Подпространства векторного пространства

Вопрос **1**

Верно

Баллов: 1,0 из 1,0

Редактировать вопрос

Укажите, какие из приведенных ниже подмножеств *L* являются подпространством векторного пространства **V**

Выберите один или несколько ответов:

- [ ] **V** - векторное пространство троек чисел $x = (x_1, x_2, x_3)$ над полем вещественных чисел (R^3).
L - множество троек чисел вида $(x_1, x_2, 1), x_1, x_2 \in R$.

- [ ] **V** - векторное пространство троек чисел $x = (x_1, x_2, x_3)$ над полем вещественных чисел (R^3).
L - множество троек чисел вида $a_1 * x_1 + a_2 * x_2 + a_3 * x_3 = 1, x_1, x_2, x_3, a_1, a_2, a_3 \in R$.

- [x] **V** - векторное пространство троек чисел $x = (x_1, x_2, x_3)$ над полем вещественных чисел (R^3).
L - множество троек чисел вида $(x_1, 0, x_2), x_1, x_2 \in R$.

✓ Верно. Это множество замкнуто относительно операций + и умножения на число

- [x] **V** - векторное пространство многочленов степени не выше 2-й ($P_2(x)$) над полем вещественных чисел.
L - множество многочленов вида $a * (x - 1) + b * (x^2 + 1), a, b \in R$.

✓ Верно. Это множество замкнуто относительно операций + и умножения на число

- [x] **V** - векторное пространство многочленов степени не выше 2-й ($P_2(x)$) над полем вещественных чисел.
L - множество многочленов вида $a * x + b * x^2, a, b \in R$ ($x*P_1(x)$).

✓ Верно. Это множество замкнуто относительно операций + и умножения на число

1. Умножим тройку на число α: $\left(\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, \alpha \cdot 1\right) = \left(\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, \alpha\right) \notin L$

Не является подпространством векторного пространства.

2. Проверим свойство умножения на число. Возьмем тройку: $\left(\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot x_2, \alpha \cdot x_3\right)$

Проверим выполнение условия, определяющего подпространство

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3 = 1$$

$$a_1 \cdot \left(\alpha \cdot x_1\right) + a_2 \cdot \left(\alpha \cdot x_2\right) + a_3 \cdot \left(\alpha \cdot x_3\right) = \alpha\left(a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 + a_3 \cdot x_3\right) = \alpha \neq 1$$

Не является подпространством векторного пространства.

3. Проверим свойства умножения на число и суммы двух векторов:

$$\left(\alpha \cdot x_1, \alpha \cdot 0, \alpha \cdot x_3\right) = \left(y_1, 0, y_3\right) \in L$$

$$\left(x_1, 0, x_3\right) + \left(y_1, 0, y_3\right) = \left(x_1 + y_1, 0, x_3 + y_3\right) = \left(z_1, 0, z_3\right) \in L$$

Является подпространством векторного пространства.

4. Проверим свойства умножения на число и суммы двух векторов:

$$a \cdot (x-1) + b \cdot (x^2+1)$$

$$\alpha \cdot \left(a \cdot (x-1) + b \cdot (x^2+1)\right) = (\alpha \cdot a) \cdot (x-1) + (\alpha \cdot b) \cdot (x^2+1) = c \cdot (x-1) + d \cdot (x^2+1) \in L$$

$$a_1 \cdot (x-1) + b_1 \cdot (x^2+1) + a_2 \cdot (x-1) + b_2 \cdot (x^2+1) = (a_1 + a_2) \cdot (x-1) + (b_1 + b_2) \cdot (x^2+1) =$$

$$= a_3 \cdot (x-1) + b_3 \cdot (x^2+1) \in L$$

Является подпространством векторного пространства.

