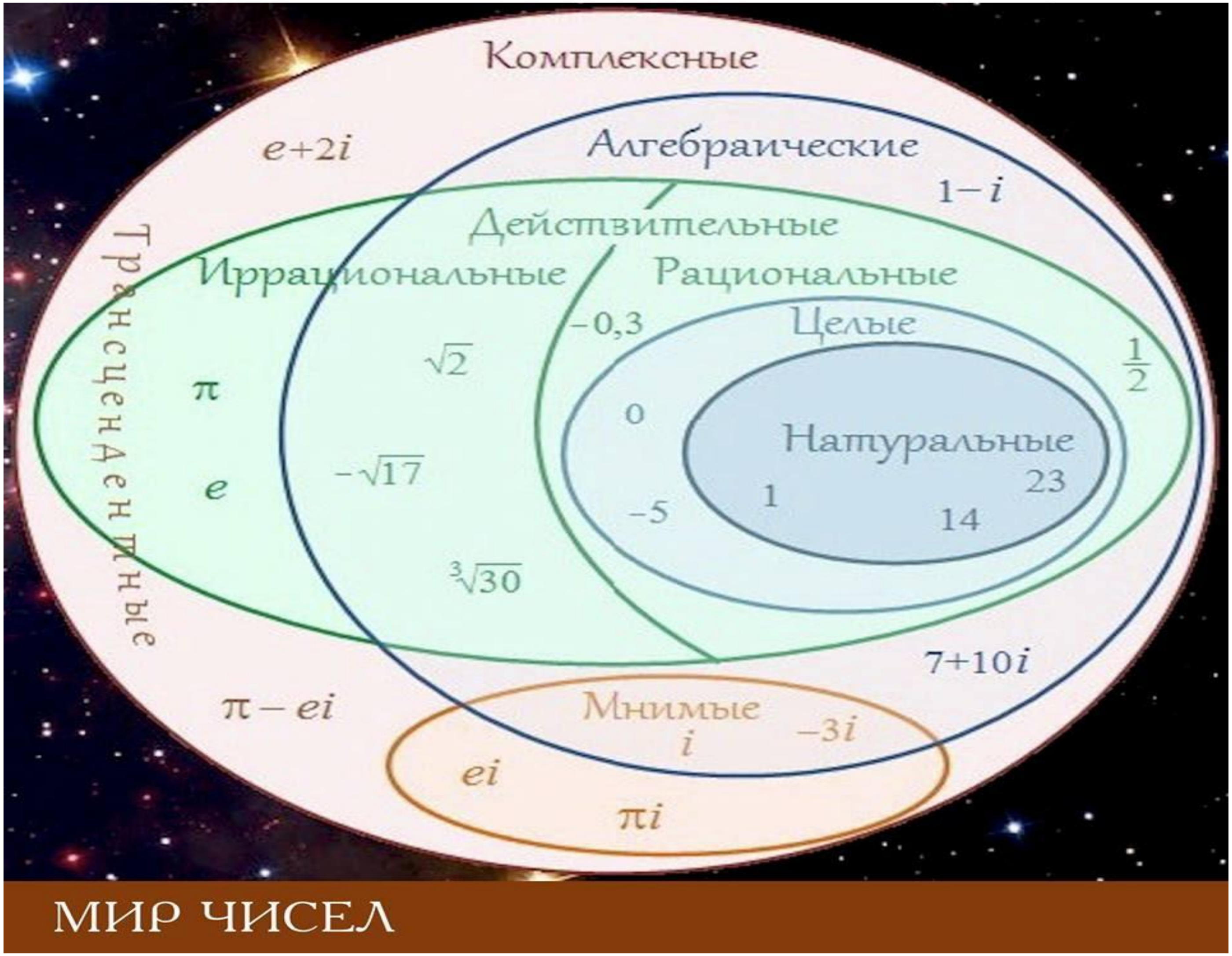
КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Числовые множества



Мнимая единица

Вид комплексного числа

$x^2 = -1$

$x = \sqrt{-1}$

$x = i$ *-корень уравнения*

i- *число, такое , что* $i^2 = -1$

i – *мнимая единица*

Элемент i называется мнимой единицей. («imaginary» - переводится «мнимый», «воображаемый»)

Определение комплексного числа

1) $a = 0$, то $a+bi = 0+bi = bi$ (мнимое)
2) $b = 0$, то $a+bi = a+0 = a$ (действительное)
3) a и b не равны нулю, то $a+bi$ ни действительное, ни мнимое. Оно более сложное составное число.

