УФИМСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ НЕФТЯНОЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ОПОРНЫЙ ВУЗ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

Механические колебания. Маятники.

Лекция 3

Ст. преп., к. ф.-м. н. Бачурина Ольга Владимировна

Темы для СРС:

- Пружинный маятник. Затухающие колебания. Характеристики затухающих колебаний.
- Вынужденные колебания.

  Амплитуда и фаза колебаний. Резонанс.

1. Колебания. Основные понятия

Периодическим колебанием называется процесс, при котором система (например, механическая) возвращается в одно и то же состояние через определенный промежуток времени. Этот промежуток времени называется периодом колебаний.

Возвращающая сила - сила, под действием которой происходит колебательный процесс. Эта сила стремится тело или материальную точку, отклоненную от положения покоя, вернуть в исходное положение.

В зависимости от характера воздействия на колеблющееся тело различают свободные (или собственные) колебания и вынужденные колебания.

Свободные колебания имеют место тогда, когда на колеблющееся тело действует только возвращающая сила. В том случае, если не происходит рассеивания энергии, свободные колебания являются незатухающими. Однако, реальные колебательные процессы являются затухающими, т.к. на колеблющееся тело действуют силы сопротивления движению (в основном силы трения).

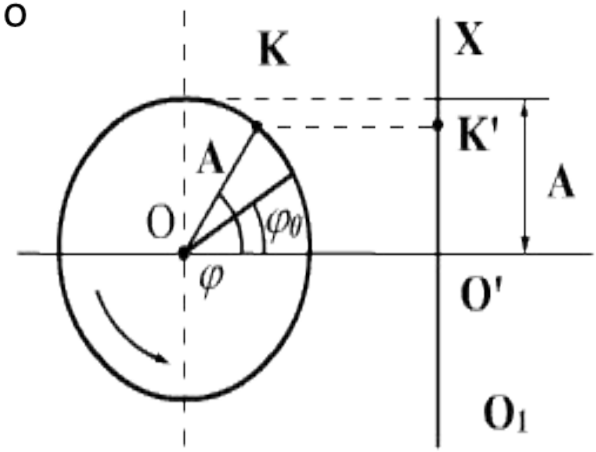
Вынужденные колебания совершаются под действием внешней периодически изменяющейся силы, которую называют вынуждающей. Во многих случаях системы совершают колебания, которые можно считать гармоническими.

1.1 Гармонические колебания

- *Гармоническими колебаниями* называют такие колебательные движения, при которых смещение тела от положения равновесия совершается по закону синуса или косинуса:

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0),\ x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

- Для иллюстрации физического смысла A, ω, φ_0 рассмотрим окружность, и будем вращать радиус ОК с угловой скоростью ω против часовой стрелки. Если в начальный момент времени ОК лежал в горизонтальной плоскости, то через время t он сместится на угол ωt. Если начальный угол отличен от нуля и равен φ_0, тогда угол поворота будет равен $\varphi = \omega t + \varphi_0$. Проекция $O'K'$на ось XO_1 равна $A\sin(\omega t + \varphi_0) = O'K'$. По мере вращения радиуса ОК изменяется величина проекции, и точка K'будет совершать колебания относительно точки O'- вверх, вниз и т.д. При этом максимальное значение x равно A и называется амплитудой колебаний; ω – круговая или циклическая частота; $\omega t + \varphi_0$- фаза колебаний; φ_0 – начальная фаза. За один оборот точки K по окружности ее проекция совершит одно полное колебание и вернется в исходную точку.



