# Подпространства векторного пространства

Вопрос **1**

Верно

Баллов: 1,0 из 1,0

Редактировать вопрос

Укажите, какие из приведенных ниже подмножеств ***L*** являются подпространством векторного пространства **V**

Выберите один или несколько ответов:

- [ ] **V** - векторное пространство троек чисел $x = (x_1, x_2, x_3)$ над полем вещественных чисел ($R^3$).
**L** - множество троек чисел вида $(x_1, x_2, 1), x_1, x_2 \in R$.

- [ ] **V** - векторное пространство троек чисел $x = (x_1, x_2, x_3)$ над полем вещественных чисел ($R^3$).
**L** - множество троек чисел вида $a_1 * x_1 + a_2 * x_2 + a_3 * x_3 = 1, x_1, x_2, x_3, a_1, a_2, a_3 \in R$.

- [x] **V** - векторное пространство троек чисел $x = (x_1, x_2, x_3)$ над полем вещественных чисел ($R^3$).
**L** - множество троек чисел вида $(x_1, 0, x_2), x_1, x_2 \in R$.

✓ Верно. Это множество замкнуто относительно операций + и умножения на число

- [x] **V** - векторное пространство многочленов степени не выше 2-й (**$P_2$(x)**) над полем вещественных чисел.
**L** - множество многочленов вида $a * (x - 1) + b * (x^2 + 1), a, b \in R$.

✓ Верно. Это множество замкнуто относительно операций + и умножения на число

- [x] **V** - векторное пространство многочленов степени не выше 2-й (**$P_2$(x)**) над полем вещественных чисел.
**L** - множество многочленов вида $a * x + b * x^2, a, b \in R$ (x*P1(x)).

✓ Верно. Это множество замкнуто относительно операций + и умножения на число

1. Умножим тройку на число α: $(\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, \alpha \cdot 1) = (\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, \alpha) \notin L$
Не является подпространством векторного пространства.

2. Проверим свойство умножения на число. Возьмем тройку: $(\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, \alpha \cdot x_3)$
Проверим выполнение условия, определяющего подпространство

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 = 1$$

$$a_1 \cdot (\alpha \cdot x_1) + a_2 \cdot (\alpha \cdot x_2) + a_3 \cdot (\alpha \cdot x_3) = \alpha (a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3) = \alpha \neq 1$$

Не является подпространством векторного пространства.

3. Проверим свойства умножения на число и суммы двух векторов:

$$(\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot 0, \alpha \cdot x_3) = (y_1, 0, y_3) \in L$$

$$(x_1, 0, x_3) + (y_1, 0, y_3) = (x_1 + y_1, 0, x_3 + y_3) = (z_1, 0, z_3) \in L$$

Является подпространством векторного пространства.

4. Проверим свойства умножения на число и суммы двух векторов:

$$a\cdot(x-1)+b\cdot\left(x^2+1\right)$$

$$\alpha\cdot\left(a\cdot(x-1)+b\cdot\left(x^2+1\right)\right)=(\alpha\cdot a)\cdot(x-1)+(\alpha\cdot b)\cdot\left(x^2+1\right)=c\cdot(x-1)+d\cdot\left(x^2+1\right)\in L$$

$$a_1\cdot(x-1)+b_1\cdot\left(x^2+1\right)+a_2\cdot(x-1)+b_2\cdot\left(x^2+1\right)=(a_1+a_2)\cdot(x-1)+(b_1+b_2)\cdot\left(x^2+1\right)=$$

$$=a_3\cdot(x-1)+b_3\cdot\left(x^2+1\right)\in L$$

Является подпространством векторного пространства.

5. Проверим свойства умножения на число и суммы двух векторов:

$$a\cdot x+b\cdot x^2$$

$$\alpha\cdot\left(a\cdot x+b\cdot x^2\right)=(\alpha\cdot a)\cdot x+(\alpha\cdot b)\cdot x^2=c\cdot x+d\cdot x^2\in L$$

$$a_1\cdot x+b_1\cdot x^2+a_2\cdot x+b_2\cdot x^2=(a_1+a_2)\cdot x+(b_1+b_2)\cdot x^2=a_3\cdot x+b_3\cdot x^2\in L$$

Является подпространством векторного пространства.