Определение 1. **Комплексным числом называют сумму действительного числа и чисто мнимого числа.**

$$\boxed{\begin{array}{c} z = a + bi \in C \Leftrightarrow a \in R,\ b \in R, \\ i \text{ — мнимая единица.} \end{array}}$$

Состав комплексного числа

КОМПЛЕКСНОЕ ЧИСЛО
$z = a + bi$

a
действительная часть числа

bi
мнимая часть числа

Например: *i, $2i$, $3i$* – чисто мнимые числа.

3; -1,5; 82 – действительные числа

$3+12i$; $0,8 – 36i$ – комплексные числа

Действия над комплексными числами в алгебраической форме

Сложение, вычитание, умножение комплексных чисел в алгебраической форме производят по правилам соответствующих действий над многочленами.

Пример. Даны комплексные числа $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 5 - 7i$.

Найти:

а) $z_1 + z_2$; б) $z_1 - z_2$; в) $z_1 z_2$.

Решение.

а) $z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (5 - 7i) = 2 + 3i + 5 - 7i = (2 + 5) + (3i - 7i) = 7 - 4i$;

б) $z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (5 - 7i) = 2 + 3i - 5 + 7i = (2 - 5) + (3i + 7i) = -3 + 10i$;

в) $z_1 z_2 = (2 + 3i)(5 - 7i) = 10 - 14i + 15i - 21i^2 = 10 - 14i + 15i + 21 = (10 + 21) + (-14i + 15i) = 31 + i$

(здесь учтено, что $i^2 = -1$).

Два комплексных числа называются ***сопряженными***, если они отличаются друг от друга только знаками перед мнимой частью.

Чтобы выполнить деление, произведем дополнительное действие: умножим делимое и делитель на комплексное число, сопряженное делителю.

Пример. Выполнить деление:

$$\frac{2+3i}{5-7i}$$

Решение. Произведем умножение для делимого и делителя в отдельности:

$$(2 + 3i)(5 + 7i) = 10 + 14i + 15i + 21i^2 = -11 + 29i;$$

$$(5 - 7i)(5 + 7i) = 25 - 49i^2 = 25 + 49 = 74.$$

Итак,

$$\frac{2+3i}{5-7i} = \frac{-11+29i}{74}$$

Решение квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом

Решение квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом ($D < 0$).

Решением квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом всегда будут два сопряженных комплексных числа.

Пример1. Решить квадратное уравнение $x^2 + 4x + 29 = 0$.

Решение: Вычислим дискриминант

$D = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 29 = 16 - 116 = -100 < 0$.

Представляем отрицательное число как произведение (–1) и положительного числа и заменяем (–1) на i^2 : $D = -100 = -1 \cdot 100 = i^2 \cdot 10^2$.

Найдем $\sqrt{D} = \sqrt{i^2 \cdot 10^2} = \sqrt{i^2} \cdot \sqrt{10^2} = i \cdot 10$. Находим корни уравнения:

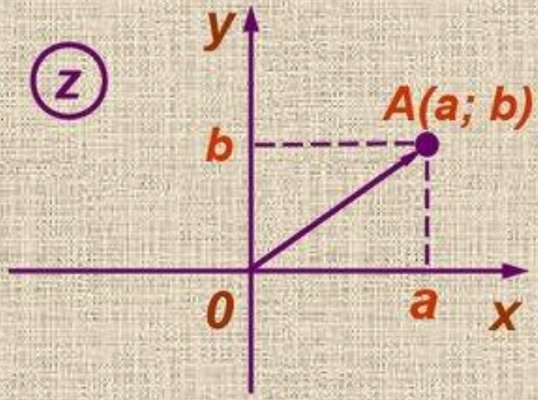
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4 + i \cdot 10}{2} = \frac{-4}{2} + \frac{10i}{2} = -2 + 5i \ ;$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4 - i \cdot 10}{2} = \frac{-4}{2} - \frac{10i}{2} = -2 - 5i \ .$$

Геометрическое изображение комплексных чисел

Всякое комплексное число $z = a + i \cdot b$, можно изобразить на плоскости XOY в виде точки $A(a;\ b)$.