1.1 Гармонические колебания

- *Периодом T* называется время одного полного колебания. По истечению времени *T* повторяются значения всех физических величин, характеризующих колебания. За один период колеблющаяся точка проходит путь, численно равный четырем амплитудам.
- *Угловая скорость* определяется из условия, что за период *T* радиус *ОК* сделает один оборот, т.е. повернется на угол 2π радиан: $\omega = 2\pi/T$.
- В случае упругих колебаний возвращающая сила *F = -kx*. Если нет других сил, кроме упругой силы, то колебания называют свободными. Согласно второму закону Ньютона: $m\vec{a} = \sum_{i=0}^{n}\overrightarrow{F_i}$, $ma = -kx$ или $m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$

Разделим оба слагаемых на *m*: $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$, обозначим: $\omega^2 = k/m$. Тогда:

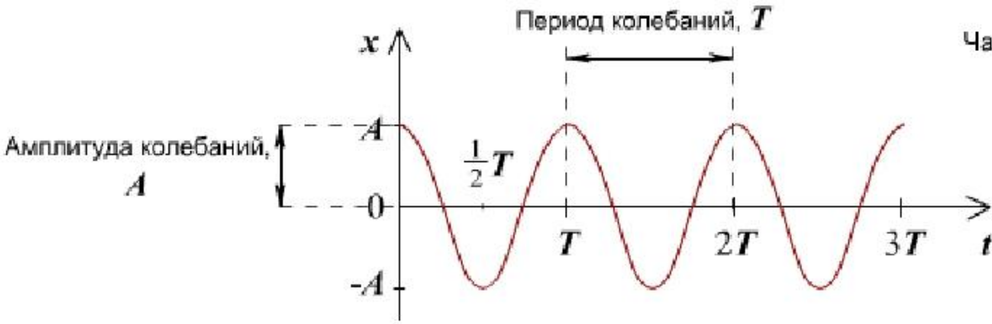
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Последнее соотношение носит название **основного уравнения гармонических свободных колебаний**. Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0).$$

1.1 Гармонические колебания

Гармонические колебания –
колебания, при которых изменения физических величин происходят по закону косинуса или синуса



Частота колебаний

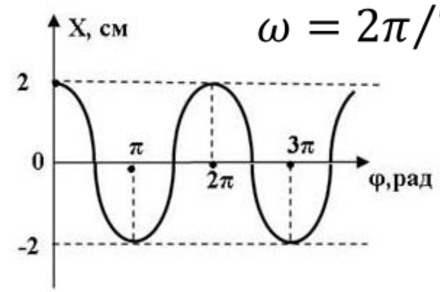
$$\nu = \frac{1}{T}$$

Фаза колебаний

$$\varphi = \omega t + \varphi_0$$

Циклическая частота

$$\omega = 2\pi / T .$$



$$x = A\sin(\omega t + \varphi_0) = A\sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right)$$

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi_0\right)$$

1.2 Скорость и ускорение колебаний

- ***Скорость*** колеблющегося тела находится как первая производная смещения $x = A\sin(\omega t + \varphi_0)$.

по времени *t*:

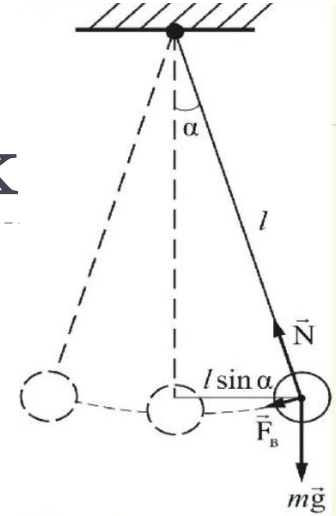
$$\mathrm{v} = \frac{dx}{dt} = -A\omega_0 \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = A\omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right),$$

а ***ускорение*** — как вторая производная смещения по времени:

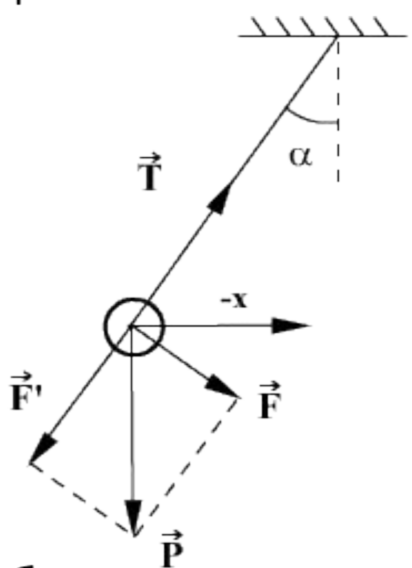
$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\mathrm{v}}{dt} = -A\omega_o^2 \cdot \cos(\omega_o t + \varphi_o) =$$

