

**Лекция 14. Первообразная и
неопределённый интеграл, основные
свойства неопределённого интеграла.**

§ 1. Первообразная и неопределенный интеграл.

До сих пор мы рассматривали следующую задачу: задана функция и требуется найти ее производную. Теперь будем рассматривать обратную задачу: будем находить функцию по заданной ее производной.

Интегрирование есть операция, обратная дифференцированию.

Определение 1. Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на промежутке X , если $\forall x \in X (F'(x) = f(x))$.

Пример: $y = x^2$.

$$F_1(x) = x^3/3$$

$$F_1'(x) = (x^3/3)' = (1/3)(x^3)' = (1/3)3x^2 = x^2.$$

$$F_2(x) = x^3/3 + 1$$

$$F_3(x) = x^3/3 - 5,5$$

И вообще: $F(x) = x^3/3 + c$, где $c = const$ при любом c будет первообразной.

Первообразных у функции всегда бесконечное множество.

Имеем следующее: если $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$, то и любая функция вида $F(x) + c$ тоже будет первообразной при любом c .

Возникает вопрос: а могут ли быть первообразные другого вида? Как показывает следующая теорема – нет.

Теорема (о первообразной). Пусть $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$ на промежутке X , $\Phi(x)$ – какая-то другая функция. $\Phi(x)$ является первообразной $f(x)$ на X тогда и только тогда, когда $\Phi(x) = F(x) + c$, на X , где $c = const$.

Доказательство

Необходимость. Пусть $\Phi(x)$ первообразная функции $f(x)$ на X . Рассмотрим:

$$(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0 \\ \forall x \in X,$$

таким образом, этой функции $\equiv 0$ на X . По критерию постоянства заключаем, что

$\Phi(x) - F(x) \equiv c$ на X . Отсюда $\Phi(x) = F(x) + c$ на X .

Достаточность. Пусть $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$ и $\Phi(x) = F(x) + c$, тогда

$\Phi'(x) = [F(x) + c]' = F'(x) = f(x)$ и, стало быть, $\Phi(x)$ тоже производная на этом промежутке.

Ч.т.д.

Определение 2. Пусть $F(x)$ первообразная функции $f(x)$ на X . Выражение вида $F(x) + c$, где c – произвольная постоянная (могущая принимать любые вещественные значения), называется **неопределенным интегралом** функции $f(x)$ на данном промежутке.

Обозначается: $\int f(x)dx = F(x) + c$.

При этом $f(x)$ называют подынтегральной функцией, а $f(x)dx$ – подынтегральным выражением.

Таким образом, неопределенный интеграл есть семейство функций, а именно – множество всех первообразных функции $f(x)$.

Таблица интегралов

$$1) \int 0 dx = c,$$

$$2) \int dx = x + c,$$

$$3) \int x^\mu dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + c, \quad (\mu \neq -1)$$

$$4) \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c,$$

$$5) \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c,$$

$$6) \int e^x dx = e^x + c,$$

$$7) \int \sin x dx = -\cos x + c,$$

$$8) \int \cos x dx = \sin x + c,$$

Продолжение таблицы интегралов

$$9) \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c,$$

$$10) \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + c,$$

$$11) \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + c,$$

$$12) \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{x}{a} + c,$$

$$13) \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right| + c,$$

$$14) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + c.$$

Чтобы доказать истинность каждой из этих формул, достаточно убедиться в том, что производная правой части равна подынтегральной функции.

Докажем формулу 4.

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c.$$

Требуется доказать: $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$.

a) Пусть $x > 0$. Тогда: $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$.

b) Пусть $x < 0$. Тогда: $(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-1) = \frac{1}{x}$.

Основные свойства неопределенного интеграла

$$1) \quad \left(\int f(x) dx \right)' = f(x).$$

Доказательство

$$\left(\int f(x) dx \right)' = (F(x) + c)' = F'(x) = f(x).$$

Ч.т.д.

2) $d \int f(x) dx = f(x) dx$, (символы d и \int взаимно уничтожаются).

Доказательство

$$d \int f(x) dx = \left[\int f(x) dx \right]' dx = f(x) dx.$$

Ч.т.д.

Основные свойства неопределенного интеграла (продолжение)

$$3) \int df(x) = f(x) + c.$$

Интеграл от дифференциала функции равен этой функции + c . Таким образом, символы \int и d взаимно уничтожаются.

Доказательство

$$\int df(x) = \int f'(x)dx = f(x) + c.$$

Ч.т.д.

Основные свойства неопределенного интеграла (продолжение)

4) $\int af(x)dx = \int af(x)dx$, ($a \neq 0$) - свойство однородности. Константу можно выносить за знак неопределенного интеграла.

Доказательство

Достаточно убедиться в том, что производная левой части равна производной правой части (в этом случае и в левой и в правой частях будет одно и то же семейство первообразных).

$$[\int af(x)dx]' = af(x) \text{ (по первому свойству).}$$

$$[a\int f(x)dx]' = a [\int f(x)dx]' = af(x).$$

Ч.т.д.