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называют ***плоскостью комплексной переменной***.

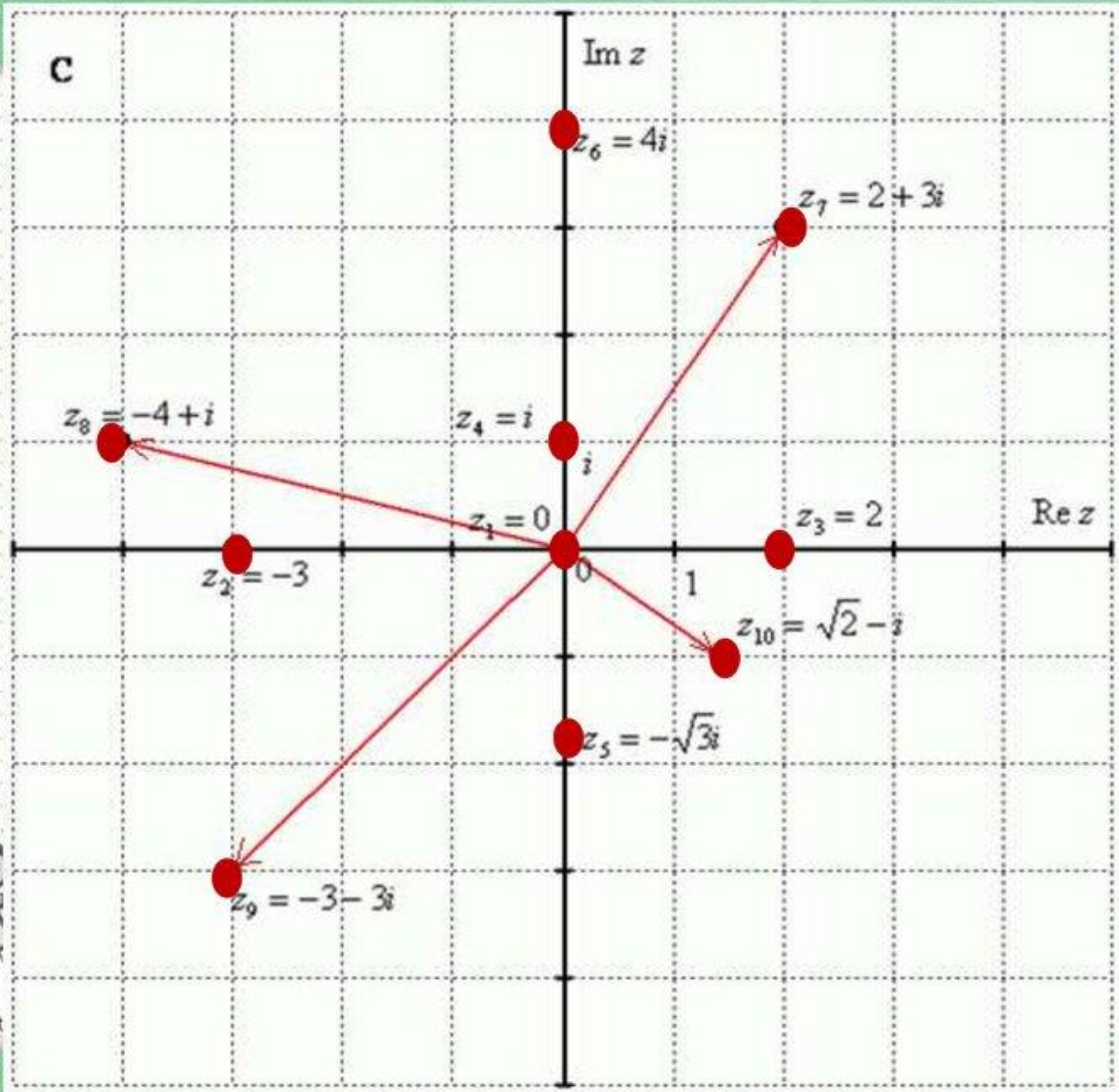


Точкам, лежащим на оси OX, соответствуют действительные числа ($b = 0$), поэтому ось OX называют ***действительной осью***.

Точкам, лежащим на оси OY , соответствуют чисто мнимые числа ($a = 0$), поэтому ось OY называют ***мнимой осью***.

Иногда удобно считать геометрическим изображением комплексного числа z вектор $\overline{OA}$

Построим на комплексной плоскости следующие комплексные числа:



$z_1 = 0$

$z_2 = -3$

$z_3 = 2$

$z_4 = i$

$z_5 = -\sqrt{3}i$

$z_6 = 4i$

$z_7 = 2+3i$

$z_8 = -4+i$

$z_9 = -3-3i$

$z_{10} = \sqrt{2} - i$

Различные формы комплексного числа

Алгебраическая форма

$$z = a + bi$$

$$\downarrow \uparrow$$

Тригонометрическая форма

$$z = r(cos\varphi + i\ sin\varphi)$$

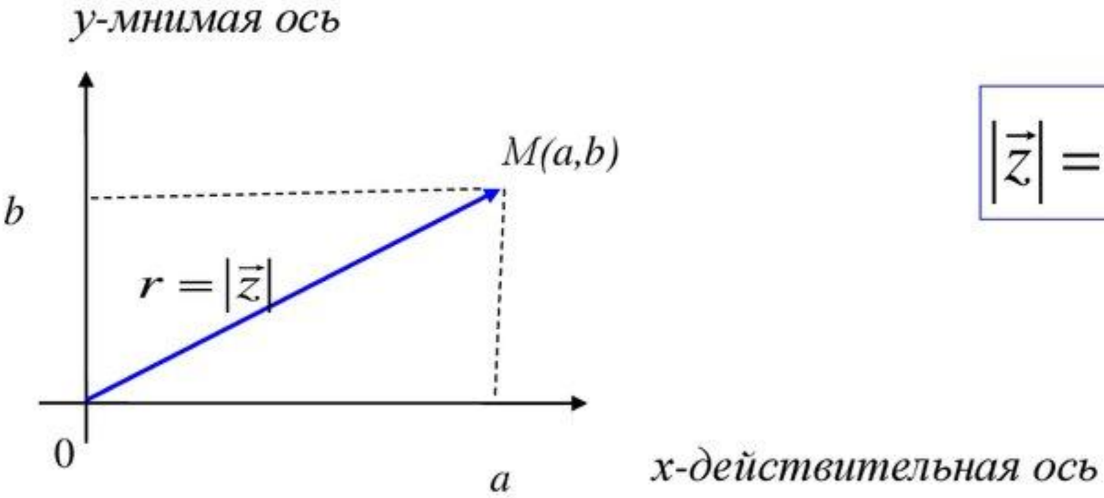
$$\downarrow \uparrow$$

Показательная форма

$$z = re^{i\varphi}$$

Модуль комплексного числа

- **Модулем** комплексного числа $z=a+bi$ называется длина вектора $\vec{z}$.