$$= A\omega_o^2 \cos(\omega_o t + \varphi_o + \pi) = -\omega_o^2 x.$$

1.3 Математический маятник



- **Математический маятник** - материальная точка, подвешенная на нерастяжимой невесомой нити, совершающая колебательное движение в одной вертикальной плоскости под действием силы тяжести.
- Таким маятником *можно считать тяжелый шар массой m, подвешенный на тонкой нити, длина l которой намного больше размеров шара*.
- Если его отклонить на угол α (рис.) от вертикальной линии, то под влиянием силы $\vec{F}$– одной из составляющих веса $\vec{P}$ он будет совершать колебания. Другая составляющая $\overrightarrow{F'}$, направленная вдоль нити, не учитывается, т.к. уравновешивается силой натяжения нити. При малых углах смещения $\sin\alpha \approx \alpha$ и, тогда координату *x* можно отсчитывать по горизонтальному направлению. Из рис. видно, что составляющая веса, перпендикулярная нити, равна $F = -mg\sin\alpha$
- Знак минус в правой части означает то, что сила $\vec{F}$ направлена в сторону уменьшения угла α. С учетом малости угла α : $F = -mg\alpha$



- **Если период колебаний не зависит от амплитуды, то такие колебания называются изохронными**

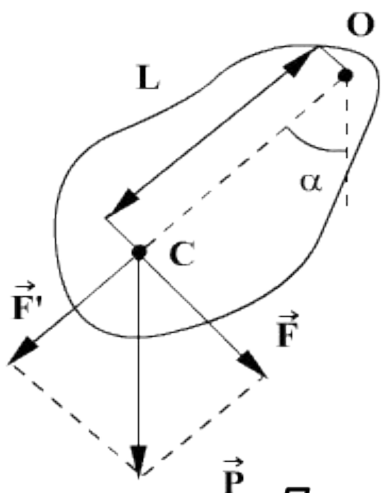
1.3 Вывод закона движения математического маятника

- Используем основное уравнение динамики вращательного движения:

$$M = J\varepsilon$$

- Момент силы относительно точки *O*: $M = lF$
- Момент инерции *J* в данном случае $J=ml^2$
- Угловое ускорение: $\varepsilon = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$.
- С учетом этих величин имеем: $-mg\alpha * l = ml^2\frac{d^2\alpha}{dt^2}$ или $\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l}\alpha = 0$
- Его решение $\alpha = A\sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \varphi_0\right)$ где $\omega = \sqrt{g/l}$, $T = 2\pi\sqrt{l/g}$
- **Период колебаний математического маятника зависит от его длины и ускорения силы тяжести и не зависит от амплитуды колебаний**

1.4. Физический маятник



Физический маятник - твердое тело, закрепленное на неподвижной горизонтальной оси (оси подвеса), не проходящей через центр тяжести, и совершающее колебания относительно этой оси под действием силы тяжести. В отличие от математического маятника массу такого тела нельзя считать точечной.

При небольших углах отклонения α физический маятник так же совершает гармонические колебания. Будем считать, что вес физического маятника приложен к его центру тяжести в точке *C*. Силой, которая возвращает маятник в положение равновесия, в данном случае будет составляющая силы тяжести – сила $\vec{F}$:

$$F = -mg\sin\alpha$$

знак минус в правой части означает то, что сила $\vec{F}$ направлена в сторону уменьшения угла α. С учетом малости угла α: $F = -mg\alpha$

