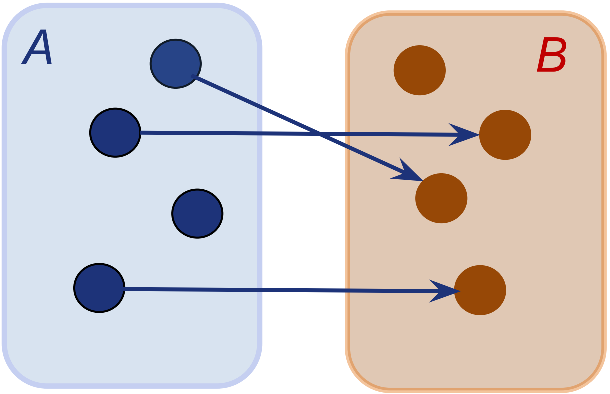
инъективность: если $y = f(x_1)$ *и* $y = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$;

сюръективность: если $\forall y \in B\ (\exists x \in A\!: \ y = f(x))$;

биективность: если функция инъективна и сюръективна.

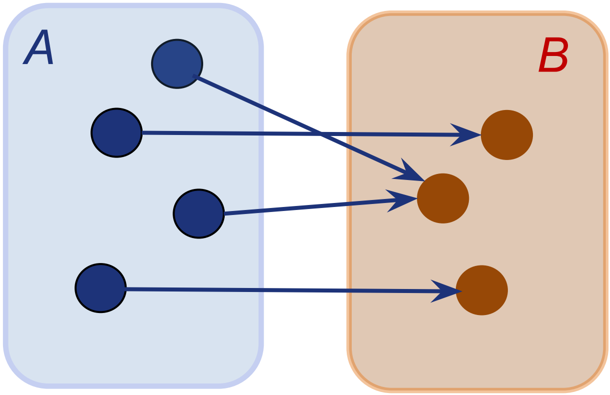
Функции

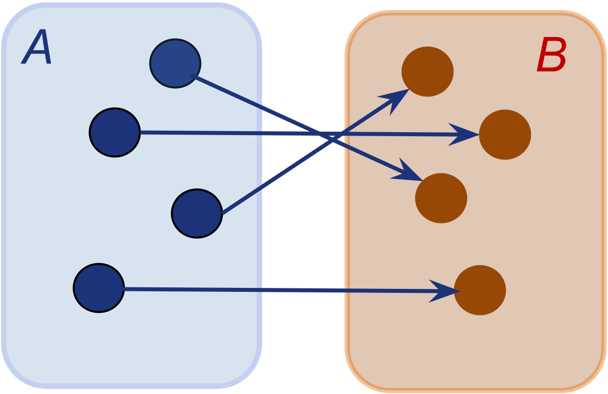




Отношение, но не функция

Инъекция, но не сюръекция





**Тотальная сюръекция,
но не инъекция**

Биекция

Функции

- **Теорема:** Если $f : A \to B$ - тотальная биекция, то отношение
  $f^{-1} \subset B \times A$ (обратная функция) тоже является биекцией.

- **Следствие:** Если $f : A \to B$ - инъективная функция, то отношение $f^{-1} \subset B \times A$ тоже является функцией (возможно, частичной), т.е. $f^{-1} : B \to A$.

- **Теорема:** Если $f : A \to B$ - функция, то $F : 2^{f(A)} \to 2^{f(B)}$ (переход к образам) и $F^{-1} : 2^{f(B)} \to 2^{f(A)}$ (переход к прообразам) - тоже функция.

- Композиция функций называется *суперпозицией*

Обозначение: если $f : A \to B$ и $g : B \to C$, то

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$ – суперпозиция функций f и g

❑ **Теорема:** Суперпозиция функций является функцией.

