Лекция 14. Первообразная и неопределённый интеграл, основные свойства неопределённого интеграла.

§ 1. Первообразная и неопределенный интеграл.

До сих пор мы рассматривали следующую задачу: задана функция и требуется найти ее ее производную. Теперь будем рассматривать обратную задачу: будем находить функцию по заданной ее производной.

Интегрирование есть операция, обратная дифференцированию.

Определение 1. Функция $F(x)$ называется первообразной функции $f(x)$ на промежутке X, если $\forall\ x \in X\ (F'(x) = f(x))$.

Пример: $y = x^2$.

$F_1(x) = x^3/3$

$F_1'(x) = (x^3/3)' = (1/3)(x^3)' = (1/3)3x^2 = x^2$.

$F_2(x) = x^3/3 + 1$

$F_3(x) = x^3/3 – 5,5$

И вообще: $F(x) = x^3/3 + c$, где $c = const$ при любом c будет первообразной.

Первообразных у функции всегда бесконечное множество.

Имеем следующее: если $F(x)$ является первообразной функции $f\ (x)$, то и любая функция вида $F(x) + c$ тоже будет первообразной при любом c.

Возникает вопрос: а могут ли быть первообразные другого вида? Как показывает следующая теорема – нет.

<u>Теорема</u> <u>(о первообразной).</u> Пусть $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$ на промежутке X, $\Phi(x)$ – какая-то другая функция. $\Phi(x)$ является первообразной $f(x)$ на X тогда и только тогда, когда $\Phi(x) = F(x) + c$, на X, где $c = const$.

Доказательство

Необходимость. Пусть $\Phi(x)$ первообразная функции $f(x)$ на X. Рассмотрим:
$(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$ $\forall x \in X$,
таким образом, этой функции $\equiv 0$ на X. По критерию постоянства заключаем, что
$\Phi(x) - F(x) \equiv c$ на X. Отсюда $\Phi(x) = F(x) + c$ на X.

Достаточность. Пусть $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$ и $\Phi(x) = F(x) + c$, тогда
$\Phi'(x) = [F(x) + c]' = F'(x) = f(x)$ и, стало быть, $\Phi(x)$ тоже производная на этом промежутке.

Ч.т.д.

<u>Определение 2.</u> Пусть $F(x)$ первообразная функции $f(x)$ на X. Выражение вида $F(x) + c$, где c – произвольная постоянная (могущая принимать любые вещественные значения), называется **неопределенным интегралом** функции $f(x)$ на данном промежутке.

Обозначается: $\int f(x)dx = F(x) + c$.

При этом $f(x)$ называют подынтегральной функцией, а $f(x)dx$ – подынтегральным выражением.

Таким образом, неопределенный интеграл есть семейство функций, а именно – множество всех первообразных функции $f(x)$.

Таблица интегралов

$1)\int 0dx = c,$

$2)\int dx = x + c,$

$$3)\int x^{\mu}dx = \frac{x^{\mu+1}}{\mu+1} + c, \quad (\mu \neq -1)$$

$$4)\quad \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c,$$

$$5)\int a^{x}dx = \frac{a^{x}}{\ln a} + c,$$

$6)\int e^{x}dx = e^{x} + c,$

$7)\int \sin x dx = -\cos x + c,$

$8)\int \cos x dx = \sin x + c,$

Продолжение таблицы интегралов

9) $$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + c,$$

0) $$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + c,$$

1) $$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \mathrm{arctg} \frac{x}{a} + c,$$

2) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + c,$$

3) $$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + c,$$

4) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + c.$$

Чтобы доказать истинность каждой из этих формул, достаточно убедиться в том, что производная правой части равна подынтегральной функции.

Докажем формулу 4.

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c.$$

Требуется доказать: $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$.

a) Пусть $x > 0$. Тогда: $(\ln|x|)' = (\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

b) Пусть $x < 0$. Тогда: $(\ln|x|)' = (\ln(-x))' = \dfrac{1}{-x}(-1) = \dfrac{1}{x}$

Основные свойства неопределенного интеграла

1) $$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$$

Доказательство

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+c\right)' = F'(x) = f(x).$$

Ч.т.д.

2) $d\int f(x)dx = f(x)dx$, (символы d и $\int$ взаимно уничтожаются).

Доказательство

$$d\int f(x)dx = [\int f(x)dx]'dx = f(x)dx.$$

Ч.т.д.

Основные свойства неопределенного интеграла (продолжение)

3) $\int df(x) = f(x) + c.$

Интеграл от дифференциала функции равен этой функции + c. Таким образом, символы $\int$ и d взаимно уничтожаются.

Доказательство

$$\int df(x) = \int f'(x)dx = f(x) + c.$$

Ч.т.д.

Основные свойства неопределенного интеграла (продолжение)

4) $\int af(x)dx = \int af(x)dx$, $(a \neq 0)$ - свойство однородности. Константу можно выносить за знак неопределенного интеграла.