1.4 Вывод закона движения физического маятника

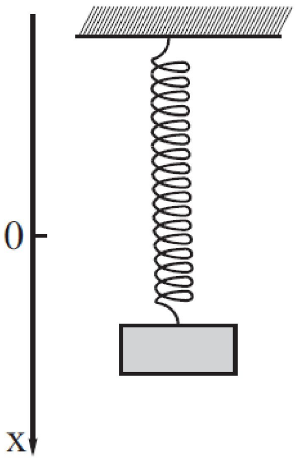
- Используем основное уравнение динамики вращательного движения: $M = J\varepsilon$
  - Момент силы определить в явном виде нельзя. С учетом всех величин, входящих в исходное дифференциальное уравнение колебаний физического маятника имеет вид: $\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mgL}{I}\alpha = 0$
- Обозначим: $\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}}$ – циклическая частота колебаний маятника;
- $\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega^2\alpha = 0$
- $\omega = 2\pi/T$, тогда: $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}}$ (т.к. ω =2π/T)
- Решение этого уравнения $\alpha = A\sin\left(\sqrt{\frac{mgL}{I}}t + \varphi_0\right)$.
  - Определим длину l математического маятника, при которой период его колебаний равен периоду колебаний физического маятника, т.е. $T_{\text{мат}} = T_{\text{физ}}$ или $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}}$
- Из этого соотношения определяем: $l = \frac{I}{mL}$. Данная формула определяет **приведенную длину физического маятника**, т.е. длину такого математического маятника, период колебаний которого равен периоду колебаний данного физического маятника

- **Определение**. Центр качения – математическая точка, в которой можно сосредоточить всю массу физического маятника, при этом его период не изменится.
- **Следствия**:

1) Точка подвеса и центр качения лежат по разные стороны от центра масс.

2) всем точкам подвеса, одинаково удаленным от центра масс маятника, соответствует одна и та же приведенная длина, и соответственно, один и тоже период колебаний.

2.1 Пружинный маятник. Затухающие колебания



- Уравнение движения тела с учетом силы тяжести:

$$m\ddot{x} = -kx + mg$$

- Период колебаний: $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$.
- Энергия колеблющегося тела: $E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2}$

2.1 Дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний

- *линейной системы* задается в виде: $\frac{d^2 s}{dt^2} + 2\delta \frac{ds}{dt} + \omega_0^2 s = 0$ (1)

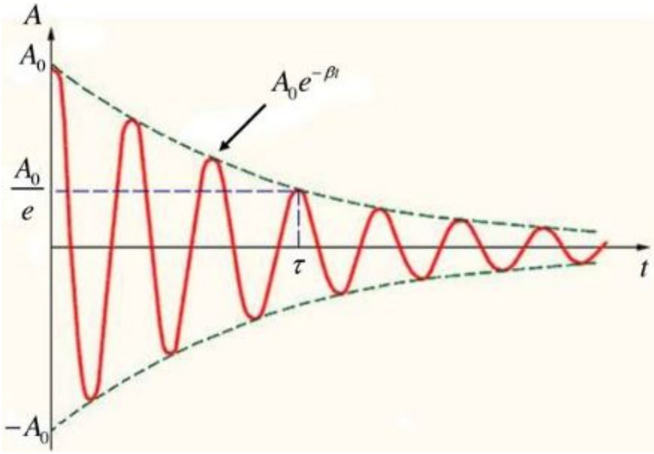
где *s* – колеблющаяся величина, описывающая тот или иной физический процесс, δ = const – **коэффициент затухания,** ω_0 – циклическая частота свободных *незатухающих* колебаний той же колебательной системы, т.е. при (при $\delta = 0$ отсутствии потерь энергии) называется **собственной частотой** колебательной системы

- Решение уравнения рассмотрим в виде: $s = e^{-\delta t} u$, где *u = u(t).* После нахождения первой и второй производных выражения и подстановки их в (1) получим $\ddot{u} + (\omega_0^2 - \delta^2) u = 0$
- Решение этого уравнения зависит от знака коэффициента перед искомой величиной. *Рассмотрим случай, когда этот коэффициент положителен*:
- $\omega^2 = \omega_0^2 - \delta^2$ Тогда получим уравнение $\ddot{u} + \omega^2 u = 0$
- Решением его является функция $u = A_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$
- Таким образом, решение уравнения (1) в случае малых затуханий есть

$$s = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$$

где $A = A_0 e^{-\delta t}$ **– амплитуда затухающих колебаний,** A_0 - начальная амплитуда