# Тест 2-4. Задача № 2

**V** - векторное пространство троек чисел $r = (x, y, z)$ над полем вещественных чисел ($R^3$).

**L1** - множество троек чисел $r = (x, y, z)$, удовлетворяющих условию **x + y =0**, $x, y, z \in R$.

**L2** - множество троек чисел $r = (x, y, z)$, удовлетворяющих условию **x+7*z=0**, $x, y, z \in R$.

Определите размерность их пересечения L3.

1) Если размерность пересечения равна 1, то найдите единичный базисный вектор **e1** этого подпространства: **L3=<e1>**.

2) Если размерность пересечения равна 2, то найдите единичный базисный вектор **e1** ортогонального дополнения подпространства **L3.**

В ответе укажите значение скалярного произведения **e1** и вектора *(3;2;1)* с точностью **0.01** или 0, если размерность пересечения равна 0.

Ответ:

См. лекцию 2.4.5 Пересечение и сумма подпространств.
Часть 1

# Тест 2-4. Задача № 3

**V** - векторное пространство троек чисел $r = (x, y, z)$ над полем вещественных чисел ($R^3$).

**L1** - множество троек чисел $r = (x, y, z)$, удовлетворяющих условию **x + y + z =0**, $x, y, z \in R$.

**L2** - множество троек чисел $r = (x, y, z)$, удовлетворяющих условию **r =** k***(1;-1; 7)**, $x, y, z, k \in R$.

Определите размерность их суммы **L3=L1+L2.**

1) Если размерность суммы равна 1, то найдите единичный базисный вектор **e1** этого подпространства: **L3=<e1>**.

2) Если размерность суммы равна 2, то найдите единичный базисный вектор **e1** ортогонального дополнения подпространства **L3.**

В ответе укажите значение скалярного произведения **e1** и вектора ***(3;2;1)*** с точностью **0.01** или **3**, если размерность суммы равна 3.

Ответ:

См. лекцию 2.4.6 Пересечение и сумма подпространств. Часть 2

# Тест 2-4. Задача № 4 -1

Вопрос **4**

Неверно

Баллов: 0,0 из 1,0

Редактировать вопрос

Даны координаты вектора ***a*=( 3; 6)** (в ортонормированном базисе). Найти матрицу проецирования ***произвольного*** вектора ***b*** на вектор ***a*** .

В ответе укажите сумму **элементов** полученной матрицы с точностью до **0.1**. Целую часть от дробной отделяйте точкой

Ответ: 1.5

Правильный ответ: 1,8

Проекция вектора на вектор в матричном виде выглядит как: $\overline{np_{\bar{a}}\bar{b}} = M \cdot \bar{b}$

**( Лекция 2.4.3 Проецирование вектора на подпространство. Часть 1)**

Где $M = \dfrac{a \cdot a^T}{a^T \cdot a}$

Найдем M в нашем случае:

$$M = \frac{a \cdot a^T}{a^T \cdot a} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 9 & 18 \\ 18 & 36 \end{pmatrix}}{9+36} = \frac{1}{45}\begin{pmatrix} 9 & 18 \\ 18 & 36 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1+2+2+4}{5} = \frac{9}{5} = 1.8$$

Тогда $\overline{np_{\bar{a}}\bar{b}} = M \cdot \bar{b} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} x+2y \\ 2x+4y \end{pmatrix}$

# Тест 2-4. Задача № 4 -2

Даны координаты вектора ***a=( 1; 6)*** (в ортонормированном базисе). Найти матрицу проецирования ***произвольного*** вектора ***b*** на вектор ***a*** .