Пример: Пусть $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = x^2 \text{ и } g(x) = \begin{cases} 2x+1, \text{если } x \geq 0, \\ -x, \quad \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Тогда: $(f \circ f)(x) = f\big(f(x)\big) = (x^2)^2 = x^4;$

$$(f \circ g)(x) = g\big(f(x)\big) = 2x^2 + 1;$$

$$(g \circ g)(x) = g\big(g(x)\big) = \begin{cases} 4x+3, \text{если } x \geq 0, \\ 1-2x, \text{если } x < 0. \end{cases}$$

$$(g \circ f)(x) = f\big(g(x)\big) = \begin{cases} (2x+1)^2, \text{если } x \geq 0, \\ x^2, \quad \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Отношения эквивалентности

- Отношение *эквивалентности* – рефлексивное, симметричное, транзитивное отношение.
- Если R - отношение эквивалентности, то говорят, что элемент x *эквивалентен* элементу $y \Leftrightarrow xRy$.

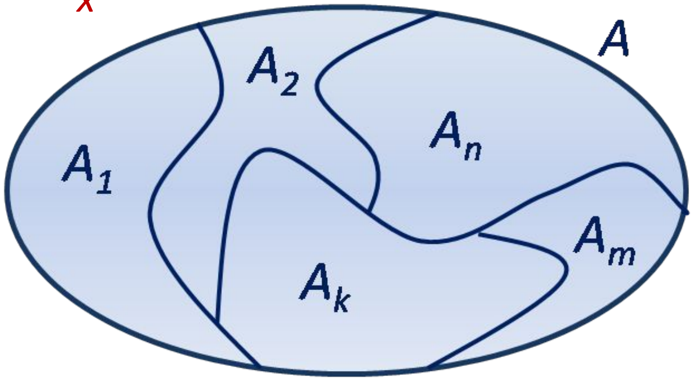
<u>Обозначение:</u> $x \sim y$ или $x \equiv y$

Отношение	Пояснение
«… имеет те же углы, что и …» *на множестве треугольников*	треугольники эквивалентны $\Leftrightarrow$ они подобны
$xRy \Leftrightarrow xy > 0$ на множестве ненулевых целых чисел	числа эквивалентны $\Leftrightarrow$ имеют одинаковый знак
«… имеет тот же возраст, что и …» *на множестве людей*	«эквивалентные» люди принадлежат одной возрастной группе

Отношения эквивалентности

- **Теорема**: отношение эквивалентности на некотором множестве *A порождает его разбиение на* ***классы эквивалентности*** – множества элементов, эквивалентных между собой.

- *Класс эквивалентности* для x : $E_x = [x] = \{\, y \in A \mid x \sim y \,\}$



Свойства:

- $\forall a \in A \; [a] \neq \varnothing$
- $a \nsim b \Rightarrow [a] = [b]$
- $a \sim b \Rightarrow [a] \cap [b] = \varnothing$

- ***Фактормножество*** множества *A* относительно эквивалентности *R* - множество всех классов эквивалентности

Отношения порядка

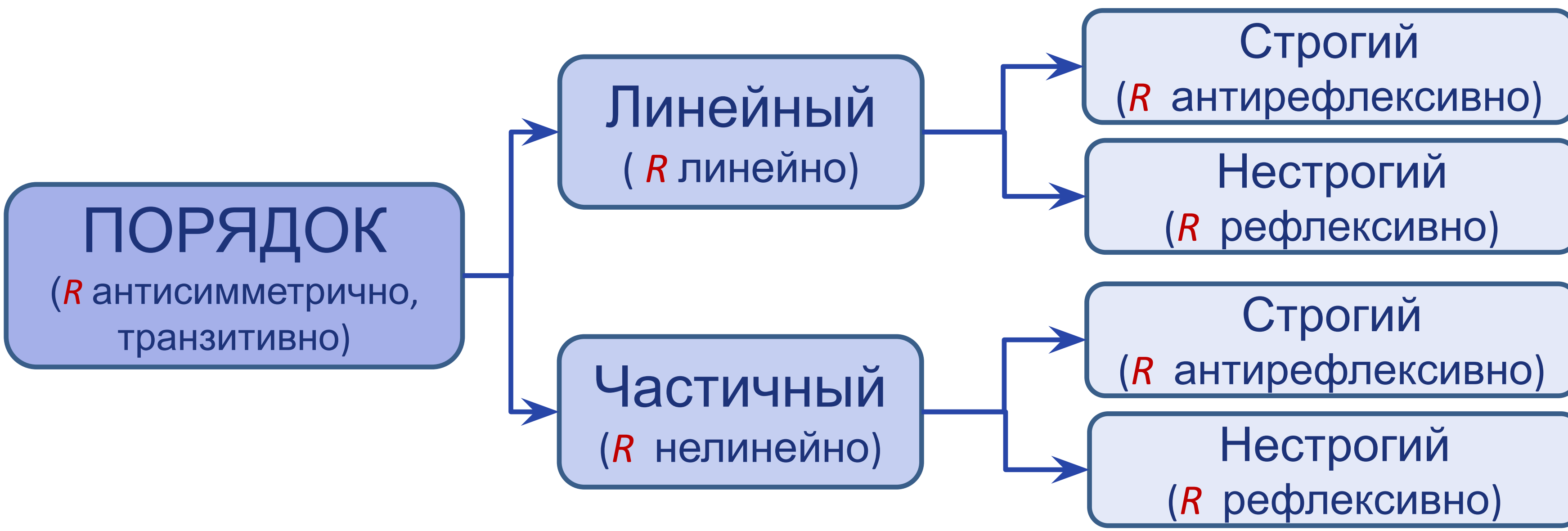
- Отношение *порядка* – антисимметричное, транзитивное отношение.