2.2 Характеристики затухающих колебаний



- **Время релаксации** – Промежуток $\tau = 1/\delta$ времени , в течение которого амплитуда затухающих колебаний уменьшается в *e* раз
- если затухание мало, то $T = 2\pi/\omega = 2\pi/\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$
- Если *A(t)* и *A(t+T)* – амплитуды двух последовательных колебаний, соответствующих моментам времени, отличающимся на период, то отношение

$$\frac{A(t)}{A(t+T)} = e^{\delta T}$$

называется **декрементом затухания,** а его логарифм $\theta = \ln\frac{A(t)}{A(t+T)} = \delta T = \frac{T}{\tau} = \frac{1}{N}$ *логарифмическим декрементом затухания***;**
N – число колебаний, совершаемых за время уменьшения амплитуды в ***e*** раз.

- Логарифмический декремент затухания – постоянная величина для данной колебательной системы

Добротность Q, при малых значениях логарифмического декремента равна

$$Q = \frac{\pi}{\theta} = \pi N = \frac{\pi}{\delta T_0} = \frac{\omega_0}{2\delta}$$

добротность пропорциональна числу колебаний N, совершаемых системой за время релаксации

2.3 Пример (пружинный маятник)

- Для пружинного маятника массой *m*, совершающего малые колебания под действием упругой силы *F=-kx*, сила трения пропорциональна скорости, т.е. $F_{mp} = -rv = -r\dot{x}$, где r **– коэффициент сопротивления;** знак минус указывает на противоположные направления силы трения и скорости
- При данных условиях закон движения маятника будет иметь вид $m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}$
- Используя $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ и принимая, что коэффициент затухания $\delta = \frac{r}{2m}$
- Получим дифференциальное уравнение затухающих колебаний маятника:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0 x = 0.$$

- маятник колеблется по закону $x = A_0 e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi_0)$
- с частотой $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{r^2}{4m^2}}$
- Добротность пружинного маятника $Q = \frac{1}{r}\sqrt{km}$
- При увеличении коэффициента затухания δ период затухающих колебаний растет и при $\delta = \omega_0$ обращается в бесконечность, т.е. движение перестает быть периодическим.
- В данном случае колеблющаяся величина асимптотически приближается к нулю, когда $t \to \infty$. Процесс не будет колебательным. Он называется **апериодическим**

3.1 Вынужденные колебания

- Чтобы в реальной механической колебательной системе получить незатухающие колебания, надо компенсировать потери энергии. Такая компенсация возможна с помощью периодически действующей вынуждающей силы, изменяющейся по гармоническому закону: $F = F_0 \cos \omega t$
- С учетом силы закон движения для пружинного маятника запишется в виде $m\ddot{x} = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \omega t$
- Используя соответствующие обозначения, придем к уравнению

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x + \frac{F_0}{m} \cos \omega t = 0.$$

- ***Колебания, возникающие под действием внешней периодически изменяющейся силы, называются вынужденными механическими колебаниями***

3.1 Вынужденные колеба

- Решение уравнения вынужденных механических Колебаний равно сумме общего решения однородного уравнения $m\ddot{x} = -kx - r\dot{x}$ и частного решения неоднородного уравнения Частное решение найдем в комплексной форме. Заменим правую часть уравнения на комплексную величину $F_0 e^{i\omega t}$: $\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}$. (1)
- Частное решение этого уравнения будем искать в виде $x = x_0 e^{i\eta t}$.
- Найдем производные для x : $\dot{x} = x_0 i\eta e^{i\eta t}$, $\ddot{x} = -x_0\eta^2 e^{i\eta t}$
- Подставляя выражение для и его производных в уравнение (1), получим

$$x_0 e^{i\eta t}(-\eta^2 + 2i\delta\eta + \omega_0^2) = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t}. \quad (2)$$

- Так как это равенство должно быть справедливым для всех моментов времени, то время *t* из него должно исключаться. Отсюда следует, что $\eta = \omega$
- Тогда (2) имеет вид : $x_0(-\eta^2 + 2i\delta\eta + \omega_0^2) = \frac{F_0}{m}$. Найдем отсюда величину x_0
- $x_0 == \frac{F_0}{m(-\omega^2 + 2i\delta\omega + \omega_0^2)}$. Оно имеет вид $x_0 = \frac{F_0[(\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\delta\omega]}{m[(-\omega^2 + \omega_0^2)^2 + 4\delta^2\omega^2]}$.