В ответе укажите сумму **элементов** полученной матрицы с точностью до **0.1.** Целую часть от дробной отделяйте точкой

Ответ:

Проекция вектора на вектор в матричном виде выглядит как: $\overline{np_{\bar{a}}\bar{b}} = M \cdot \bar{b}$

**( Лекция 2.4.3 Проецирование вектора на подпространство. Часть 1)**

Где $M = \dfrac{a \cdot a^T}{a^T \cdot a}$

Найдем М в нашем случае:

$$M = \frac{a \cdot a^T}{a^T \cdot a} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 6 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 36 \end{pmatrix}}{1+36} = \frac{1}{37}\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 36 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1+6+6+36}{37} = 1.32$$

Тогда

$$\overline{np_{\bar{a}}\bar{b}} = M \cdot \bar{b} = \frac{1}{37}\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 36 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{37}\begin{pmatrix} x+6y \\ 6x+36y \end{pmatrix}$$

# Тест 2-4. Задача

Даны три вектора ***a*=( -0,1; -2; 5)**, ***b*=( 0,0; -3; 2)** и ***c*=( 1; -9; -5)**.

Требуется найти векторную проекцию вектора ***c*** на линейную оболочку векторов ***(a,b)***.

***В ответе укажите 3-ю координату получившегося вектора.***

Ответ укажите с точностью до 0,1. Целую часть от дробной отделяйте точкой

Ответ:

Нам известно, что: $\overline{np_L \bar{c}} = M \cdot \bar{c}, \quad M = X \cdot \left(X^T \cdot X\right)^{-1} \cdot X^T$

**( Лекция 2.4.4 Проецирование вектора на подпространство. Часть 2)**

Найдем матрицу проецирования M:

$$X = \begin{pmatrix} -0,1 & 0 \\ -2 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X^T \cdot X = \begin{pmatrix} -0,1 & 0 \\ -2 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} -0,1 & 0 \\ -2 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,1 & -2 & 5 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0,1 & 0 \\ -2 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,01+4+25 & 6+10 \\ 6+10 & 9+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29,01 & 16 \\ 16 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\left(X^T \cdot X\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 29,01 & 16 \\ 16 & 13 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{121,13} \begin{pmatrix} 13 & -16 \\ -16 & 29,01 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,11 & -0,13 \\ -0,13 & 0,24 \end{pmatrix}$$

$$M=\begin{pmatrix}-0{,}1 & 0\\ -2 & -3\\ 5 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0{,}11 & -0{,}13\\ -0{,}13 & 0{,}24\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-0{,}1 & -2 & 5\\ 0 & -3 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-0{,}1\cdot 0{,}11 & -0{,}1\cdot(-0{,}13)\\ -0{,}22+0{,}39 & 0{,}26-0{,}72\\ 0{,}55-0{,}26 & -0{,}65+0{,}48\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-0{,}1 & -2 & 5\\ 0 & -3 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-0{,}011 & 0{,}013\\ 0{,}17 & -0{,}46\\ 0{,}29 & -0{,}17\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-0{,}1 & -2 & 5\\ 0 & -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-0{,}011)\cdot(-0{,}1) & 0{,}022-0{,}039 & -0{,}055+0{,}026\\ -0{,}017 & -0{,}34+1{,}38 & 0{,}85-0{,}92\\ -0{,}029 & -0{,}58+0{,}51 & 1{,}45-0{,}34\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0{,}0011 & -0{,}017 & -0{,}029\\ -0{,}017 & 1{,}04 & -0{,}07\\ -0{,}029 & -0{,}07 & 1{,}11\end{pmatrix}$$

$$\overline{np_L\bar{c}}=M\cdot\bar{c}=\begin{pmatrix}0{,}0011 & -0{,}017 & -0{,}029\\ -0{,}017 & 1{,}04 & -0{,}07\\ -0{,}029 & -0{,}07 & 1{,}11\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ -9\\ -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}0011\cdot 1+(-0{,}017)\cdot(-9)+(-0{,}029)\cdot(-5)\\ -0{,}017\cdot 1+1{,}04\cdot(-9)+(-0{,}07)\cdot(-5)\\ -0{,}029\cdot 1+(-0{,}07)\cdot(-9)+1{,}11\cdot(-5)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0{,}0011+0{,}153+0{,}145\\ -0{,}017-9{,}36+0{,}35\\ -0{,}029+0{,}63-5{,}55\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}2991\\ -9{,}027\\ -4{,}949\end{pmatrix}$$

