

Лекция. Ряды

Лектор : Сандаков Евгений Борисович - доцент кафедры №30 Высшей математики «НИЯУ МИФИ»

Ряды. Лекция 9-ого октября 2020 года

β Преобразование Абеля. Признак Дирихле, Абеля.

Пусть даны числовые последовательности $\{a_n\}_1^\infty$ и $\{b_n\}_1^\infty$. Обозначим через B_k последовательность частичных сумм ряда $\sum_{k=1}^\infty b_n$: $B_1 = b_1, B_2 = b_1 + b_2, \dots,$

$$B_k = b_1 + b_2 + \dots + b_k. \text{ Следовательно,}$$
$$b_1 = B_1, b_2 = B_2 - B_1, \dots, b_k = B_k - B_{k-1} \quad (*)$$

Пусть заданы произвольные $m, n: m > n \geq 1$

Тогда из $(*)$ получим

$$\sum_{k=n+1}^m a_k b_k = a_{n+1} b_{n+1} + \dots + a_m b_m =$$

$$= a_{n+1} (B_{n+1} - B_n) + a_{n+2} (B_{n+2} - B_{n+1}) + \dots$$
$$+ \dots + a_m (B_m - B_{m-1}) \quad (**)$$

Раскрыв в этой равенстве скобки и перегруппировав, получим

$$\sum_{k=n+1}^m a_k b_k = -a_{n+1} B_n + (a_{n+1} - a_{n+2}) B_{n+1} + \dots$$

$$+ \dots + (a_{m-1} - a_m) B_{m-1} + a_m B_m =$$

$$= -a_{n+1} B_n + \sum_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) B_k + a_m B_m$$

То есть

$$\sum_{k=n+1}^m a_k v_k = a_m v_m - a_{n+1} v_n + \sum_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) v_k \quad (***)$$

Формула (***) называется преобразованием Абеля

Теорема (Признак Дирхле)

Если числовая последовательность $\{a_n\}_1^\infty$ монотонна и стремится к нулю, а частичные суммы B_k ряда $\sum_{n=1}^\infty b_n$ ограничены в совокупности, то есть $\exists M > 0$ такое, что для $\forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow |B_k| = |\sum_{n=1}^k b_n| \leq M$, то ряд $\sum_{n=1}^\infty a_n b_n$ сходится.

Док-во не ограничивая общности, можно считать, что $\{a_n\}_1^\infty$ монотонно не возрастает, то есть

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots \text{ и } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad (1)$$

Положим $a_n \geq 0$ и согласно определению предела, для $\forall \varepsilon > 0 \exists N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ такое, что $0 \leq a_n < \frac{\varepsilon}{3M}$, для $\forall n > N_0$. (2)

Далее выберем n и m такие, что $m > n > N_0$. Тогда из преобразования Абеля, из (1) и (2) следует, что

$$\left| \sum_{k=n+1}^m a_k v_k \right| \leq |a_m| |B_m| + |a_{n+1}| |B_n| + \left| \sum_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) v_k \right| <$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\varepsilon}{3M} \cdot M + \frac{\varepsilon}{3M} \cdot M + \sum_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) \cdot M = \\
 & = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + M(a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+2} - a_{n+3} + \dots + \\
 & + a_{m-1} - a_m) = \frac{2\varepsilon}{3} + M(a_{n+1} - a_m) \leq \\
 & \leq \frac{2\varepsilon}{3} + M \cdot a_{n+1} < \frac{2\varepsilon}{3} + M \cdot \frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon
 \end{aligned}$$

Это означает, что для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ выполняется критерий Коши. Следовательно ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится $\#$.

Теорема (Критерий Абеля).

Пусть числовая последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна и ограничена, то есть $\exists M > 0$ такое что для $\forall n \in \mathbb{N}$ выполняется условие $|a_n| \leq M$, и пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится.

Тогда ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится.

Док-во! Не ограничивая общности можно считать, что $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна не возрастает, то есть

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq \dots \quad \text{и} \quad |a_n| \leq M \quad (*)$$

Обозначим сумму сходящегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ через B , то есть $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$

-4-

Так как $B = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n$, где $B_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$
 То по определению предела
 где $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n > N_0 \Rightarrow$

$$|B_n - B| < \frac{\varepsilon}{4M} \quad (**)$$

Отметим, что предположение Абеля эквивалентно равенству

$$\sum_{k=n+1}^m a_k b_k = a_m (B_m - B) - a_{n+1} (B_n - B) +$$

$$+ \sum_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) (B_k - B) \quad (***)$$

(Оно проверяется непосредственно)

Далее пусть n и m таковы, что $m > n > N_0$. Тогда из (***) (***) и (*)
 следует, что

$$\left| \sum_{k=n+1}^m a_k b_k \right| \leq |a_m| \cdot |B_m - B| + |a_{n+1}| \cdot |B_n - B| +$$

$$+ \left| \sum_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) (B_k - B) \right| < M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{4M} +$$

$$+ \sum_{k=n+1}^{m-1} (a_k - a_{k+1}) \cdot \frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} +$$

$$+ \frac{\varepsilon}{4M} (a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+2} - a_{n+3} + \dots + a_{m-1} - a_m) =$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4M} (a_{n+1} - a_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4M} (|a_{n+1}| + |a_m|) <$$

$$\angle \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4M} \cdot 2M = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Это означает, что для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ выполняется критерий Коши. Следовательно ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится $\#$

Следствие Из признака Дирихле можно вывести признак Абеля и признак Лейбница.