3.1 Вынужденные колеба

- Это комплексное число удобно представить в экспоненциальной форме: $x_0 = Ae^{-i\varphi}$, где $A = \dfrac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$ (3)

и $\varphi = arctg\dfrac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ (4)

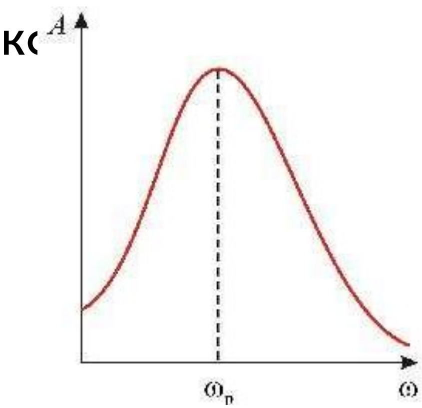
- Следовательно, решение уравнения (2) в комплексной форме примет вид: $x = Ae^{i(\omega t - \varphi)}$.
- Его вещественная часть равна $x = A\cos(\omega t - \varphi)$ где A и ϕ задаются соответственно формулами (3), (4).
- Таким образом, частное решение неоднородного уравнения (1) имеет вид
- $$x = \frac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2}}\cos(\omega t - arctg\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}) \quad (5)$$

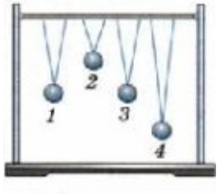
Решение уравнения (1) равно сумме общего решения однородного уравнения $x_1 = A_0 e^{-\delta t}\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ (6) и частного решения (5).

Слагаемое (6) играет существенную роль только в начальной стадии процесса (при установлении колебаний) до тех пор, пока амплитуда вынужденных колебаний не достигнет значения, определяемого равенством (3). Следовательно, в установившемся режиме вынужденные колебания происходят с частотой ω и являются гармоническими; амплитуда и фаза колебаний, определяемые выражениями (3) и (4) также зависят от ω

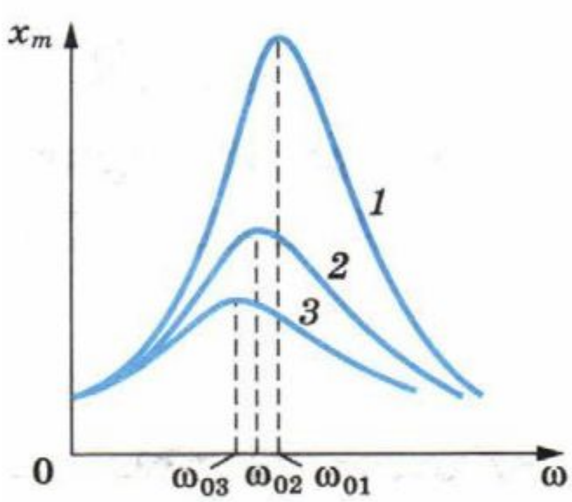
3.2 Амплитуда и фаза вынужденных колебаний.