# Тест 2-4. Задача 6.

Пусть необходимо построить многочлен вида

$y(x) = a_0 + a_1 * x^2$, используя МНК по таблице исходных данных:

| | | | |
|---|---|---|---|
| X | -1 | 0 | 2 |
| Y | -2 | 3 | -6 |

Тогда нормальная система уравнений, из которой находятся коэффициенты $a_0$ и $a_1$ выглядит следующим образом (укажите):

Выберите один ответ:

a. $X*a=Y$,

где X=

1 1
1 0
1 4

$Y=(-2\ 3\ -6)^T$

b. $[X^T*X]^{-1}*a = X^T*Y$,

где X=

1 -1
1 0
1 2

$Y=(-2\ 3\ -6)^T$

c. $[X^T*X]^{-1}*a = X^T*Y$,

где X=

1 -1 1
1 0 0
1 2 4

$Y=(-2\ 3\ -6)^T$

d. $[X^T*X]^{-1}*a = X^T*Y$,

где X=

-1 1
0 0
2 4

$Y=(-2\ 3\ -6)^T$

e. $a=[X^T*X]^{-1}*X^T*Y$,

где X=

1 1
1 0
1 4

$Y=(-2\ 3\ -6)^T$

# Тест 2-4. Задача 7.

Построить многочлен вида

y(x) = a + b*x$^2$,

используя МНК по таблице исходных данных:

| | | | |
|---|---|---|---|
| X | -1 | 0 | 2 |
| Y | -2 | 2,0 | -6 |

и вычислить y(5).

Ответ запишите с точностью до 0.5. Для разделения целой и дробной части десятичной дроби используйте точку.

Способ № 1

Будем минимизировать функцию: $F(a,b)=\sum_i^n\left(y-\left(a+b\cdot x^2\right)\right)^2=\sum_i^n\left(y-a-b\cdot x^2\right)^2$

Составляем систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F(a,b)}{\partial a}=0\\ \dfrac{\partial F(a,b)}{\partial b}=0\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{\partial F(a,b)}{\partial a}=0\\ \dfrac{\partial F(a,b)}{\partial b}=0\end{cases}\quad \begin{cases}-2\sum\limits_i^n\left(y-a-b\cdot x^2\right)=0\\ 2\cdot\sum\limits_i^n\left(-x^2\right)\left(y-a-b\cdot x^2\right)=0\end{cases}\quad \begin{cases}-2\sum\limits_i^n\left(y-a-b\cdot x^2\right)=0\\ -2\cdot\sum\limits_i^n\left(x^2\cdot y-a\cdot x^2-b\cdot x^4\right)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sum\limits_i^n\left(y-a-b\cdot x^2\right)=0\\ \sum\limits_i^n\left(x^2\cdot y-a\cdot x^2-b\cdot x^4\right)=0\end{cases}\begin{cases}\sum\limits_i^n y-\sum\limits_i^n a-b\sum\limits_i^n x^2=0\\ \sum\limits_i^n x^2y-a\sum\limits_i^n x^2-b\sum\limits_i^n x^4=0\end{cases}\begin{cases}na+b\sum\limits_i^n x^2=\sum\limits_i^n y\\ a\sum\limits_i^n x^2+b\sum\limits_i^n x^4=\sum\limits_i^n x^2y\end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(a,b)}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial F(a,b)}{\partial b} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -2\sum\limits_i^n \left(y - a - b\cdot x^2\right) = 0 \\ 2\cdot\sum\limits_i^n \left(-x^2\right)\left(y - a - b\cdot x^2\right) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -2\sum\limits_i^n \left(y - a - b\cdot x^2\right) = 0 \\ -2\cdot\sum\limits_i^n \left(x^2\cdot y - a\cdot x^2 - b\cdot x^4\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_i^n \left(y - a - b\cdot x^2\right) = 0 \\ \sum\limits_i^n \left(x^2\cdot y - a\cdot x^2 - b\cdot x^4\right) = 0 \end{cases} \begin{cases} \sum\limits_i^n y - \sum\limits_i^n a - b\sum\limits_i^n x^2 = 0 \\ \sum\limits_i^n x^2 y - a\sum\limits_i^n x^2 - b\sum\limits_i^n x^4 = 0 \end{cases} \begin{cases} na + b\sum\limits_i^n x^2 = \sum\limits_i^n y \\ a\sum\limits_i^n x^2 + b\sum\limits_i^n x^4 = \sum\limits_i^n x^2 y \end{cases}$$

