

Уравнения с модулем

Способы решения



$$|2-5x|=7$$

$$|3x+2|=25$$

$$|7x+4|=83$$

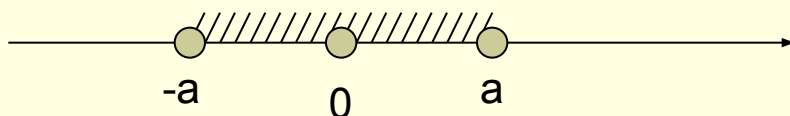
$$|-7|=?$$

$$|17|=?$$



Определения

- Модуль числа a – расстояние от точки с координатой a до нуля



- следствия
- 1. модуль числа неотрицателен ($|a| \geq 0$)

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a > 0 \\ -a, & \text{если } a < 0 \\ 0, & \text{если } a = 0 \end{cases}$$

Способы решения уравнений с модулями:

- 1. По определению модуля
- 2. Раскрытие модуля на промежутке знакопостоянства
- 6. Важный частный случай

1. По определению модуля

$$|f(x)| = a \quad (a \geq 0)$$

$$f(x) = a \quad \text{или} \quad f(x) = -a$$

Пример : $|3x - 8| = 5$

Решение:

$$3x - 8 = 5 \quad \text{или} \quad 3x - 8 = -5;$$

$$3x = 13, \quad 3x = 3;$$

$$x = 13/3, \quad x = 1.$$

Ответ: $13/3; 1.$

Решить по определению модуля

$$1) |2x - 3| = 5$$

решение

По определению модуля № 1

$$|2x - 3| = 5$$

Решение

$$2x - 3 = 5 \quad \text{или} \quad 2x - 3 = -5$$

$$2x = 8 \quad \quad \quad 2x = -2$$

$$x = 4 \quad \quad \quad x = -1$$

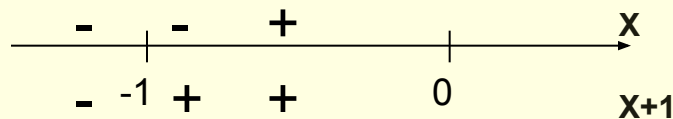
Ответ: -1;4

4. Раскрытие модуля на промежутке знакопостоянства

Универсальный способ

$$\text{Пример: } |x| + |x+1| = 1$$

Решение: Найдем нули подмодульных выражений: 0; -1



$$1. \begin{cases} x \leq -1 \\ -x - x - 1 = 1, \text{ то} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \leq -1 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} -1 < x < 0 \\ -x + x + 1 = 1, \text{ то} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -1 < x < 0 \\ 0x = 0 \end{cases}, -1 < x < 0$$

$$3. \begin{cases} x \geq 0 \\ x + x + 1 = 1, \text{ то} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 2x = 0, \text{ то } x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} x = -1 \\ -1 < x < 0 \\ x = 0 \end{array}$$

Ответ: $[-1; 0]$.