Доказательство

Достаточно убедиться в том, что производная левой части равна производной правой части (в этом случае и в левой и в правой частях будет одно и тоже семейство первообразных).

$$[\int af(x)dx]' = af(x) \text{ (по первому свойству).}$$

$$[a\int f(x)dx]' = a\,[\int f(x)dx]' = af(x).$$

Ч.т.д.

Основные свойства неопределенного интеграла (продолжение)

5) Аддитивность относительно подынтегральной функции.

$$\int[f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Доказательство

Достаточно показать, что производная левой части равна производной правой части (в этом случае и в левой и в правой частях будет одно и тоже семейство первообразных).

$$\{\int[f(x) \pm g(x)]\}' = f(x) \pm g(x).$$

$$[\int f(x)dx \pm \int g(x)dx]' = [\int f(x)dx]' \pm [\int g(x)dx]' =$$

$$= f(x) \pm g(x).$$

Ч.т.д.

Замечание 1. Свойство аддитивности справедливо для любого конечного числа слагаемых.

Замечание 2. Вычисление интегралов называется интегрированием.

§ 2. Интегрирование с помощью замены переменных (метод подстановки).

Сущность метода заключается в следующем: $\int f(x)dx$ с помощью подстановки $x = \phi(t)$ приводят к другому, более простому для вычисления, то есть подбирают функцию $x = \phi(t)$ так, чтобы

$$\int f(\phi(t))d\phi(t) = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

был более простым для вычисления.

Теорема (о подстановке). Пусть $\int f(t)dt = F(t)+c$, при этом $t = \phi(x)$, тогда:

$$\int f(\phi(x))d\phi(x) = F(\phi(x)) + c,$$

или

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)dx = F(\phi(x)) + c,$$

функции f, ϕ, ϕ' считаем непрерывными.

Доказательство

Достаточно проверить, что:

$$[F(\phi(x))]' = f(\phi(x))\phi'(x)$$

Действительно,

$$F_x' = F_t' t_x' =^* f(t)\phi'(t) = f(\phi(x))\phi'(x).$$

* справедливо так как по условию $F(\phi)$ первообразная для $f(x)$. Ч.т.д.

<u>Пример 1.</u>

$$\int \sin^3 x \cos x dx =^{(*)}= \int \sin^3 x d\sin x = [\sin x = t] = \int t^3 dt =$$
$$= t^4/4 + c = (1/4)\sin^4 x + c.$$

<u>Замечание 3.</u> На шаге $^{(*)}$ мы осуществили так называемое внесение функции под знак дифференциала.

<u>Пример 2.</u>

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int \ln x d\ln x = [\ln x = t] = \int t dt =$$

$$= t^2/2 + c = (1/2)\ln^2 x + c.$$

Из теоремы о подстановке можно извлечь один очень важный вывод, а именно, можно написать, что:

$$\int f(t)dt\Big|_{t=\phi(x)} = \int f(\phi(x))\phi'(x)dx$$

Для удобства поменяем x и t местами:

$$\int f(x)dx\Big|_{x=\phi(t)} = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt$$

Будем предполагать, что существует обратная функция $x = \phi(t) \to t = \phi^{-1}(x)$.

Таким образом, получим следующее:

$$\int f(x)dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt\Big|_{t=\phi^{-1}(x)}$$

Отсюда получаем правило для вычисления интеграла методом подстановки: чтобы вычислить $\int f(x)dx$ с помощью подстановки $x = \phi(t)$ нужно под знаком интеграла вместо x везде подставить $\phi(t)$ (в подынтегральной функции, а также вместо dx мы подставляем $\phi'(t)dt$).

Вычисляем полученный интеграл, зависящий от t. Ответ получаем в терминах переменной t. Чтобы получить окончательный результат, нужно перейти к прежней переменной x исходя из самой подстановки.

<u>Замечание 4.</u> Внесение под знак дифференциала есть частный случай метода подстановки.

Метод подстановки – один из самых сильных методов интегрирования.

<u>Пример 3.</u>

$$\int(2x+3)^{10}dx = \left[\begin{array}{l} 2x+3=t \\ x=\dfrac{t-3}{2} \\ dx=\dfrac{1}{2}dt \end{array}\right] = (1/2)\int t^{10}dt =$$

$$= (1/2)t^{11}/11 + c = (1/22)\,(2x+3)^{11} + c.$$

Пример 4.

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \left[\begin{array}{l} t = \arcsin\dfrac{x}{a} \\ x = a\sin t \\ dx = a\cos t\,dt \\ \sqrt{a^2 - x^2} = a\cos t \end{array}\right] = \int a^2\cos^2 t\,dt =$$

$$= a^2\int \cos^2 t\,dt = a^2\int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{a^2}{2}\left(\int dt + \int \cos 2t\,dt\right) =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right) + c =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a} + \frac{1}{2}\sin\left(2\arcsin\frac{x}{a}\right)\right) + c.$$

В этом примере мы воспользовались тем, что:

При $a > 0$: $\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = a \cos t$

И внесением константы под знак дифференциала:

$$\int \cos 2t dt = \frac{1}{2} \int \cos(2t) d(2t) = \frac{1}{2} \sin 2t + c$$