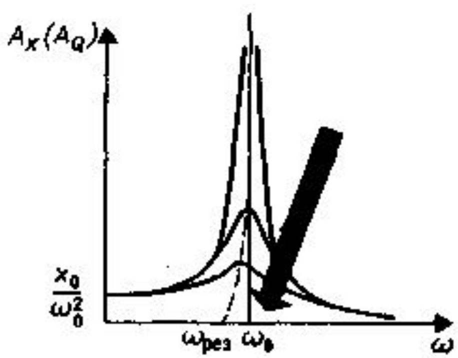
- Рассмотрим зависимость ***амплитуды*** *А* вынужденных колебаний от ***частоты*** ω
- Из $A=\dfrac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+4\delta^2\omega^2}}$ следует, что амплитуда *А* смещения имеет максимум.
- *Резонансная частота* $\omega_{рез}$ - частота, при которой амплитуда *А* смещения достигает максимума
- Для ее нахождения нужно найти максимум функции(минимум подкоренного выражения)
- Продифференцировав подкоренное выражение по ω и приравняв нулю, получим условие $-4(\omega_0^2-\omega^2)\omega+8\delta^2\omega=0$:
- Это равенство выполняется при $\omega=0$ и $\omega=\pm\sqrt{\omega_0^2-2\delta^2}$,у ко
лишь положительное значение имеет физический смысл
- Следовательно, резонансная частота $\omega_{рез}=\sqrt{\omega_0^2-2\delta^2}$





3.2 Резонанс





зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты при различных значениях δ

- **Резонанс** механический **-** явление резкого возрастания амплитуды вынужденных колебаний при приближении частоты вынуждающей силы к частоте $\omega_{рез}$
- $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}$ (1) при $\delta^2 << \omega_0^2$ значение $\omega_{рез}$ совпадает с собственной частотой ω_0
- Подставим (1) в $A = \dfrac{F_0}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2}}$ $A = \dfrac{F_0}{m\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$
- чем меньше δ тем выше и правее лежит максимум данной кривой
- Если $\omega \to 0$, то все кривые приходят к одному и тому же, отличному от нуля, предельному значению $\dfrac{F_0}{m\omega_0^2}$ **- статическому отклонению**
- Если $\omega \to \infty$, то все кривые асимптотически стремятся к нулю и называется **резонансными кривыми**

3.2 Резонанс. Амплитуда скорости

- Из $A = \dfrac{F_0}{m\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}}$ вытекает, что при малом затухании $\delta^2 << \omega_0^2$ резонансная амплитуда смещения

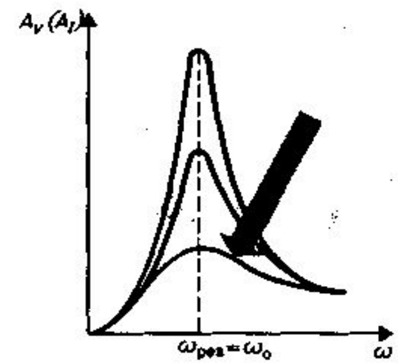
$$A_{рез} = \frac{F_0}{2m\delta\omega_0} = \frac{\omega_0}{2\delta}\frac{F_0}{m\omega_0^2} = Q\frac{F_0}{m\omega_0^2}$$

где Q – добротность колебательной системы

$\dfrac{F_0}{m\omega_0^2}$ - статическое отклонение

- добротность Q характеризует резонансные свойства колебательной системы: чем больше Q, тем больше $A_{рез}$
- Амплитуда скорости $\omega A = \dfrac{F_0\omega}{m\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + 4\delta^2\omega^2}} = \dfrac{F_0}{m\sqrt{\dfrac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{\omega^2} + 4\delta^2}}$

  максимальна при $\omega_{рез} = \omega_0$
- И равна $\dfrac{F_0}{2m\delta}$ т.е. **чем больше коэффициент затухания, тем ниже максимум резонансной кривой**
- Из выражения $\varphi = arctg\dfrac{2\delta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$ следует, что если затухание в систе[ме] отсутствует, то только в этом случае колебания и вынуждающая сила имеют одинаковые фазы

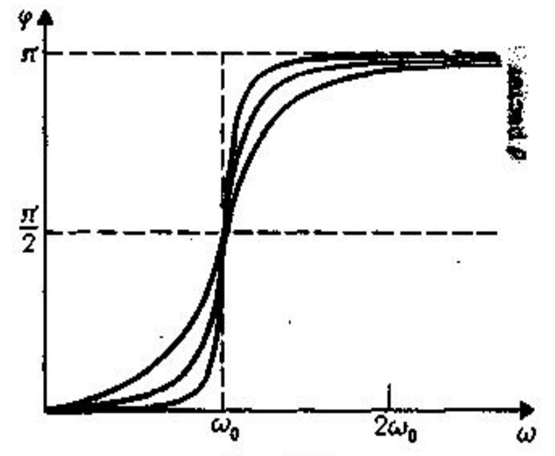


резонансные кривые для амплитуды скорости

3.2 Резонанс.