| X | -1 | 0 | 2 |
|---|---|---|---|
| Y | -2 | 2,0 | -6 |

$$\sum_i^n y = -6,\quad \sum_i^n x^2 = 5,\quad \sum_i^n x^4 = 17,\quad \sum_i^n x^2 y = -26$$

$$\begin{cases} 3a + 5b = -6 \\ 5a + 17b = -26 \end{cases} \begin{cases} 3\left(\dfrac{-26 - 17b}{5}\right) + 5b = -6 \\ a = \dfrac{-26 - 17b}{5} \end{cases} \begin{cases} \dfrac{-78 - 51b}{5} + \dfrac{25}{5}b = -6 \Rightarrow b = -\dfrac{48}{26} \approx -1,85 \\ a = \dfrac{-26 - 17b}{5} = \dfrac{-26 - 17\cdot\left(-\dfrac{48}{26}\right)}{5} \approx 1,08 \end{cases}$$

$$y(x)=1{,}08-1{,}85x^2$$

$$y(5)=1{,}08-1{,}85\cdot 25=-45{,}17$$

**Способ № 2.** Лекция 2.4.8 Примеры проецирования. МНК

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| $-1$ | $-2$ |
| $0$ | $2$ |
| $2$ | $-6$ |

$$\boxed{y=a_1+a_2\cdot x^2}$$

$\Phi_0=1$

$\Phi_1=x^2$

Составим матрицу значений базисных функций (см. лекцию 2.4.8 Примеры проецирования. МНК ):

| $\Phi_0$ | $\Phi_1$ | |
|---|---|---|
| 1 | 1 | $x=-1$ |
| 1 | 0 | $x=0$ |
| 1 | 4 | $x=2$ |

Составим нормальную систему уравнений (см. лекцию 2.4.4., 2.4.6):

$$F^T\cdot F\cdot a=F^T\cdot Y$$

$$F^T\cdot F=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\\1&4\end{pmatrix}^T\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&0\\1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1\\1&0\\1&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&5\\5&17\end{pmatrix}$$

$$F^T\cdot Y=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\\1&4\end{pmatrix}^T\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6\\-26\end{pmatrix}$$

Нормальная система уравнений :

$$F^T \cdot F \cdot a = F^T \cdot Y$$

$$\left(F^T \cdot F\right)^{-1} \cdot \left(F^T \cdot F\right) \cdot a = \left(F^T \cdot F\right)^{-1} \cdot F^T \cdot Y$$

$$\boxed{a = \left(F^T \cdot F\right)^{-1} \cdot F^T \cdot Y}$$

$$\left(F^T \cdot F\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 17 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 17 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$a = \left(F^T \cdot F\right)^{-1} \cdot F^T \cdot Y = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 17 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -26 \end{pmatrix} = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 17 \cdot (-6) - 5 \cdot (-26) \\ (-5) \cdot (-6) + 3 \cdot (-26) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 17 \cdot (-6) - 5 \cdot (-26) \\ (-5) \cdot (-6) + 3 \cdot (-26) \end{pmatrix} = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 28 \\ -48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}08 \\ -1{,}85 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$y(x) = 1{,}08 - 1{,}85x^2$$

$$y(5) = 1{,}08 - 1{,}85 \cdot 25 = -45{,}17$$

# Тест 2-4. Задача

Методом проецирования (наименьших квадратов) можно искать приближенное решение избыточной системы линейных алгебраических уравнений $A * x = b$.

Для этого надо решить задачу проецирования вектора **b** на линейную оболочку векторов-столбцов матрицы **A**.

