МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

I. СВЕДЕНИЕ К АЛГЕБРАИЧЕСКОМУ.

Пример:

$$3-\cos^2 x-3\sin x=0$$

$$3-(1-\sin^2 x)-3\sin x=0$$

$$3-1+\sin^2 x-3\sin x=0$$

Пусть $\sin x=a, |a|\le 1$.

Уравнение примет вид:

$$a^2-3a+2=0$$

$$D=9-8=1$$

$a_1=\frac{3+1}{2}=2$ - не удовлетворяет условию $|a|\le 1$

$a_2=\frac{3-1}{2}=1$

$\sin x=1$

$x=\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in \mathbb{Z}$

Ответ: $\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in \mathbb{Z}$

II. ОДНОРОДНЫЕ И СВОДИМЫЕ К НИМ.

Уравнение вида

$$a\sin x + b\cos x = 0$$

называется однородным уравнением I степени.

Пример:

$$\sin x - \cos x = 0$$

Множество значений x, удовлетворяющих уравнению

$\cos x = 0$, не является решением данного уравнения. Поэтому можно обе части уравнения разделить на . $\cos x \neq 0$

Получим:

$$tgx - 1 = 0$$

$$tgx = 1$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in ⌧$$

Ответ: .

$$\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in ⌧$$

Уравнение вида

$$a\sin^2 x + b\sin x\cos x + c\cos^2 x = 0$$

называется однородным уравнением II степени.

Пример:

$$2\sin^2 x + 3\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$$

Решение:

Множество значений x, удовлетворяющих уравнению $\cos x = 0$, не является решением данного уравнения.

Разделим обе части уравнения на $\cos^2 x \neq 0$.

Получим:

$$2tg^2 x + 3tgx + 1 = 0$$

Пусть $a = tgx$;

Уравнение примет вид:

$$2a^2 + 3a + 1 = 0$$

$$D = 9 - 8 = 1$$

$$a_1 = \frac{-3+1}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$tgx = -\frac{1}{2}$$

$$x = -arctg\frac{1}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$a_2 = \frac{-3-1}{4} = -1$$

$$tgx = -1$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $-arctg\frac{1}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; $-\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

III. ЕСЛИ В УРАВНЕНИИ СОДЕРЖИТСЯ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ФУНКЦИЙ *SIN(AX)SIN(BX)*, *SIN(AX)COS(BX)*, *COS(AX)COS(BX)*, ТО ТАКИЕ УРАВНЕНИЯ РЕШАЮТСЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ПРОИЗВЕДЕНИЯ В СУММУ (РАЗНОСТЬ) И НАОБОРОТ.

При этом применяют тождества:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$$

Пример 1.

$$\cos 3x \cos x = \cos 5x \cos 7x$$

$$\frac{1}{2}\left(\cos 4x + \cos 2x\right) = \frac{1}{2}\left(\cos 2x + \cos 12x\right)$$

$$\cos 4x - \cos 12x = 0$$

$$2\sin 8x \sin 4x = 0$$

$$\sin 8x = 0$$

или

$$\sin 4x = 0$$

$$8x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi n}{8}, n \in \mathbb{Z}$$

$$4x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = \dfrac{\pi n}{8}, n \in \mathbb{Z}$.

Пример 2.

$$\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x = 0$$

$$2\sin 2x \cos x + 2\sin 6x \cos x = 0$$

$$2\cos x(\sin 2x + \sin 6x) = 0$$

$$2 \cdot 2\cos x \sin 4x \cos^2 x = 0$$

$$\cos x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin 4x = 0$$

$$4x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos 2x = 0$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}, m \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad \frac{\pi k}{4}, k \in \mathbb{Z}; \quad \frac{\pi}{4} + \frac{\pi m}{2}, m \in \mathbb{Z}.$

IV. ПОНИЖЕНИЕ СТЕПЕНИ.

Если в уравнении содержатся чётные степени *sinx* и *cosx*, то понижают степень уравнения с применением понижающих формул:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos^2 x}{2}$$

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

Пример.

$$\sin^2 x + \sin^2 5x = \cos^2 2x + \cos^2 4x$$

$$\frac{1-\cos 2x}{2} + \frac{1-\cos 10x}{2} = \frac{1+\cos 4x}{2} + \frac{1+\cos 8x}{2}$$

$$\cos 2x + \cos 4x + \cos 8x + \cos 10x = 0$$

$$2\cos 3x \cos x + 2\cos 9x \cos x = 0$$

$$2\cos(\cos 3x + \cos 9x) = 0$$

$$4\cos x \cdot \cos 6x \cdot \cos 3x = 0$$

$$\cos x = 0 \qquad \cos 6x = 0 \qquad \cos 3x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \qquad 6x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z} \qquad 3x = \frac{\pi}{2} + \pi m, m \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{6}, k \in \mathbb{Z} \qquad x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi m}{2}, m \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{6}, k \in \mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi m}{2}, m \in \mathbb{Z}$.

V. РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖИТЕЛИ.

ПРИМЕР.

$$4\cos x \cdot \sin x + 2\cos x + 2\sin x + 1 = 0$$

$$2\cos x(2\sin x + 1) + (2\sin x + 1) = 0$$

$$(2\sin x + 1)(2\cos x + 1) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin x = -\dfrac{1}{2} \\ \cos x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

VI. ВВЕДЕНИЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНОГО АРГУМЕНТА.

Пример

$$\sin x + \cos x = 1$$

Решение:

Разделим обе части уравнения на $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

Получаем:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\frac{\pi}{4}\sin x + \cos\frac{\pi}{4}\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos(x - \frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x - \frac{\pi}{4} = \pm\arccos\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x - \frac{\pi}{4} = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n + \frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n + \frac{\pi}{4}, n \in \mathbb{Z}$

VII. ПРИМЕНЕНИЕ УНИВЕРСАЛЬНОЙ ПОДСТАНОВКИ.

УНИВЕРСАЛЬНАЯ ПОДСТАНОВКА:

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} \qquad \cos x = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}}$$

Пример

$$2\cos 2x + 2tg^2 x = 5$$

Решение:

$$2 \cdot \frac{1 - tg^2 x}{1 + tg^2 x} + 2tg^2 x = 5$$

Пусть: $tg^2 x = a, a \geq 0$. Уравнение примет вид $2 \cdot \frac{1-a}{1+a} + 2a - 5 = 0$. О.Д.З. $a \neq -1$

$$2(a-1) + 2a(1+a) - 5(1+a) = 0$$

$$2 - 2a + 2a + 2a^2 - 5 - 5a = 0$$

$$2a^2 - 5a - 3 = 0$$

$$D = 25 + 24 = 49$$

$a_1 = \frac{5+7}{4} = 3$ $\quad a_2 = \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2}$ не удовлетворяет условию $a \geq 0$

$$tg^2 x = 3$$

$tgx = \sqrt{3}$ или $tgx = -\sqrt{3}$

$x = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \epsilon Z$ $\quad x = -\frac{\pi}{3} + \pi k, k \epsilon Z$

Ответ: $\frac{\pi}{3} + \pi n, n \epsilon Z \quad -\frac{\pi}{3} + \pi k, k \epsilon Z$

Пример 2:

$$\sin x + \sqrt{3}\cos x + \sqrt{3} = 0$$

Решение:

$$\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} + \sqrt{3}\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} + \sqrt{3} = 0$$

Проверка:

$$x = \pi + 2\pi k$$

$0 - \sqrt{3} + \sqrt{3} = 0$ - верно

$$2tg\frac{x}{2} + \sqrt{3} - \sqrt{3}tg^2\frac{x}{2} + \sqrt{3} + \sqrt{3}tg^2\frac{x}{2} = 0$$

$$tg\frac{x}{2} = -\sqrt{3}$$

$$\frac{x}{2} = -\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};\quad \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

VIII. ВВЕДЕНИЕ НОВОГО ПЕРЕМЕННОГО.

! Если в уравнении содержится сумма или разность *sinx* и *cosx* и их произведения, то уравнение решается введением нового переменного:

$$\begin{cases} \sin x + \cos x = t \\ \sin x \cdot \cos x = \dfrac{t^2 - 1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x - \cos x = t \\ \sin x \cdot \cos x = \dfrac{1 - t^2}{2} \end{cases}$$

Пример:

$$\sin 2x + \cos x + \sin x - 1 = 0$$

$$2\sin x \cos x + \cos x + \sin x - 1 = 0$$

Пусть: $$\begin{cases} \sin x + \cos x = t \\ \sin x \cdot \cos x = \dfrac{t^2 - 1}{2} \end{cases}$$

$$t^2 - 1 + t - 1 = 0$$

$$t^2 + t - 2 = 0$$

$$t_1 = 1 \qquad t_2 = -2$$

$$\sin x + \cos x = 1 \qquad 2 \quad x + \qquad x = -$$

(Решите самостоятельно) $\varnothing$

IX. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ПОНЯТИЯ ОГРАНИЧЕННОСТИ (МИНИМАКС).

Пример:

$$\cos 3x + \cos\frac{5x}{2} = 2$$

$$\begin{cases} \cos 3x = 1 \\ \cos\frac{5}{2} = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x = 2\pi k \\ \frac{5}{2}x = 2\pi n \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{2\pi k}{3} \\ x = \frac{4\pi n}{5} \end{cases} \Rightarrow k \text{ – целое} \Rightarrow \frac{2\pi k}{3} \Rightarrow \frac{4\pi n}{5}$$

$$\frac{k}{3} = \frac{2n}{5} \qquad k = \frac{6n}{5} \qquad n = 5t$$

$$x = \frac{4\pi}{5}\cdot 5t = 4\pi t, t \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $x = 4\pi t, t \in \mathbb{Z}$

Домашнее задание

472. $\sin^2 x - 3 = 2\sin x$.

473. $\sin x = 1 - 2\sin^2 x$.

474. $\operatorname{tg}^3 x = \operatorname{tg} x$.

475. $2\cos^2 x = 3\sin x + 2$.

476. $2\operatorname{tg} x + 3\operatorname{ctg} x = 5$.

477. $2\sin^2 x = 3\cos x$.

478. $3\sin^2 x = \cos^2 x$.

479. $3\sin^2 x + 4\cos^2 x = 13\cos x \sin x$.

480. $3\sin x\cos x + 4\cos^2 x = 0$.

481. $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$.

482. $\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$.

483. $\cos 2x \cos x = \sin 2x \sin x$.

484. $\sin\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + 2\cos(2\pi - x) = 0$.

485. $\sin(x - 90^\circ) + \sin(x - 180^\circ) = 0$.