5. Проверим свойства умножения на число и суммы двух векторов:

$$a \cdot x + b \cdot x^2$$

$$\alpha \cdot \left(a \cdot x + b \cdot x^2\right) = (\alpha \cdot a) \cdot x + (\alpha \cdot b) \cdot x^2 = c \cdot x + d \cdot x^2 \in L$$

$$a_1 \cdot x + b_1 \cdot x^2 + a_2 \cdot x + b_2 \cdot x^2 = (a_1 + a_2) \cdot x + (b_1 + b_2) \cdot x^2 = a_3 \cdot x + b_3 \cdot x^2 \in L$$

Является подпространством векторного пространства.

Тест 2-4. Задача № 2

V - векторное пространство троек чисел $r = (x, y, z)$ над полем вещественных чисел (R^3).

L1 - множество троек чисел $r = (x, y, z)$, удовлетворяющих условию **x + y =0**, $x, y, z \in R$.

L2 - множество троек чисел $r = (x, y, z)$, удовлетворяющих условию **x+7*z=0**, $x, y, z \in R$.

Определите размерность их пересечения L3.

1) Если размерность пересечения равна 1, то найдите единичный базисный вектор **e1** этого подпространства: **L3=<e1>**.

2) Если размерность пересечения равна 2, то найдите единичный базисный вектор **e1** ортогонального дополнения подпространства **L3**.

В ответе укажите значение скалярного произведения **e1** и вектора ***(3;2;1)*** с точностью **0.01** или 0, если размерность пересечения равна 0.

Ответ:

См. лекцию 2.4.5 Пересечение и сумма подпространств.
Часть 1

Тест 2-4. Задача № 3

V - векторное пространство троек чисел $r = (x, y, z)$ над полем вещественных чисел (R^3).

L1 - множество троек чисел $r = (x, y, z)$, удовлетворяющих условию **x + y + z =0**, $x, y, z \in R$.

L2 - множество троек чисел $r = (x, y, z)$, удовлетворяющих условию **r = k*(1;-1; 7)**, $x, y, z, k \in R$.

Определите размерность их суммы **L3=L1+L2**.

1) Если размерность суммы равна 1, то найдите единичный базисный вектор **e1** этого подпространства: **L3=<e1>**.

2) Если размерность суммы равна 2, то найдите единичный базисный вектор **e1** ортогонального дополнения подпространства **L3**.

В ответе укажите значение скалярного произведения **e1** и вектора ***(3;2;1)*** с точностью **0.01** или **3**, если размерность суммы равна 3.

Ответ:

См. лекцию 2.4.6 Пересечение и сумма подпространств. Часть 2

Тест 2-4. Задача № 4 -1

Вопрос **4**

Неверно

Баллов: 0,0 из 1,0

Редактировать вопрос

Даны координаты вектора ***a=(3; 6)*** (в ортонормированном базисе). Найти матрицу проецирования ***произвольного*** вектора ***b*** на вектор ***a*** .

В ответе укажите сумму **элементов** полученной матрицы с точностью до **0.1**. Целую часть от дробной отделяйте точкой

Ответ: 1.5

Правильный ответ: 1,8

Проекция вектора на вектор в матричном виде выглядит как: $\overline{np_{\bar{a}}\bar{b}} = M \cdot \bar{b}$

(Лекция 2.4.3 Проецирование вектора на подпространство. Часть 1)

Где $M = \dfrac{a \cdot a^T}{a^T \cdot a}$

Найдем M в нашем случае:

$$M = \frac{a \cdot a^T}{a^T \cdot a} = \frac{\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 6 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 3 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 9 & 18 \\ 18 & 36 \end{pmatrix}}{9+36} = \frac{1}{45}\begin{pmatrix} 9 & 18 \\ 18 & 36 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1+2+2+4}{5} = \frac{9}{5} = 1.8$$

Тогда $\overline{np_{\bar{a}}\bar{b}} = M \cdot \bar{b} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix} x+2y \\ 2x+4y \end{pmatrix}$

Тест 2-4. Задача № 4 -2

Даны координаты вектора ***a=(1; 6)*** (в ортонормированном базисе). Найти матрицу проецирования ***произвольного*** вектора ***b*** на вектор ***a*** .