а) Выведем признак Абеля.

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то его частичные суммы B_n ограничена в совокупности а поскольку последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ монотонна и ограничена, то она имеет предел. Пусть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = d$. Тогда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - d + d) b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n - d) b_n + d \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

Первый ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - d) b_n$ сходится по признаку Дирихле, а второй $d \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ по условию

б) Выведем признак Лейбница

Обозначим $a_n = u_n$, $b_n = (-1)^{n-1}$
Тогда последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ моно-

-6-

Точно сходимся к нулю, а частичные суммы ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ попеременно равные 1 или 0, обратными в совокупности. Следовательно, знакопеременный ряд, удовлетворяющий условиям признака Лейбница, сходится по признаку Дирихле.

Глава Функциональные последова-

тельности и ряды

Далее будем рассматривать последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ и ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ элементы которых $f_n(x)$ и $u_n(x)$ — некоторые функции одной переменной x .

Опр. Множество X называется множеством сходимости последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ (ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$) если 1) для каждого $n \in \mathbb{N}$ $f_n(x)$ (соответственно $u_n(x)$) определена на множестве X ; 2) для $\forall x \in X$ сходится числовая последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ (сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$)

Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ можно определить множество абсолютной и условной

сходимости.

Пусть множество X — множество сходимости функциональной последовательности $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, то есть для $\forall x \in X$ существует $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Этот предел зависит от $x \in X$, поэтому обозначим его $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$. Функцию $f(x)$ называют предельной функцией последовательности $f_n(x)$ (Аксиомы $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называются суммой ряда)

β Равномерная сходимость

Опр Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к функции $f(x)$ в \forall точке $x \in X$ (или поочередно сходится к $f(x)$), если для $\forall x \in X$, для $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$: $\forall n > N_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.
 Обозначение $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ для $\forall x \in X$
 или $f_n(x) \rightarrow f(x)$ для $\forall x \in X$

Опр Последовательность $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ называется равномерно сходящейся на множестве X к функции $f(x)$, если

-8-

для $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n > N_0, \forall x \in X \Rightarrow$
 $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$

Обозначение: $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$ на множестве X
или $f_n(x) \xrightarrow{X} f(x)$, здесь $N_0(\varepsilon)$ не зависит
от $x \in X$, то есть подходит для всех

$x \in X$ "сразу".
Поэтому если $\{f_n(x)\}_1^\infty$ равномерно сходится
на множестве X к функции $f(x)$, то она
сходится и поточечно, причем к той же
функции $f(x)$.

Если понятие равномерной сходимости
применить к последовательности
 $\{S_n(x)\}_1^\infty$ частичных сумм функциональ-
ного ряда $\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$, то получится понятие
равномерной сходимости функциональ-
ного ряда $\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$.

Опр) Ряд $\sum_{n=1}^\infty u_n(x)$ равномерно сходится
на множестве X к сумме $S(x)$

(обозначение: $\sum_{n=1}^\infty u_n(x) \xrightarrow{X} S(x)$), если

для $\forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n > N_0, \forall x \in X \Rightarrow$

$$|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon \quad \left(\left| \sum_{k=n+1}^\infty u_k(x) \right| < \varepsilon \right)$$

Пример 1) $f_n(x) = x^n, x \in [0; 1]$

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0; 1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0, \forall N_0 \in \mathbb{N} \exists n = N_0 + 1 > N_0$ и

$$\exists x = \left(\frac{1}{2}\right)^n \in (0; 1) \subset [0; 1], \text{ но тогда}$$

$$|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) = x^n = \frac{1}{2} = \varepsilon$$

это означает, что $f_n(x) \not\xrightarrow{[0; 1]} f(x)$

2) $f_n(x) = \frac{1}{1+nx}, x \in [0; 1]$

$$f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$$

Возьмем $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$ тогда для $\forall N_0 \in \mathbb{N}$

$$\exists n = N_0 + 1 > N_0, \exists x = \frac{1}{n} \in (0; 1) \subset [0; 1]:$$

$$|f_n(x) - f(x)| = f_n(x) = \frac{1}{1+nx} = \frac{1}{2} = \varepsilon$$

это означает, что $f_n(x) \not\xrightarrow{[0; 1]} f(x)$

3) $f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}, x \in [0; 1], f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(x) \equiv 0$
на $[0; 1]$

Для $\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n > N_0$ и $\forall x \in [0; 1] \rightarrow$

$$\rightarrow |f_n(x) - f(x)| = \frac{1 \cdot nx}{n(1+n^2x^2)} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\left(nx + \frac{1}{nx}\right)} \leq \frac{1}{2n} \leq \varepsilon$$

$$\Rightarrow n > \frac{1}{2\varepsilon} \rightarrow N_0(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{2\varepsilon} \right\rceil + 1 \Rightarrow$$

$$f_n(x) \xrightarrow{[0; 1]} f(x) \equiv 0$$