

Подпространства векторного пространства

Вопрос 1

Верно

Баллов: 1,0 из 1,0

Редактировать
вопрос

Укажите, какие из приведенных ниже подмножеств L являются подпространством векторного пространства V

Выберите один или несколько ответов:

V - векторное пространство троек чисел $x = (x_1, x_2, x_3)$ над полем вещественных чисел (\mathbb{R}^3) .
 L - множество троек чисел вида $(x_1, x_2, 1), x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

V - векторное пространство троек чисел $x = (x_1, x_2, x_3)$ над полем вещественных чисел (\mathbb{R}^3) .
 L - множество троек чисел вида $a_1 * x_1 + a_2 * x_2 + a_3 * x_3 = 1, x_1, x_2, x_3, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$.

V - векторное пространство троек чисел $x = (x_1, x_2, x_3)$ над полем вещественных чисел (\mathbb{R}^3) .
 L - множество троек чисел вида $(x_1, 0, x_2), x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.



Верно. Это множество замкнуто относительно операций $+$ и умножения на число

V - векторное пространство многочленов степени не выше 2-й $(P_2(x))$ над полем вещественных чисел.
 L - множество многочленов вида $a * (x - 1) + b * (x^2 + 1), a, b \in \mathbb{R}$.



Верно. Это множество замкнуто относительно операций $+$ и умножения на число

V - векторное пространство многочленов степени не выше 2-й $(P_2(x))$ над полем вещественных чисел.
 L - множество многочленов вида $a * x + b * x^2, a, b \in \mathbb{R}$.



Верно. Это множество замкнуто относительно операций $+$ и умножения на число

1. Умножим тройку на число α : $(\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, \alpha \cdot 1) = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, \alpha) \notin L$

Не является подпространством векторного пространства.

2. Проверим свойство умножения на число. Возьмем тройку: $(\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, \alpha \cdot x_3)$

Проверим выполнение условия, определяющего подпространство

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 = 1$$

$$a_1 \cdot (\alpha \cdot x_1) + a_2 \cdot (\alpha \cdot x_2) + a_3 \cdot (\alpha \cdot x_3) = \alpha (a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3) = \alpha \neq 1$$

Не является подпространством векторного пространства.

3. Проверим свойства умножения на число и суммы двух векторов:

$$(\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot 0, \alpha \cdot x_3) = (y_1, 0, y_3) \in L$$

$$(x_1, 0, x_3) + (y_1, 0, y_3) = (x_1 + y_1, 0, x_3 + y_3) = (z_1, 0, z_3) \in L$$

Является подпространством векторного пространства.

4. Проверим свойства умножения на число и суммы двух векторов:

$$a \cdot (x-1) + b \cdot (x^2 + 1)$$

$$\alpha \cdot (a \cdot (x-1) + b \cdot (x^2 + 1)) = (\alpha \cdot a) \cdot (x-1) + (\alpha \cdot b) \cdot (x^2 + 1) = c \cdot (x-1) + d \cdot (x^2 + 1) \in L$$

$$a_1 \cdot (x-1) + b_1 \cdot (x^2 + 1) + a_2 \cdot (x-1) + b_2 \cdot (x^2 + 1) = (a_1 + a_2) \cdot (x-1) + (b_1 + b_2) \cdot (x^2 + 1) = \\ = a_3 \cdot (x-1) + b_3 \cdot (x^2 + 1) \in L$$

Является подпространством векторного пространства.

5. Проверим свойства умножения на число и суммы двух векторов:

$$a \cdot x + b \cdot x^2$$

$$\alpha \cdot (a \cdot x + b \cdot x^2) = (\alpha \cdot a) \cdot x + (\alpha \cdot b) \cdot x^2 = c \cdot x + d \cdot x^2 \in L$$

$$a_1 \cdot x + b_1 \cdot x^2 + a_2 \cdot x + b_2 \cdot x^2 = (a_1 + a_2) \cdot x + (b_1 + b_2) \cdot x^2 = a_3 \cdot x + b_3 \cdot x^2 \in L$$

Является подпространством векторного пространства.

Тест 2-4. Задача № 2

V - векторное пространство троек чисел $r = (x, y, z)$ над полем вещественных чисел (\mathbb{R}^3) .

$L1$ - множество троек чисел $r = (x, y, z)$, удовлетворяющих условию $x + y = 0$, $x, y, z \in \mathbb{R}$.

$L2$ - множество троек чисел $r = (x, y, z)$, удовлетворяющих условию $x + 7z = 0$, $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Определите размерность их пересечения $L3$.