В ответе укажите сумму **элементов** полученной матрицы с точностью до **0.1**. Целую часть от дробной отделяйте точкой

Ответ:

Проекция вектора на вектор в матричном виде выглядит как: $\overline{пр_{\bar{a}}\bar{b}} = M \cdot \bar{b}$

(Лекция 2.4.3 Проецирование вектора на подпространство. Часть 1)

Где $M = \dfrac{a \cdot a^T}{a^T \cdot a}$

Найдем M в нашем случае:

$$M = \frac{a \cdot a^T}{a^T \cdot a} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 6 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 36 \end{pmatrix}}{1+36} = \frac{1}{37}\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 36 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1+6+6+36}{37} = 1.32$$

Тогда $\overline{пр_{\bar{a}}\bar{b}} = M \cdot \bar{b} = \dfrac{1}{37}\begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 6 & 36 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{1}{37}\begin{pmatrix} x+6y \\ 6x+36y \end{pmatrix}$

Тест 2-4. Задача

Даны три вектора ***a=(-0,1; -2; 5)***, ***b=(0,0; -3; 2)*** и ***c=(1; -9; -5)***.

Требуется найти векторную проекцию вектора ***c*** на линейную оболочку векторов ***(a,b)***.

В ответе укажите 3-ю координату получившегося вектора.

Ответ укажите с точностью до 0,1. Целую часть от дробной отделяйте точкой

Ответ:

Нам известно, что: $\overline{np_L \bar{c}} = M \cdot \bar{c}, \quad M = X \cdot \left(X^T \cdot X\right)^{-1} \cdot X^T$

(Лекция 2.4.4 Проецирование вектора на подпространство. Часть 2)

Найдем матрицу проецирования M:

$$X = \begin{pmatrix} -0,1 & 0 \\ -2 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X^T \cdot X = \begin{pmatrix} -0,1 & 0 \\ -2 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} -0,1 & 0 \\ -2 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,1 & -2 & 5 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0,1 & 0 \\ -2 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,01+4+25 & 6+10 \\ 6+10 & 9+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29,01 & 16 \\ 16 & 13 \end{pmatrix}$$

$$\left(X^T \cdot X\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 29,01 & 16 \\ 16 & 13 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{121,13} \begin{pmatrix} 13 & -16 \\ -16 & 29,01 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,11 & -0,13 \\ -0,13 & 0,24 \end{pmatrix}$$

$$M=\begin{pmatrix}-0,1 & 0\\ -2 & -3\\ 5 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0,11 & -0,13\\ -0,13 & 0,24\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-0,1 & -2 & 5\\ 0 & -3 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-0,1\cdot 0,11 & -0,1\cdot(-0,13)\\ -0,22+0,39 & 0,26-0,72\\ 0,55-0,26 & -0,65+0,48\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-0,1 & -2 & 5\\ 0 & -3 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-0,011 & 0,013\\ 0,17 & -0,46\\ 0,29 & -0,17\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-0,1 & -2 & 5\\ 0 & -3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(-0,011)\cdot(-0,1) & 0,022-0,039 & -0,055+0,026\\ -0,017 & -0,34+1,38 & 0,85-0,92\\ -0,029 & -0,58+0,51 & 1,45-0,34\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0,0011 & -0,017 & -0,029\\ -0,017 & 1,04 & -0,07\\ -0,029 & -0,07 & 1,11\end{pmatrix}$$

$$\overline{np_L\bar{c}}=M\cdot\bar{c}=\begin{pmatrix}0,0011 & -0,017 & -0,029\\ -0,017 & 1,04 & -0,07\\ -0,029 & -0,07 & 1,11\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ -9\\ -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,0011\cdot 1+(-0,017)\cdot(-9)+(-0,029)\cdot(-5)\\ -0,017\cdot 1+1,04\cdot(-9)+(-0,07)\cdot(-5)\\ -0,029\cdot 1+(-0,07)\cdot(-9)+1,11\cdot(-5)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}0,0011+0,153+0,145\\ -0,017-9,36+0,35\\ -0,029+0,63-5,55\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,2991\\ -9,027\\ -4,949\end{pmatrix}$$

Тест 2-4. Задача 6.

