# Эконометрика

## Семинар 2
## Решение задачи 4

**Задача 4**

Дана КЛММР $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$

$$\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \dots \\ Y_n \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \dots & \dots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}.$$

Рассматриваются два варианта оценки параметра $\beta_1$:

а) $\tilde{\beta}_1 = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{Y_i - \bar{Y}}{x_i - \bar{x}}$ $\qquad \bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$

б) $\tilde{\beta}_1 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - \overline{x^2}\right)Y_i}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - \overline{x^2}\right)x_i}$ $\qquad \overline{x^2} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2$

Проверить, является каждая из этих величин:

1) несмещенной оценкой $\beta_1$,

2) линейной относительно $Y_i$,

3) эффективной оценкой $\beta_1$ в смысле теоремы Гаусса-Маркова.

A1

Вычислим математические ожидания оценки $\tilde{\beta}_a$:

$$E(\tilde{\beta}_a) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{Y_i - \bar{Y}}{x_i - \bar{x}}\right) = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{E(Y_i) - E(\bar{Y})}{x_i - \bar{x}} =$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{E(x_i\cdot\beta + \varepsilon_i) - E(\bar{x}\cdot\beta + \bar{\varepsilon})}{x_i - \bar{x}} =$$

$$= \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i\beta - \bar{x}\cdot\beta}{x_i - \bar{x}} = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{\beta\cdot(x_i - \bar{x})}{x_i - \bar{x}} =$$

$$= \frac{1}{n}\cdot n\cdot\beta = \beta$$

**Оценка $\tilde{\beta}_a$ является несмещенной.**

# Б1

## Вычислим математические ожидания оценки $\widetilde{\beta_б}$:

$$E(\tilde{\beta}_б) = E\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - \overline{x_i^2})\cdot Y_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - \overline{x^2})\cdot x_i}\right) = \frac{\sum^{n}(x_i^2 - \overline{x^2})\cdot E(Y_i)}{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - \overline{x^2})x_i} =$$

$$= \frac{\sum^{n}(x_i^2 - \overline{x^2})\cdot(x_i\beta_1 + \beta_0^{=const})}{\sum^{n}(x_i^2 - \overline{x^2})x_i} = \frac{\beta_1 \cdot \sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - \overline{x^2})\cdot x_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - \overline{x^2})x_i} = \beta_1$$

**Оценка $\widetilde{\beta_б}$ является несмещенной.**

# A2

Представим $\widetilde{\beta}_{\text{а}}$в следующем виде:

$$\tilde{\beta} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{Y_i - \bar{Y}}{X_i - \bar{X}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{Y_i}{x_i} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\bar{Y}}{x_k} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}Y_i - \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}Y_i\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right)Y_i = \sum_{i=1}^{n}c_iY_i$$

**Т.к. переменные $x_i$ являются неслучайными, то оценка $\beta_{\text{а}}$ является линейной.**

# Б2

## Представим $\widetilde{\beta_б}$ в следующем виде:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}\left({x^2}_i-\overline{x^2}\right)Y_i}{\sum_{i=1}^{n}\left({x^2}_i-\overline{x^2}\right)x_i} = \left|\text{Пусть} \quad {x^2}_i-\overline{x^2}=a_i\,,\ \left({x^2}_i-\overline{x^2}\right)x_i=b_i\right| =$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i Y_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i} = \left|\text{Пусть } \sum_{i=1}^{n} b_i = B\right| = \sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{B}Y_i = \sum_{i=1}^{n} c_i Y_i$$

**Т.к. переменные $x_i$ являются неслучайными, то оценка $\beta_б$ является линейной.**

# А3

## Вычислим дисперсию оценки $\widetilde{\beta}_{\mathrm{a}}$:

$Y_i$ - некоррелированные СВ с дисперсиями $V(Y_i) = \sigma^2$

$$V(\tilde{\beta}) = \mathrm{V}\left(\sum_{i=1}^{n} c_t Y_t\right) = \sum_{i=1}^{n} {c_t}^2 V(Y_t) = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} {c_t}^2 = \sigma^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right)^2$$