1) Если размерность пересечения равна 1, то найдите единичный базисный вектор $e1$ этого подпространства: $L3 = \langle e1 \rangle$.

2) Если размерность пересечения равна 2, то найдите единичный базисный вектор $e1$ ортогонального дополнения подпространства $L3$.

В ответе укажите значение скалярного произведения $e1$ и вектора $(3; 2; 1)$ с точностью 0.01 или 0, если размерность пересечения равна 0.

Ответ:

См. лекцию 2.4.5 Пересечение и сумма подпространств.

Часть 1

Тест 2-4. Задача № 3

V - векторное пространство троек чисел $r = (x, y, z)$ над полем вещественных чисел (R^3) .

$L1$ - множество троек чисел $r = (x, y, z)$, удовлетворяющих условию $x + y + z = 0$, $x, y, z \in R$.

$L2$ - множество троек чисел $r = (x, y, z)$, удовлетворяющих условию $r = k \cdot (1; -1; 7)$, $x, y, z, k \in R$.

Определите размерность их суммы $L3 = L1 + L2$.

1) Если размерность суммы равна 1, то найдите единичный базисный вектор $e1$ этого подпространства: $L3 = \langle e1 \rangle$.

2) Если размерность суммы равна 2, то найдите единичный базисный вектор $e1$ ортогонального дополнения подпространства $L3$.

В ответе укажите значение скалярного произведения $e1$ и вектора $(3; 2; 1)$ с точностью 0.01 или 3, если размерность суммы равна 3.

Ответ:

См. лекцию 2.4.6 Пересечение и сумма подпространств.

Часть 2

Тест 2-4. Задача № 4 -1

Вопрос 4

Неверно

Баллов: 0,0 из 1,0



Редактировать
вопрос

Даны координаты вектора $a=(3; 6)$ (в ортонормированном базисе). Найти матрицу проецирования *произвольного* вектора b на вектор a .

В ответе укажите сумму элементов полученной матрицы с точностью до 0.1. Целую часть от дробной отделяйте точкой

Ответ: ❌

Правильный ответ: 1,8

Проекция вектора на вектор в матричном виде выглядит как $\overline{np_a b} = M \cdot \bar{b}$
(Лекция 2.4.3 Проецирование вектора на подпространство. Часть 1)

$$\text{Где } M = \frac{a \cdot a^T}{a^T \cdot a}$$

Найдем M в нашем случае:

$$M = \frac{a \cdot a^T}{a^T \cdot a} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 9 & 18 \\ 18 & 36 \end{pmatrix}}{9 + 36} = \frac{1}{45} \begin{pmatrix} 9 & 18 \\ 18 & 36 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1 + 2 + 2 + 4}{5} = \frac{9}{5} = 1.8$$

$$\text{Тогда } \overline{np_a b} = M \cdot \bar{b} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} x + 2y \\ 2x + 4y \end{pmatrix}$$

Тест 2-4. Задача № 4 -2

Даны координаты вектора $a=(1; 6)$ (в ортонормированном базисе). Найти матрицу проецирования *произвольного* вектора b на вектор a .

В ответе укажите сумму элементов полученной матрицы с точностью до 0.1. Целую часть от дробной отделяйте точкой

Ответ:

Проекция вектора на вектор в матричном виде выглядит как $\overline{p_a b} = M \cdot \bar{b}$
(Лекция 2.4.3 Проецирование вектора на подпространство. Часть 1)

$$\text{Где } M = \frac{a \cdot a^T}{a^T \cdot a}$$

Найдем M в нашем случае:

$$M = \frac{a \cdot a^T}{a^T \cdot a} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot (1 \ 6)}{(1 \ 6) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 36 \end{pmatrix}}{1 + 36} = \frac{1}{37} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 36 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1 + 6 + 6 + 36}{37} = 1.32$$

$$\text{Тогда } \overline{p_a b} = M \cdot \bar{b} = \frac{1}{37} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 36 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{37} \begin{pmatrix} x + 6y \\ 6x + 36y \end{pmatrix}$$

Тест 2-4. Задача

Даны три вектора $a=(-0,1; -2; 5)$, $b=(0,0; -3; 2)$ и $c=(1; -9; -5)$.

Требуется найти векторную проекцию вектора c на линейную оболочку векторов (a,b) .

В ответе укажите 3-ю координату получившегося вектора.