Пусть необходимо построить многочлен вида

$y(x) = a_0 + a_1 * x^2$, используя МНК по таблице исходных данных:

X	-1	0	2
Y	-2	3	-6

Тогда нормальная система уравнений, из которой находятся коэффициенты a_0 и a_1, выглядит следующим образом (укажите):

Выберите один ответ:

- a. X*a=Y,
  где X=
  1 1
  1 0
  1 4

  $Y = (-2\ 3\ -6)^T$
- b. $[X^T*X]^{-1}*a = X^T*Y$,
  где X=
  1 -1
  1 0
  1 2

  $Y = (-2\ 3\ -6)^T$
- c. $[X^T*X]^{-1}*a = X^T*Y$,
  где X=
  1 -1 1
  1 0 0
  1 2 4

  $Y = (-2\ 3\ -6)^T$
- d. $[X^T*X]^{-1}*a = X^T*Y$,
  где X=
  -1 1
  0 0
  2 4

  $Y = (-2\ 3\ -6)^T$
- e. $a=[X^T*X]^{-1}*X^T*Y$,
  где X=
  1 1
  1 0
  1 4

  $Y = (-2\ 3\ -6)^T$

Тест 2-4. Задача 7.

Построить многочлен вида

$y(x) = a + b*x^2$,

используя МНК по таблице исходных данных:

X	-1	0	2
Y	-2	2,0	-6

и вычислить y(5).

Ответ запишите с точностью до 0.5. Для разделения целой и дробной части десятичной дроби используйте точку.

Способ № 1

Будем минимизировать функцию: $F(a,b)=\sum_i^n\left(y-\left(a+b\cdot x^2\right)\right)^2=\sum_i^n\left(y-a-b\cdot x^2\right)^2$

Составляем систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F(a,b)}{\partial a}=0\\ \dfrac{\partial F(a,b)}{\partial b}=0\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{\partial F(a,b)}{\partial a}=0\\ \dfrac{\partial F(a,b)}{\partial b}=0\end{cases}\quad \begin{cases}-2\sum_i^n\left(y-a-b\cdot x^2\right)=0\\ 2\cdot\sum_i^n\left(-x^2\right)\left(y-a-b\cdot x^2\right)=0\end{cases}\quad \begin{cases}-2\sum_i^n\left(y-a-b\cdot x^2\right)=0\\ -2\cdot\sum_i^n\left(x^2\cdot y-a\cdot x^2-b\cdot x^4\right)=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\sum_i^n\left(y-a-b\cdot x^2\right)=0\\ \sum_i^n\left(x^2\cdot y-a\cdot x^2-b\cdot x^4\right)=0\end{cases}\quad \begin{cases}\sum_i^n y-\sum_i^n a-b\sum_i^n x^2=0\\ \sum_i^n x^2y-a\sum_i^n x^2-b\sum_i^n x^4=0\end{cases}\quad \begin{cases}na+b\sum_i^n x^2=\sum_i^n y\\ a\sum_i^n x^2+b\sum_i^n x^4=\sum_i^n x^2y\end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F(a,b)}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial F(a,b)}{\partial b} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -2\sum_i^n \left(y - a - b \cdot x^2\right) = 0 \\ 2 \cdot \sum_i^n \left(-x^2\right)\left(y - a - b \cdot x^2\right) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -2\sum_i^n \left(y - a - b \cdot x^2\right) = 0 \\ -2 \cdot \sum_i^n \left(x^2 \cdot y - a \cdot x^2 - b \cdot x^4\right) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_i^n \left(y - a - b \cdot x^2\right) = 0 \\ \sum_i^n \left(x^2 \cdot y - a \cdot x^2 - b \cdot x^4\right) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \sum_i^n y - \sum_i^n a - b\sum_i^n x^2 = 0 \\ \sum_i^n x^2 y - a\sum_i^n x^2 - b\sum_i^n x^4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} na + b\sum_i^n x^2 = \sum_i^n y \\ a\sum_i^n x^2 + b\sum_i^n x^4 = \sum_i^n x^2 y \end{cases}$$

