Лекция. Ряды

Лектор : Сандаков Евгений Борисович – доцент кафедры №30 Высшей математики «НИЯУ МИФИ»

Ряды. Лекция 9-ого октября 2020 года

§ Преобразование Абеля. Признак Дирихле, Абеля.

Пусть даны числовые последовательности $\{a_n\}_1^\infty$ и $\{b_n\}_1^\infty$. Обозначим через B_k последовательность частичных сумм ряда $\sum\limits_{k=1} b_n$: $B_1=b_1$, $B_2=b_1+b_2, \dots,$

$B_k=b_1+b_2+\dots+b_k$. Следовательно,

$b_1=B_1,\ b_2=B_2-B_1, \dots, \underline{b_k=B_k-B_{k-1}}$ (*)

Пусть заданы произвольные $m, n: m>n\geq 1$

Тогда из (*) получим

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k = a_{n+1}b_{n+1}+\dots+a_m b_m =$$

$$= a_{n+1}(B_{n+1}-B_n)+a_{n+2}(B_{n+2}-B_{n+1})+\dots$$

$$+\dots+a_m(B_m-B_{m-1}) \qquad (**)$$

Раскрыв в этом равенстве скобки и перегруппировав, получим

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k = -a_{n+1}B_n+(a_{n+1}-a_{n+2})B_{n+1}+\dots$$

$$+\dots+(a_{m-1}-a_m)B_{m-1}+a_m B_m =$$

$$= -a_{n+1}B_n+\sum_{k=n+1}^{m-1}(a_k-a_{k+1})B_k+a_m B_m$$

То есть

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k = a_m B_m - a_{n+1} B_n + \sum_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) B_k \quad (***)$$

Формула (***) называется преобразованием Абеля

Теорема (Признак Дирихле).

Если числовая последовательность $\{a_n\}_1^\infty$ монотонна и стремится к нулю, а частичные суммы B_k ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ограничены в совокупности, то есть $\exists M>0$ такое, что для $\forall k \in \mathbb{N} \Longrightarrow |B_k| = \left|\sum_{n=1}^{k} b_n\right| \le M$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Док-во: Не ограничивая общности, можно считать, что $\{a_n\}_1^\infty$ монотонно не возрастает, то есть

$$a_1 \ge a_2 \ge \dots \ge a_n \ge \dots \text{ и } \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad (1)$$

Поэтому $a_n \ge 0$ и согласно определению предела, для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такой, что

$$0 \le a_n < \frac{\varepsilon}{3M}, \text{ для } \forall n > N_0. \quad (2)$$

Далее пусть n и m такие, что $m > n > N_0$. Тогда из преобразования Абеля, из (1) и (2) следует, что

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k\right| \le |a_m||B_m| + |a_{n+1}||B_n| + \left|\sum_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) B_k\right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3M}\cdot M + \frac{\varepsilon}{3M}\cdot M + \sum_{k=n+1}^{m-1}(a_k - a_{k+1})\cdot M =$$

$$= \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + M(a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+2} - a_{n+3} + \dots +$$

$$+ a_{m-1} - a_m) = \frac{2\varepsilon}{3} + M(a_{n+1} - a_m) \le$$

$$\le \frac{2\varepsilon}{3} + M\cdot a_{n+1} < \frac{2\varepsilon}{3} + M\cdot\frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon$$

Это означает, что для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ выполняется критерий Коши. Следовательно ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится #.

Теорема (Признак Абеля).

Пусть числовая последовательность $\{a_n\}_1^{\infty}$ монотонна и ограничена, то есть $\exists M>0$ такое что для $\forall n \in N$ выполняется условие $|a_n| \le M$, и пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится.

Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Док-во: Не ограничивая общности можно считать, что $\{a_n\}_1^{\infty}$ монотонна не возрастает, то есть

$$a_1 \ge a_2 \ge \dots \ge a_n \ge \dots \quad \text{и} \quad |a_n| \le M \quad (*)$$

Обозначим сумму сходящегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ через B, то есть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = B$

Так как $B = \lim_{n\to\infty} B_n$, где $B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$,
то по определению предела
для $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n > N_0 \Rightarrow$

$$|B_n - B| < \frac{\varepsilon}{4M} \quad (**)$$

Отметим, что преобразование Абеля эквивалентно равенству

$$\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k = a_m(B_m - B) - a_{n+1}(B_n - B) + \sum_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1})(B_k - B) \quad (***)$$

(оно проверяется непосредственно)
Далее пусть n и m таковы, что $m > n > N_0$. Тогда из (***), (**) и (*) следует, что

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k b_k\right| \le |a_m| \cdot |B_m - B| + |a_{n+1}| \cdot |B_n - B| + \left|\sum_{k=n+1}^{m-1}(a_k - a_{k+1})(B_k - B)\right| < M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} +$$

$$+ \sum_{k=n+1}^{m-1}(a_k - a_{k+1}) \cdot \frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{4M}(a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+2} - a_{n+3} + \cdots + a_{m-1} - a_m) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4M}(a_{n+1} - a_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4M}(|a_{n+1}| + |a_m|) <$$

$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4M} \cdot 2M = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

Это означает, что для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ выполняется критерий Коши. Следовательно ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится #

Следствие. Из признака Дирихле можно вывести признак Абеля и признак Лейбница.