Ответ укажите с точностью до 0,1. Целую часть от дробной отделяйте точкой

Ответ:

Нам известно, что: $\overline{np_L c} = M \cdot \bar{c}$, $M = X \cdot (X^T \cdot X)^{-1} \cdot X^T$

(Лекция 2.4.4 Проецирование вектора на подпространство. Часть 2)

Найдем матрицу проецирования M :

$$X = \begin{pmatrix} -0,1 & 0 \\ -2 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X^T \cdot X = \begin{pmatrix} -0,1 & 0 \\ -2 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} -0,1 & 0 \\ -2 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,1 & -2 & 5 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0,1 & 0 \\ -2 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,01+4+25 & 6+10 \\ 6+10 & 9+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29,01 & 16 \\ 16 & 13 \end{pmatrix}$$

$$(X^T \cdot X)^{-1} = \begin{pmatrix} 29,01 & 16 \\ 16 & 13 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{121,13} \begin{pmatrix} 13 & -16 \\ -16 & 29,01 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,11 & -0,13 \\ -0,13 & 0,24 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} -0,1 & 0 \\ -2 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,11 & -0,13 \\ -0,13 & 0,24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0,1 & -2 & 5 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -0,1 \cdot 0,11 & -0,1 \cdot (-0,13) \\ -0,22 + 0,39 & 0,26 - 0,72 \\ 0,55 - 0,26 & -0,65 + 0,48 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0,1 & -2 & 5 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -0,011 & 0,013 \\ 0,17 & -0,46 \\ 0,29 & -0,17 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0,1 & -2 & 5 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-0,011) \cdot (-0,1) & 0,022 - 0,039 & -0,055 + 0,026 \\ -0,017 & -0,34 + 1,38 & 0,85 - 0,92 \\ -0,029 & -0,58 + 0,51 & 1,45 - 0,34 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,0011 & -0,017 & -0,029 \\ -0,017 & 1,04 & -0,07 \\ -0,029 & -0,07 & 1,11 \end{pmatrix}$$

$$\overline{np_L c} = M \cdot \bar{c} = \begin{pmatrix} 0,0011 & -0,017 & -0,029 \\ -0,017 & 1,04 & -0,07 \\ -0,029 & -0,07 & 1,11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -9 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0011 \cdot 1 + (-0,017) \cdot (-9) + (-0,029) \cdot (-5) \\ -0,017 \cdot 1 + 1,04 \cdot (-9) + (-0,07) \cdot (-5) \\ -0,029 \cdot 1 + (-0,07) \cdot (-9) + 1,11 \cdot (-5) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0,0011 + 0,153 + 0,145 \\ -0,017 - 9,36 + 0,35 \\ -0,029 + 0,63 - 5,55 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2991 \\ -9,027 \\ -4,949 \end{pmatrix}$$

Тест 2-4. Задача 6.

Пусть необходимо построить многочлен вида

$y(x) = a_0 + a_1 x^2$, используя МНК по таблице исходных данных:

x	1	0	2
y	-2	3	-6

Тогда нормальная система уравнений, из которой находят коэффициенты a_0 и a_1 , выглядит следующим образом (укажите):

Выберите один ответ:

a. $X^T a = Y$,

где $X =$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$Y = (-2 \ 3 \ -6)^T$

b. $[X^T X]^{-1} X^T a = X^T Y$,

где $X =$

$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

$Y = (-2 \ 3 \ -6)^T$

c. $[X^T X]^{-1} X^T a = X^T Y$,

где $X =$

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$Y = (-2 \ 3 \ -6)^T$

d. $[X^T X]^{-1} X^T a = X^T Y$,

где $X =$

$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$Y = (-2 \ 3 \ -6)^T$

e. $a = [X^T X]^{-1} X^T Y$,

где $X =$

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$Y = (-2 \ 3 \ -6)^T$

Тест 2-4. Задача 7.

Построить многочлен вида

$$y(x) = a + b \cdot x^2,$$

используя МНК по таблице исходных данных:

X	-1	0	2
Y	-2	2,0	-6

и вычислить $y(5)$.

Ответ запишите с точностью до 0.5. Для разделения целой и дробной части десятичной дроби используйте точку.