Для этого решается задача минимизации отклонения $|Ax - b| \to min$, составляется и решается нормальная система уравнений вида **$A^T$*Ax=$A^T$b.**

**Воспользуйтесь данным методом и найдите приближенное решение системы**

x+y=3

x−y=1

2x+y=2.

В поле ответа укажите значение переменной **y** с точностью до **0.01**. Дробную часть от целой отделяйте точкой.

Ответ:

Система в матричной форме записывается как:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Составим нормальную систему уравнений:

$$A^T \cdot A \cdot x = A^T \cdot b$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1+1+4 & 1-1+2 \\ 1-1+2 & 1+1+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1+4 \\ 3-1+2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 16 \\ 8 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1{,}14 \\ 0{,}57 \end{pmatrix}$$

# Тест 2-4. Задача

Даны координаты векторов ***a=( -2,7; -2; 5), b=( 2,2; -3; 2)*** (в ортонормированном базисе). Найти координаты **единичного** вектора, перпендикулярного векторам ***a , b.*** (Подсказка: воспользоваться векторным произведением). В ответе укажите модуль ***2-й координаты*** полученного вектора.

Ответ укажите с точностью до 0,05. Целую часть от дробной отделяйте точкой

Ответ:

В результате умножения двух векторов, получается вектор, перпендикулярный перемножаемым векторам. Воспользуемся этим свойством. Найдем векторное произведение векторов и вычислим для него орт-вектор.

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -2,7 & -2 & 5\\ 2,2 & -3 & 2\end{vmatrix}=\bar{i}\cdot\begin{vmatrix}-2 & 5\\ -3 & 2\end{vmatrix}-\bar{j}\cdot\begin{vmatrix}-2,7 & 5\\ 2,2 & 2\end{vmatrix}+\bar{k}\cdot\begin{vmatrix}-2,7 & -2\\ 2,2 & -3\end{vmatrix}=$$

$$=11\cdot\bar{i}-16,4\cdot\bar{j}+12,5\cdot\bar{k}.$$

Найдем координаты орт вектора:

$$\bar{c}_0=\frac{\bar{c}}{|\bar{c}|}=\frac{=11\cdot\bar{i}-16,4\cdot\bar{j}+12,5\cdot\bar{k}}{\sqrt{11^2+(-16,4)^2+12,5^2}}=\frac{11\cdot\bar{i}-16,4\cdot\bar{j}+12,5\cdot\bar{k}}{\sqrt{121+268,96+156,25}}=\frac{11\cdot\bar{i}-16,4\cdot\bar{j}+12,5\cdot\bar{k}}{\sqrt{546,21}}=$$

$$=\frac{11\cdot\bar{i}-16,4\cdot\bar{j}+12,5\cdot\bar{k}}{23,37}\approx 0,47\cdot\bar{i}-0,70\cdot\bar{j}+0,53\cdot\bar{k}.$$

# Тест 2-4. Задача 10.

Даны координаты векторов *a=( -0,6; -2; 5), b=( -3,8; -3; 2)* (в ортонормированном базисе). Найти площадь треугольника, образованного векторам ***a*** , ***b***. (Подсказка: воспользоваться векторным произведением).

Ответ укажите с точностью до 0.1. Целую часть от дробной отделяйте точкой

Ответ:

Из свойств векторного произведения известно, что площадь треугольника равна

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\overline{a} \times \overline{b}\right|$$

Найдем векторное произведение векторов в координатной форме:

$$\overline{a} \times \overline{b} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ -0,6 & -2 & 5 \\ -3,8 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \overline{i} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - \overline{j} \cdot \begin{vmatrix} -0,6 & 5 \\ -3,8 & 2 \end{vmatrix} + \overline{k} \cdot \begin{vmatrix} -0,6 & -2 \\ -3,8 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 11 \cdot \overline{i} - 17,8 \cdot \overline{j} - 5,8 \cdot \overline{k}.$$

Тогда площадь треугольника будет равна:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\overline{a} \times \overline{b}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{11^2 + (-17,8)^2 + (-5,8)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{121 + 316,84 + 33,64} \approx 10,86$$