Основные свойства неопределенного интеграла (продолжение)

5) Аддитивность относительно подынтегральной функции.

$$\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$$

Доказательство

Достаточно показать, что производная левой части равна производной правой части (в этом случае и в левой и в правой частях будет одно и то же семейство первообразных).

$$\{ \int [f(x) \pm g(x)] \}' = f(x) \pm g(x).$$

$$\begin{aligned} [\int f(x) dx \pm \int g(x) dx]' &= [\int f(x) dx]' \pm [\int g(x) dx]' = \\ &= f(x) \pm g(x). \end{aligned}$$

Замечание 1. Свойство аддитивности справедливо для любого конечного числа слагаемых.

Замечание 2. Вычисление интегралов называется интегрированием.

§ 2. Интегрирование с помощью замены переменных (метод подстановки).

Сущность метода заключается в следующем:

$\int f(x)dx$ с помощью подстановки $x = \phi(t)$

приводят к другому, более простому для вычисления, то есть подбирают функцию

$x = \phi(t)$ так, чтобы

$$\int f(\phi(t))d\phi(t) = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

был более простым для вычисления.

Теорема (о подстановке). Пусть $\int f(t)dt = F(t) + c$,
при этом $t = \phi(x)$, тогда:

$$\int f(\phi(x))d\phi(x) = F(\phi(x)) + c,$$

или

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)dx = F(\phi(x)) + c,$$

функции f , ϕ , ϕ' считаем непрерывными.

Доказательство

Достаточно проверить, что:

$$[F(\phi(x))]' = f(\phi(x))\phi'(x)$$

Действительно,

$$F'_x = F'_t t'_x =^* f(t)\phi'(t) = f(\phi(x))\phi'(x).$$

* справедливо так как по условию $F(\phi)$
первообразная для $f(x)$. Ч.т.д.

Пример 1.

$$\begin{aligned}\int \sin^3 x \cos x dx &=^{(*)} \int \sin^3 x d\sin x = [\sin x = t] = \int t^3 dt = \\ &= t^4/4 + c = (1/4)\sin^4 x + c.\end{aligned}$$

Замечание 3. На шаге ^(*) мы осуществили так называемое внесение функции под знак дифференциала.

Пример 2.

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln x}{x} dx &= \int \ln x d\ln x = [\ln x = t] = \int t dt = \\ &= t^2/2 + c = (1/2)\ln^2 x + c.\end{aligned}$$

Из теоремы о подстановке можно извлечь один очень важный вывод, а именно, можно написать, что:

$$\int f(t)dt \Big|_{t=\phi(x)} = \int f(\phi(x))\phi'(x)dx$$

Для удобства поменяем x и t местами:

$$\int f(x)dx \Big|_{x=\phi(t)} = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

Будем предполагать, что существует обратная функция $x = \phi(t) \rightarrow t = \phi^{-1}(x)$.

Таким образом, получим следующее:

$$\int f(x)dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt \Big|_{t=\phi^{-1}(x)}$$

Отсюда получаем правило для вычисления интеграла методом подстановки: чтобы вычислить $\int f(x)dx$ с помощью подстановки $x = \phi(t)$ нужно под знаком интеграла вместо x везде подставить $\phi(t)$ (в подынтегральной функции, а также вместо dx мы подставляем $\phi'(t)dt$).

Вычисляем полученный интеграл, зависящий от t . Ответ получаем в терминах переменной t . Чтобы получить окончательный результат, нужно перейти к прежней переменной x исходя из самой подстановки.

Замечание 4. Внесение под знак дифференциала есть частный случай метода подстановки.

Метод подстановки – один из самых сильных методов интегрирования.

Пример 3.

$$\int (2x + 3)^{10} dx = \left[\begin{array}{l} 2x + 3 = t \\ x = \frac{t - 3}{2} \\ dx = \frac{1}{2} dt \end{array} \right] = (1/2) \int t^{10} dt =$$

$$= (1/2)t^{11}/11 + c = (1/22)(2x + 3)^{11} + c.$$

Пример 4.

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left[\begin{array}{l} t = \arcsin \frac{x}{a} \\ x = a \sin t \\ dx = a \cos t dt \\ \sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t \end{array} \right] = \int a^2 \cos^2 t dt =$$
$$= a^2 \int \cos^2 t dt = a^2 \int \frac{1 + \cos 2t}{2} dt = \frac{a^2}{2} \left(\int dt + \int \cos 2t dt \right) =$$
$$= \frac{a^2}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) + c =$$
$$= \frac{a^2}{2} \left(\arcsin \frac{x}{a} + \frac{1}{2} \sin \left(2 \arcsin \frac{x}{a} \right) \right) + c.$$

В этом примере мы воспользовались тем, что:

$$\text{При } a > 0: \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = a \cos t$$

И внесением константы под знак дифференциала:

$$\int \cos 2t dt = \frac{1}{2} \int \cos(2t) d(2t) = \frac{1}{2} \sin 2t + c$$