а) Выведем признак Абеля.

Так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то его частичные суммы B_n ограничены в совокупности, а поскольку последовательность $\{a_n\}_1^{\infty}$ монотонна и ограничена, то она имеет предел. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - \alpha + \alpha) b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - \alpha) b_n + \alpha \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Первый ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (a_n - \alpha) b_n$ сходится по признаку Дирихле, а второй $\alpha \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ по условию.

б) Выведем признак Лейбница

Обозначим $a_n = u_n$, $b_n = (-1)^{n-1}$

Тогда последовательность $\{a_n\}_1^{\infty}$ монотонно стремится к нулю, а частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, попеременно равные 1 или 0, ограничены в совокупности. Следовательно, знакочередующийся ряд, удовлетворяющий условиям признака Лейбница, сходится по признаку Дирихле.

Глава Функциональные последовательности и ряды

Далее будем рассматривать последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ элементы которых $f_n(x)$ и $u_n(x)$ — некоторые функции одной переменной x.

Опр.) Множество X называется множеством сходимости последовательности $\{f_n(x)\}_1^{\infty}$ (ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$) если 1) для каждого $n \in N$ $f_n(x)$ (соответственно $u_n(x)$) определены на множестве X; 2) для $\forall x \in X$ сходится числовая последовательность $\{f_n(x)\}_1^{\infty}$ (сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$)

Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ можно определить множество абсолютной и условной сходимости.

Пусть множество X – множество сходимости функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_1^\infty$, то есть для $\forall x \in X$ существует $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Этот предел зависит от $x \in X$, поэтому обозначим его $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ функцию $f(x)$ называют предельной функцией последовательности $f_n(x)$

(Аналогично $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется суммой ряда)

§ Равномерная сходимость

Равномерная последовательность

Опр. Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_1^\infty$ сходится к функции $f(x)$ в $\forall$ точке $x \in X$ (или поточечно сходится к $f(x)$), если для $\forall x \in X$, для $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$: $\forall n > N_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Обозначение $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ для $\forall x \in X$

или $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ для $\forall x \in X$

Опр. Последовательность $\{f_n(x)\}_1^\infty$ называется равномерно сходящейся на множестве X к функции $f(x)$, если для $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n > N_0, \forall x \in X \Rightarrow$

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

Обозначение: $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на множестве X или $f_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} f(x)$, здесь $N_0(\varepsilon)$ не зависит от $x \in X$, то есть годится для всех $x \in X$ „сразу".

Поэтому если $\{f_n(x)\}_1^\infty$ равномерно сходится на множестве X к функции $f(x)$, то она сходится и поточечно, причём к той же функции $f(x)$.

Если понятие равномерной сходимости применить к последовательности $\{S_n(x)\}_1^\infty$ частичных сумм функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, то получится понятие равномерной сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$

Опр. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ равномерно сходится на множестве X к сумме $S(x)$ (обозначение: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x) \overset{X}{\rightrightarrows} S(x)$), если

для $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n > N_0(\varepsilon), \forall x \in X \Rightarrow$

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon \quad \left(\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)\right| < \varepsilon\right)$$

Примеры 1) $f_n(x) = x^n$, $x \in [0;1]$

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0;1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Возьмём $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$, $\forall N_0 \in \mathbb{N}$ $\exists n = N_0 + 1 > N_0$ и

$\exists\ x = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{n}} \in (0;1) \subset [0;1]$, но тогда

$$|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) = x^n = \frac{1}{2} = \varepsilon$$

Это означает, что $f_n(x) \overset{[0;1]}{\not\rightrightarrows} f(x)$

2) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}$, $x \in [0;1]$

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$ Тогда для $\forall N_0 \in \mathbb{N}$

$\exists n = N_0 + 1 > N_0$, $\exists\ x = \frac{1}{n} \in (0;1) \subset [0;1]$:

$$|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) = \frac{1}{1+nx} = \frac{1}{2} = \varepsilon$$

Это означает, что $f_n(x) \overset{[0;1]}{\not\rightrightarrows} f(x)$

3) $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}$, $x \in [0;1]$, $f_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} f(x) \equiv 0$ на $[0;1]$

Для $\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: $\forall n > N_0$ и $\forall x \in [0;1] \rightarrow$

$\rightarrow |f_n(x) - f(x)| = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{nx}{(1+n^2x^2)} = \dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{1}{\left(nx + \frac{1}{nx}\right)} \le \dfrac{1}{2n} < \varepsilon$

$\Rightarrow n > \dfrac{1}{2\varepsilon} \rightarrow N_0(\varepsilon) = \left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right] + 1 \Longrightarrow$

$$f_n(x) \overset{[0;1]}{\rightrightarrows} f(x) \equiv 0$$