Обозначение: R – отношение порядка на множестве A

$R \sim \prec$ или $xRy \Leftrightarrow x \prec y \Leftrightarrow x$ *предшествует* y

предок

потомок



Отношения порядка

Примеры:

Отношение	Свойства	Вид
$<$ на множестве $\mathbb{Z}$	• антирефлексивно •антисимметрично •транзитивно	строгий линейный порядок
$\subset$ на булеане 2^A, $A \neq \varnothing$	•рефлексивно •антисимметрично •транзитивно	нестрогий частичный порядок
$\equiv \pmod{m}$ на множестве $\mathbb{N}$	•рефлексивно •симметрично •транзитивно	отношение эквивалентности
$\mid$ (делит) на множестве $\mathbb{N}$	•рефлексивно •антисимметрично •транзитивно	нестрогий частичный порядок

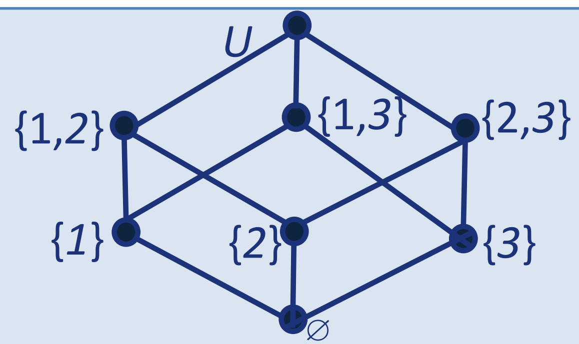
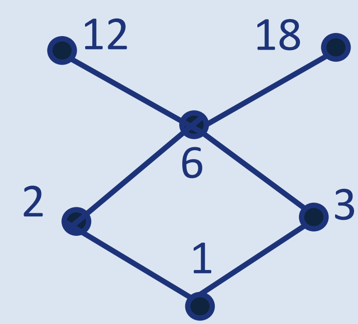
Отношения порядка

Диаграммы Хассе

R – отношение частичного порядка на A. Говорят:

- $x \in A$ является непосредственным предком для y, если

  $\forall z \in A\ \ (x \prec z \text{ и } z \prec y) \Longrightarrow (x = z \text{ или } z = y)$ Обозначение: $x \preccurlyeq y$
- $x \in A$ называется *минимальным*, если у него нет предков
- $x \in A$ называется *максимальным*, если у него нет потомков

<table>
<tr><td>Отношение</td><td>$\subset$ на булеане 2^A, $A = \{1, 2, 3\}$</td><td>| (делит) на множестве $A = \{1, 2, 3, 6, 12, 18\}$</td></tr>
<tr><td>Диаграмма Хассе</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Свойства</td><td>$\varnothing$ - минимальный элемент
U – максимальный элемент</td><td>1 – минимальный элемент
12, 18 – максимальные элементы</td></tr>
</table>

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