Решить, используя раскрытие модуля на промежутках знакопостоянства

1) $|5 - x| + |x - 1| = 10$

решение

2) $|x - 3| + 2|x + 1| = 4$

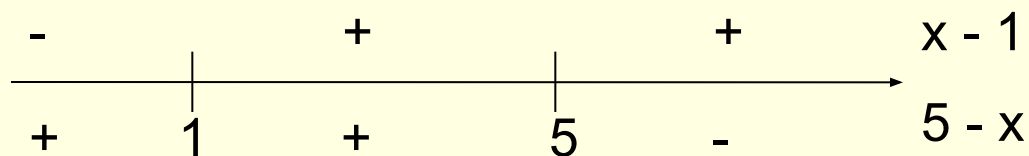
решение

3) $|x - 1| + |2x - 3| = 2$

решение

Раскрытие модуля на промежутках знакопостоянства № 1

$$|5 - x| + |x - 1| = 10$$



Если $x \leq 1$, то

$$5 - x - x + 1 = 10$$

$$-2x + 6 = 10$$

$$-2x = 10 - 6$$

$$-2x = 4$$

$$x = -2$$

Если $x \geq 5$, то

$$-5 + x + x - 1 = 10$$

$$2x - 6 = 10$$

$$2x = 10 + 6$$

$$2x = 16$$

$$x = 8$$

Если $1 < x < 5$, то

$$5 - x + x - 1 = 10$$

$$0x + 4 = 10$$

$$0x = 10 - 4$$

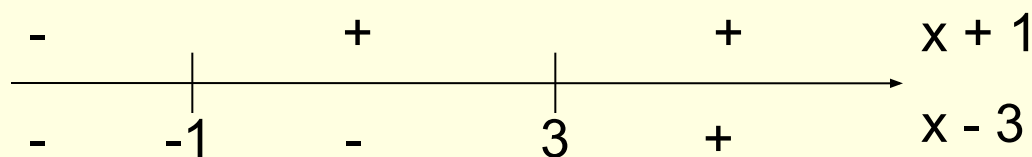
$$0x = 6$$

нет решений

Ответ: - 2 ; 8

Раскрытие модуля на промежутках знакопостоянства № 2

$$|x - 3| + 2|x + 1| = 4$$



Если $x \leq -1$, то

$$3 - x - 2x - 2 = 4$$

$$-3x + 1 = 4$$

$$-3x = 4 - 1$$

$$-3x = 3$$

$$x = -1$$

Если $-1 < x \leq 3$, то

$$3 - x + 2x + 2 = 4$$

$$x + 5 = 4$$

$$x = 4 - 5$$

$$x = -1$$

нет решений

Если $x > 3$, то

$$x - 3 + 2x + 2 = 4$$

$$3x - 1 = 4$$

$$3x = 4 + 1$$

$$3x = 5$$

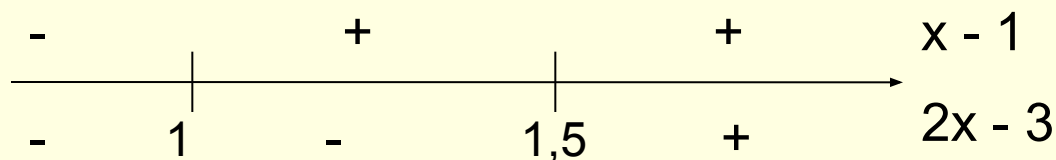
$$x = 5/3$$

нет решений

Ответ: - 1

Раскрытие модуля на промежутках знакопостоянства № 3

$$|x - 1| + |2x - 3| = 2$$



1. Если $x \leq 1$, то

$$\begin{aligned}1 - x - 2x + 3 &= 2 \\- 3x + 4 &= 2 \\- 3x &= 2 - 4 \\- 3x &= - 2 \\x &= 2/3\end{aligned}$$

2. Если $1 < x \leq 1,5$, то

$$\begin{aligned}x - 1 + 3 - 2x &= 2 \\- x + 2 &= 2 \\- x &= 2 - 2 \\x &= 0 \\&\text{нет решений}\end{aligned}$$

3. Если $x > 1,5$, то

$$\begin{aligned}x - 1 + 2x - 3 &= 2 \\3x - 4 &= 2 \\3x &= 2 + 4 \\3x &= 6 \\x &= 2\end{aligned}$$

Ответ: $2/3$; 2

6. Важный частный случай

$$|f(x)| = -f(x), \quad \text{тогда } f(x) \leq 0$$

Пример: $7-4x = |4x-7|$

Решение: т.к. $|f(x)| = -f(x)$, то $f(x) \leq 0$

$$4x - 7 \leq 0$$

$$x \leq 7/4, \quad 7/4 = 1,75$$

Ответ: $(-\infty; 1,75]$

Удачи!