Способ № 1

Будем минимизировать функцию: $F(a,b) = \sum_{i=1}^n (y - (a + b \cdot x^2))^2 = \sum_{i=1}^n (y - a - b \cdot x^2)^2$

Составляем систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} \frac{\partial F(a,b)}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial F(a,b)}{\partial b} = 0 \end{cases} \begin{cases} \frac{\partial F(a,b)}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial F(a,b)}{\partial b} = 0 \end{cases} \begin{cases} -2 \sum_{i=1}^n (y - a - b \cdot x^2) = 0 \\ 2 \cdot \sum_{i=1}^n (-x^2)(y - a - b \cdot x^2) = 0 \end{cases} \begin{cases} -2 \sum_{i=1}^n (y - a - b \cdot x^2) = 0 \\ -2 \cdot \sum_{i=1}^n (x^2 \cdot y - a \cdot x^2 - b \cdot x^4) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (y - a - b \cdot x^2) = 0 \\ \sum_{i=1}^n (x^2 \cdot y - a \cdot x^2 - b \cdot x^4) = 0 \end{cases} \begin{cases} \sum_{i=1}^n y - \sum_{i=1}^n a - b \sum_{i=1}^n x^2 = 0 \\ \sum_{i=1}^n x^2 y - a \sum_{i=1}^n x^2 - b \sum_{i=1}^n x^4 = 0 \end{cases} \begin{cases} na + b \sum_{i=1}^n x^2 = \sum_{i=1}^n y \\ a \sum_{i=1}^n x^2 + b \sum_{i=1}^n x^4 = \sum_{i=1}^n x^2 y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F(a,b)}{\partial a} = 0 \\ \frac{\partial F(a,b)}{\partial b} = 0 \end{cases} \begin{cases} -2 \sum_i^n (y - a - b \cdot x^2) = 0 \\ 2 \cdot \sum_i^n (-x^2)(y - a - b \cdot x^2) = 0 \end{cases} \begin{cases} -2 \sum_i^n (y - a - b \cdot x^2) = 0 \\ -2 \cdot \sum_i^n (x^2 \cdot y - a \cdot x^2 - b \cdot x^4) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_i^n (y - a - b \cdot x^2) = 0 \\ \sum_i^n (x^2 \cdot y - a \cdot x^2 - b \cdot x^4) = 0 \end{cases} \begin{cases} \sum_i^n y - \sum_i^n a - b \sum_i^n x^2 = 0 \\ \sum_i^n x^2 y - a \sum_i^n x^2 - b \sum_i^n x^4 = 0 \end{cases} \begin{cases} na + b \sum_i^n x^2 = \sum_i^n y \\ a \sum_i^n x^2 + b \sum_i^n x^4 = \sum_i^n x^2 y \end{cases}$$

X	-1	0	2
Y	-2	2,0	-6

$$\sum_i^n y = -6, \quad \sum_i^n x^2 = 5, \quad \sum_i^n x^4 = 17, \quad \sum_i^n x^2 y = -26$$

$$\begin{cases} 3a + 5b = -6 \\ 5a + 17b = -26 \end{cases} \begin{cases} 3 \left(\frac{-26 - 17b}{5} \right) + 5b = -6 \\ a = \frac{-26 - 17b}{5} \end{cases} \begin{cases} \frac{-78 - 51b}{5} + \frac{25}{5}b = -6 \Rightarrow b = -\frac{48}{26} \approx -1,85 \\ a = \frac{-26 - 17b}{5} = \frac{-26 - 17 \cdot \left(-\frac{48}{26} \right)}{5} \approx 1,08 \end{cases}$$

$$y(x) = 1,08 - 1,85x^2$$

$$y(5) = 1,08 - 1,85 \cdot 25 = -45,17$$

Способ № 2. Лекция 2.4.8 Примеры проецирования. МНК

$\frac{x}{y}$				Φ_0 Φ_1		
-1	-2	$y = a_1 + a_2 \cdot x^2$	Составим матрицу значений базисных функций (см. лекцию 2.4.8 Примеры проецирования. МНК):	1	1	$x = -1$
0	2	$\Phi_0 = 1$		1	0	$x = 0$
2	-6	$\Phi_1 = x^2$		1	4	$x = 2$

Составим нормальную систему уравнений (см. лекцию 2.4.4., 2.4.6):

$$F^T \cdot F \cdot a = F^T \cdot Y$$

$$F^T \cdot F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 17 \end{pmatrix}$$

$$F^T \cdot Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -26 \end{pmatrix}$$

Нормальная система уравнений :

$$F^T \cdot F \cdot a = F^T \cdot Y$$

$$(F^T \cdot F)^{-1} \cdot (F^T \cdot F) \cdot a = (F^T \cdot F)^{-1} \cdot F^T \cdot Y$$

$$\boxed{a = (F^T \cdot F)^{-1} \cdot F^T \cdot Y}$$

$$(F^T \cdot F)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 17 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 17 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} a &= (F^T \cdot F)^{-1} \cdot F^T \cdot Y = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 17 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -26 \end{pmatrix} = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 17 \cdot (-6) - 5 \cdot (-26) \\ (-5) \cdot (-6) + 3 \cdot (-26) \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 17 \cdot (-6) - 5 \cdot (-26) \\ (-5) \cdot (-6) + 3 \cdot (-26) \end{pmatrix} = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 28 \\ -48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,08 \\ -1,85 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$y(x) = 1,08 - 1,85x^2$$

$$y(5) = 1,08 - 1,85 \cdot 25 = -45,17$$

Тест 2-4. Задача

Методом проецирования (наименьших квадратов) можно искать приближенное решение избыточной системы линейных алгебраических уравнений $A * x = b$.