X	-1	0	2
Y	-2	2,0	-6

$$\sum_i^n y = -6, \quad \sum_i^n x^2 = 5, \quad \sum_i^n x^4 = 17, \quad \sum_i^n x^2 y = -26$$

$$\begin{cases} 3a + 5b = -6 \\ 5a + 17b = -26 \end{cases} \quad \begin{cases} 3\left(\dfrac{-26 - 17b}{5}\right) + 5b = -6 \\ a = \dfrac{-26 - 17b}{5} \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{-78 - 51b}{5} + \dfrac{25}{5}b = -6 \Rightarrow b = -\dfrac{48}{26} \approx -1{,}85 \\ a = \dfrac{-26 - 17b}{5} = \dfrac{-26 - 17 \cdot \left(-\dfrac{48}{26}\right)}{5} \approx 1{,}08 \end{cases}$$

$$y(x) = 1{,}08 - 1{,}85x^2$$

$$y(5) = 1{,}08 - 1{,}85 \cdot 25 = -45{,}17$$

Способ № 2. Лекция 2.4.8 Примеры проецирования. МНК

x	y
-1	-2
0	2
2	-6

$$\boxed{y = a_1 + a_2 \cdot x^2}$$

$$\Phi_0 = 1$$

$$\Phi_1 = x^2$$

Составим матрицу значений базисных функций (см. лекцию 2.4.8 Примеры проецирования. МНК):

Φ_0	Φ_1	
1	1	$x = -1$
1	0	$x = 0$
1	4	$x = 2$

Составим нормальную систему уравнений (см. лекцию 2.4.4., 2.4.6):

$$F^T \cdot F \cdot a = F^T \cdot Y$$

$$F^T \cdot F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 17 \end{pmatrix}$$

$$F^T \cdot Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -26 \end{pmatrix}$$

Нормальная система уравнений :

$$F^T \cdot F \cdot a = F^T \cdot Y$$

$$\left(F^T \cdot F\right)^{-1} \cdot \left(F^T \cdot F\right) \cdot a = \left(F^T \cdot F\right)^{-1} \cdot F^T \cdot Y$$

$$\boxed{a = \left(F^T \cdot F\right)^{-1} \cdot F^T \cdot Y}$$

$$\left(F^T \cdot F\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 17 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 17 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$a = \left(F^T \cdot F\right)^{-1} \cdot F^T \cdot Y = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 17 & -5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -26 \end{pmatrix} = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 17 \cdot (-6) - 5 \cdot (-26) \\ (-5) \cdot (-6) + 3 \cdot (-26) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 17 \cdot (-6) - 5 \cdot (-26) \\ (-5) \cdot (-6) + 3 \cdot (-26) \end{pmatrix} = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 28 \\ -48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}08 \\ -1{,}85 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

$$y(x) = 1{,}08 - 1{,}85x^2$$

$$y(5) = 1{,}08 - 1{,}85 \cdot 25 = -45{,}17$$

Тест 2-4. Задача

Методом проецирования (наименьших квадратов) можно искать приближенное решение избыточной системы линейных алгебраических уравнений $A * x = b$.

Для этого надо решить задачу проецирования вектора **b** на линейную оболочку векторов-столбцов матрицы **A**.

Для этого решается задача минимизации отклонения $|Ax - b| \to min$, составляется и решается нормальная система уравнений вида $A^T*Ax=A^Tb$.

