Наибольшее и наименьшее значение функций

Тип 1. Исследование степенных и иррациональных функций

Найдите наименьшее значение функции $y = x^3 - 27x$ на отрезке $[0;4]$.

Решение.

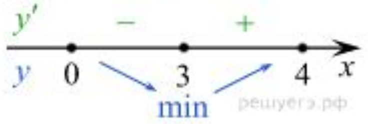
Найдем производную заданной функции:

$$y' = 3x^2 - 27 = 3(x^2 - 9) = 3(x+3)(x-3).$$

Найдем нули производной:

$$\begin{cases} 3(x+3)(x-3) = 0, \\ 0 \le x \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -3, \\ x = 3, \end{array} \right. \\ 0 \le x \le 4 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = 3$ заданная функция имеет минимум, являющийся ее наименьшим значением на заданном отрезке. Найдем это наименьшее значение:

$$y(3) = 27 - 27 \cdot 3 = -54.$$

Тип 2. Исследование частных

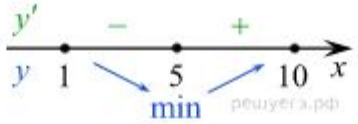
Найдите наименьшее значение функции $y = \dfrac{x^2 + 25}{x}$ на отрезке $[1; 10]$.

Решение.

Найдем производную заданной функции:

$$y' = \left(\frac{x^2 + 25}{x}\right)' = \left(x + \frac{25}{x}\right)' = 1 - \frac{25}{x^2} = \frac{x^2 - 25}{x^2}.$$

Производная обращается в нуль в точках 5 и −5. Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции на заданном отрезке:



Наименьшим значением функции на заданном отрезке будет ее значение в точке 5. Найдем его:

$$y(5) = \frac{25 + 25}{5} = 10.$$

Тип 3. Исследование произведений

Найдите точку минимума функции $y=(x+16)e^{x-16}$.

Решение.

Найдем производную заданной функции:

$$y'=(x+16)'e^{x-16}+(x+16)(e^{x-16})'=e^{x-16}+(x+16)e^{x-16}=(x+17)e^{x-16}.$$

Найдем нули производной:

$$(x+17)e^{x-16}=0\Leftrightarrow x=-17.$$

Определим знаки производной функции и изобразим на рисунке поведение функции:

Искомая точка минимума $x=-17$.

Тип 4. Исследование показательных и логарифмических функций

Найдите наибольшее значение функции $y = 8\ln(x+7) - 8x + 3$ на отрезке $[-6{,}5; 0]$.

Решение.

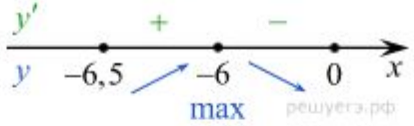
Найдем производную заданной функции:

$$y' = \frac{8}{x+7} - 8.$$

Найдем нули производной на заданном отрезке:

$$\begin{cases} \frac{8}{x+7} - 8 = 0, \\ -6{,}5 \le x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x+7} = 1, \\ -6{,}5 \le x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6, \\ -6{,}5 \le x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -6.$$

Определим знаки производной функции на заданном отрезке и изобразим на рисунке поведение функции:



В точке $x = -6$ заданная функция имеет максимум, являющийся ее наибольшим значением на заданном отрезке. Найдем это наибольшее значение:

$$y(-6) = 8\ln 1 + 8 \cdot 6 + 3 = 51.$$

Тип 5. Исследование тригонометрических функций

Найдите наименьшее значение функции $y = 9\cos x + 14x + 7$на отрезке $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение.

Найдем производную заданной функции: $y' = -9\sin x + 14$. Найденная производная положительна при всех значениях переменной, поэтому заданная функция является возрастающей. Следовательно, наименьшим значением функции на заданном отрезке является

$$y(0) = 9\cos 0 + 14 \cdot 0 + 7 = 16.$$

Тип 6. Исследование функций без помощи производной

Найдите наибольшее значение функции $\log_{\frac{1}{3}}(x^2+6x+12)$ на отрезке $[-19;-1]$.

Решение.

Оценим логарифм, выделив полный квадрат. В силу убывания логарифмической функции с основанием меньше 1 справедлива цепочка соотношений:

$$\log_{\frac{1}{3}}(x^2+6x+12)=\log_{\frac{1}{3}}((x+3)^2+3)\le\log_{\frac{1}{3}}3=-1.$$

Поэтому в точке −3, лежащей на отрезке [−19; −1], функция достигает наибольшего значения, равного −1.