Для этого надо решить задачу проецирования вектора b на линейную оболочку векторов-столбцов матрицы A .

Для этого решается задача минимизации отклонения $|Ax - b| \rightarrow \min$, составляется и решается нормальная система уравнений вида $A^T * Ax = A^T b$.

Воспользуйтесь данным методом и найдите приближенное решение системы

$$x+y=3$$

$$x-y=1$$

$$2x+y=2.$$

В поле ответа укажите значение переменной y с точностью до 0.01. Дробную часть от целой отделяйте точкой.

Ответ:

Система в матричной форме записывается как:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Составим нормальную систему уравнений:

$$A^T \cdot A \cdot x = A^T \cdot b$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1+1+4 & 1-1+2 \\ 1-1+2 & 1+1+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1+4 \\ 3-1+2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1,14 \\ 0,57 \end{pmatrix}$$

Тест 2-4. Задача

Даны координаты векторов $\vec{a} = (-2,7; -2; 5)$, $\vec{b} = (2,2; -3; 2)$ (в ортонормированном базисе). Найти координаты единичного вектора, перпендикулярного векторам \vec{a} , \vec{b} . (Подсказка: воспользоваться векторным произведением). В ответе укажите модуль 2-й координаты полученного вектора.

Ответ укажите с точностью до 0,05. Целую часть от дробной отделяйте точкой

Ответ:

В результате умножения двух векторов, получается вектор, перпендикулярный перемножаемым векторам. Воспользуемся этим свойством. Найдем векторное произведение векторов и вычислим для него орт-вектор.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2,7 & -2 & 5 \\ 2,2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} -2,7 & 5 \\ 2,2 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} -2,7 & -2 \\ 2,2 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 11 \cdot \vec{i} - 16,4 \cdot \vec{j} + 12,5 \cdot \vec{k}.$$

Найдем координаты орт вектора:

$$\begin{aligned} \vec{c}_0 &= \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{11 \cdot \vec{i} - 16,4 \cdot \vec{j} + 12,5 \cdot \vec{k}}{\sqrt{11^2 + (-16,4)^2 + 12,5^2}} = \frac{11 \cdot \vec{i} - 16,4 \cdot \vec{j} + 12,5 \cdot \vec{k}}{\sqrt{121 + 268,96 + 156,25}} = \frac{11 \cdot \vec{i} - 16,4 \cdot \vec{j} + 12,5 \cdot \vec{k}}{\sqrt{546,21}} = \\ &= \frac{11 \cdot \vec{i} - 16,4 \cdot \vec{j} + 12,5 \cdot \vec{k}}{23,37} \approx 0,47 \cdot \vec{i} - 0,70 \cdot \vec{j} + 0,53 \cdot \vec{k}. \end{aligned}$$

Тест 2-4. Задача

10.

Даны координаты векторов $a=(-0,6; -2; 5)$, $b=(-3,8; -3; 2)$ (в ортонормированном базисе). Найти площадь треугольника, образованного векторами a , b . (Подсказка: воспользоваться векторным произведением).

Ответ укажите с точностью до 0.1. Целую часть от дробной отделяйте точкой

Ответ:

Из свойств векторного произведения известно, что площадь треугольника равна

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\bar{a} \times \bar{b}|$$

Найдем векторное произведение векторов в координатной форме:

$$\begin{aligned} \bar{a} \times \bar{b} &= \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -0,6 & -2 & 5 \\ -3,8 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - \bar{j} \cdot \begin{vmatrix} -0,6 & 5 \\ -3,8 & 2 \end{vmatrix} + \bar{k} \cdot \begin{vmatrix} -0,6 & -2 \\ -3,8 & -3 \end{vmatrix} = \\ &= 11 \cdot \bar{i} - 17,8 \cdot \bar{j} - 5,8 \cdot \bar{k}. \end{aligned}$$

Тогда площадь треугольника будет равна:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\bar{a} \times \bar{b}| = \frac{1}{2} \sqrt{11^2 + (-17,8)^2 + (-5,8)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{121 + 316,84 + 33,64} \approx 10,86$$