- Зависимость φ от ω при разных коэффициентах δ ⟹
- при изменении ω изменяется и сдвиг фаз φ
- Из $\varphi = arctg\frac{2\delta\omega}{\omega_0^2-\omega^2}$ вытекает, что при ω ⟹ 0 φ=0

при ω_0=0 независимо от значения коэффициента затуха-ния $\delta\varphi=\pi/2$ **т.е. сила опережает по фазе колебан π/2**



- При дальнейшем увеличении ω сдвиг фаз возрастает и при $\omega >> \omega_0$ $\varphi \to \pi$

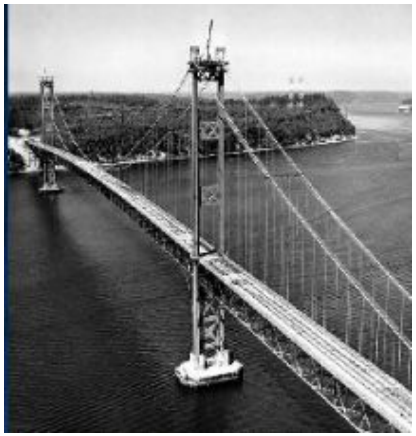
т.е. фаза колебаний почти противоположна фазе внешней силы.

- Семейство кривых, изображенных на рис., **называется фазовыми резонансными кривыми**

3.3 Применение резонанса.

- Явления резонанса могут быть как вредными, так и полезными
- При конструировании машин и различного рода сооружений необходимо, чтобы собственная частота их колебаний не совпадала с частотой возможных внешних воздействий, в противном случае возникнут вибрации, которые могут вызвать серьезные разрушения
- С другой стороны, наличие резонанса позволяет обнаружить даже очень слабые колебания, если их частота совпадает с частотой собственных колебаний прибора. Так, радиотехника, прикладная акустика, электротехника, используют явление резонанса

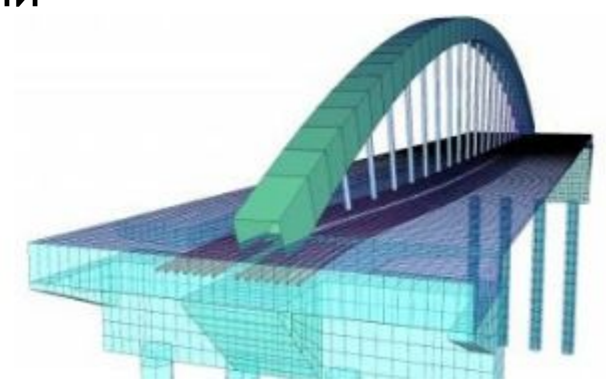
3.3 Применение резонанса.



Явления резонанса могут приводить к серьезным разрушениям. Так в 1940г в США висячий мост Тэйкома обрушился из-за автоколебаний, вызванных ветром.

- Применение резонанса:

- Для измерения частоты вибраций (частотомеры)
- В акустике
- При расчетах мостов, балок, станков, перекрытий



3.3 Применение резонанса.

Акустический резонанс

широко применяется в музыкальных инструментах : пустые полости в них имеют такой объем и форму, что усиливают извлекаемый звук, издаваемый струнами.

3.3 Применение резонанса.

При помощи явления резонанса можно выделить и усилить даже весьма слабые периодические колебания. Резонанс — явление, заключающееся в том, что при некоторой частоте вынуждающей силы, колебательная система оказывается особенно отзывчивой на действие этой силы. Степень отзывчивости в теории колебаний описывается величиной, называемой добротность. Явление резонанса впервые было описано Галилео Галилеем в 1602 г в работах, посвященных исследованию маятников и музыкальных струн.