Воспользуйтесь данным методом и найдите приближенное решение системы

x+y=3

x−y=1

2x+y=2.

В поле ответа укажите значение переменной **y** с точностью до **0.01**. Дробную часть от целой отделяйте точкой.

Ответ:

Система в матричной форме записывается как:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Составим нормальную систему уравнений:

$$A^T \cdot A \cdot x = A^T \cdot b$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1+1+4 & 1-1+2 \\ 1-1+2 & 1+1+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1+4 \\ 3-1+2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 16 \\ 8 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1{,}14 \\ 0{,}57 \end{pmatrix}$$

Тест 2-4. Задача

Даны координаты векторов ***a=(-2,7; -2; 5)***, ***b=(2,2; -3; 2)*** (в ортонормированном базисе). Найти координаты **единичного** вектора, перпендикулярного векторам ***a*** , ***b***. (Подсказка: воспользоваться векторным произведением). В ответе укажите модуль ***2-й координаты*** полученного вектора.

Ответ укажите с точностью до 0,05. Целую часть от дробной отделяйте точкой

Ответ:

В результате умножения двух векторов, получается вектор, перпендикулярный перемножаемым векторам. Воспользуемся этим свойством. Найдем векторное произведение векторов и вычислим для него орт-вектор.

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -2,7 & -2 & 5\\ 2,2 & -3 & 2\end{vmatrix}=\bar{i}\cdot\begin{vmatrix}-2 & 5\\ -3 & 2\end{vmatrix}-\bar{j}\cdot\begin{vmatrix}-2,7 & 5\\ 2,2 & 2\end{vmatrix}+\bar{k}\cdot\begin{vmatrix}-2,7 & -2\\ 2,2 & -3\end{vmatrix}=$$

$$=11\cdot\bar{i}-16,4\cdot\bar{j}+12,5\cdot\bar{k}.$$

Найдем координаты орт вектора:

$$\bar{c}_0=\frac{\bar{c}}{|\bar{c}|}=\frac{=11\cdot\bar{i}-16,4\cdot\bar{j}+12,5\cdot\bar{k}}{\sqrt{11^2+(-16,4)^2+12,5^2}}=\frac{11\cdot\bar{i}-16,4\cdot\bar{j}+12,5\cdot\bar{k}}{\sqrt{121+268,96+156,25}}=\frac{11\cdot\bar{i}-16,4\cdot\bar{j}+12,5\cdot\bar{k}}{\sqrt{546,21}}=$$

$$=\frac{11\cdot\bar{i}-16,4\cdot\bar{j}+12,5\cdot\bar{k}}{23,37}\approx 0,47\cdot\bar{i}-0,70\cdot\bar{j}+0,53\cdot\bar{k}.$$

Тест 2-4. Задача 10.

Даны координаты векторов ***a=(-0,6; -2; 5)***, ***b=(-3,8; -3; 2)*** (в ортонормированном базисе). Найти площадь треугольника, образованного векторам ***a*** , ***b***. (Подсказка: воспользоваться векторным произведением).

Ответ укажите с точностью до 0.1. Целую часть от дробной отделяйте точкой

Ответ:

Из свойств векторного произведения известно, что площадь треугольника равна

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\bar{a} \times \bar{b}\right|$$

Найдем векторное произведение векторов в координатной форме:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -0,6 & -2 & 5 \\ -3,8 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \bar{i} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} - \bar{j} \cdot \begin{vmatrix} -0,6 & 5 \\ -3,8 & 2 \end{vmatrix} + \bar{k} \cdot \begin{vmatrix} -0,6 & -2 \\ -3,8 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 11 \cdot \bar{i} - 17,8 \cdot \bar{j} - 5,8 \cdot \bar{k}.$$

Тогда площадь треугольника будет равна:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2}\left|\bar{a} \times \bar{b}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{11^2 + (-17,8)^2 + (-5,8)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{121 + 316,84 + 33,64} \approx 10,86$$