- В пространстве комплекснозначных квадратично суммируемых последовательностей $l^2$ неравенство Коши — Буняковского имеет вид:

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k\right|^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right) \cdot \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^2\right),$$

# А3

Для проверки теоремы Гаусса-Маркова мы можем воспользоваться неравенством Коши-Буняковского

$$\frac{V(\tilde{\beta})}{V(\hat{\beta}_{OLS})} = \left(\sigma^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right)^2\right)\left(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2\right)$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2\right) \geq \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{x_i} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right)x_i\right)^2$$

$$= \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{x_i}{x_k}\right)\right)^2 = \frac{1}{n^2}\left(n - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{x_k}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\right)^2 = \frac{1}{n^2}n^2 = 1$$

$\boxed{\text{При } \sum_{i=1}^{n} x_i = 0}$ $\rightarrow$ $V(\tilde{\boldsymbol{\beta}}) \geq V(\hat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS})$

A3

# Эффективность оценки

- Эффективность оценки означает, что она обладает наименьшей дисперсией.
- МНК-оценка характеризуется наименьшей дисперсией в классе всех линейных несмещенных оценок.
- Мы сравнили полученную дисперсию оценки $\tilde{\beta}$ с дисперсией МНК-оценки и выявили, что последняя меньше.
- Значит, наша оценка не является эффективной при знаке «строго >», является эффективной при знаке «=».

# Б3

## Вычислим дисперсию оценки $\widetilde{\beta_б}$:

$Y_i$ - некоррелированные СВ с дисперсиями $V(Y_i) = \sigma^2$

$$V(\tilde{\beta}_б) = V\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - \overline{x^2})\cdot Y_i}{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - \overline{x^2})\cdot x_i}\right) = \frac{\sum^{n}(x_i^2 - \overline{x^2})V(Y_i)}{\left(\sum^{n}(x_i^2 - \overline{x^2})\,x_i\right)^2} =$$

$$= \sigma^2 \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - \overline{x^2})^2}{\left(\sum(x_i^2 - \overline{x^2})x_i\right)^2}$$

- В пространстве комплекснозначных квадратично суммируемых последовательностей $l^2$ неравенство Коши — Буняковского имеет вид:

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k\right|^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^2\right),$$

# Б3

Для проверки теоремы Гаусса-Маркова мы можем воспользоваться неравенством Коши-Буняковского

Док-ть: $V(\tilde{\beta}_б) \geq V(\hat{\beta}_{OLS})$

$$\boxed{\text{Пусть} \quad a_i = X_i^2 - \overline{X^2}, \quad X_i = \bar{X} + x_i}$$

$$\sigma^2 \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i^2 - \overline{X^2})^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} (X_i^2 - \overline{X^2}) X_i\right)^2} \quad vs \quad \sigma^2 \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})}$$

$$\sigma^2 \frac{\sum a_i^2}{\left(\sum a_i (\bar{X} + x_i)\right)^2} \geq \sigma^2 \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2} \quad | : \sigma^2$$

$$\boxed{\text{т.к.} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i = 0}$$

$$\frac{\sum a_i^2}{\left(\sum a_i x_i\right)^2} \geq \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

$$\boxed{\text{т.е.} \quad \left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i^2}$$

$$V(\tilde{\beta}) \geq V(\hat{\beta}_{OLS})$$

Б3

# Эффективность оценки

- Эффективность оценки означает, что она обладает наименьшей дисперсией.
- МНК-оценка характеризуется наименьшей дисперсией в классе всех линейных несмещенных оценок.
- Мы сравнили полученную дисперсию оценки $\tilde{\beta}$ с дисперсией МНК-оценки и выявили, что последняя меньше.
- Значит, наша оценка не является эффективной при знаке «строго >», является эффективной при знаке «=».