$$\left|\vec{z}\right| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

2. Найти модуль комплексного числа:

$$\boxed{|\vec{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

$z_1 = 2 - i$ $\qquad |z_1| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

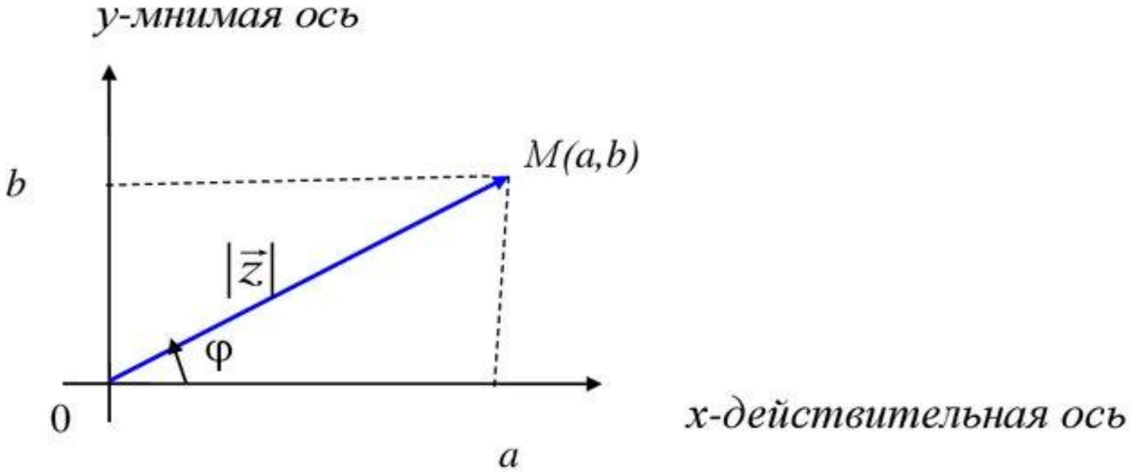
$z_2 = 2\sqrt{6} + 5i$ $\qquad |z_2| = \sqrt{(2\sqrt{6})^2 + 5^2} = \sqrt{24+25} = \sqrt{49} = 7$

$z_3 = i$ $\qquad |z_3| = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1$

$z_4 = -4$ $\qquad |z_4| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2} = \sqrt{16} = 4$

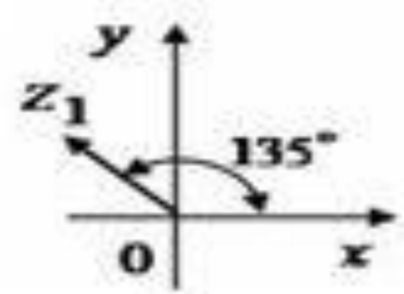
Аргумент комплексного числа

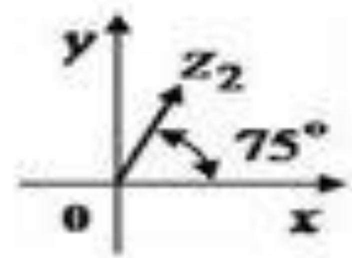
- Аргументом комплексного числа называется угол φ, который образует вектор ОМ с положительным направлением оси абсцисс. $\varphi = \arg z$



В качестве аргумента комплексного числа будем брать положительный угол между положительным направлением оси ОХ и вектором, изображающим комплексное число

Даны два комплексных числа z_1, z_2





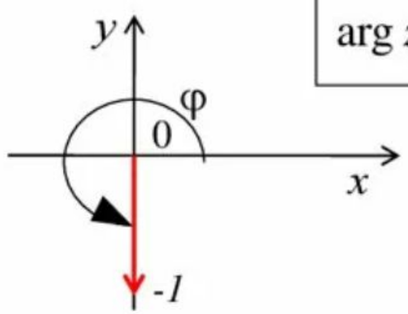
Тогда аргумент частного $arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ (в градусах) равен

...

Примеры записи комплексного числа в тригонометрической форме

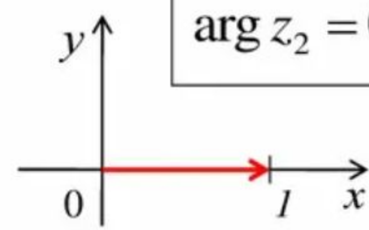
$$z_1 = -i$$

$$\boxed{\arg z_1 = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z}$$



$$z_2 = 1$$

$$\boxed{\arg z_2 = 0 + 2\pi k,\ k \in Z}$$



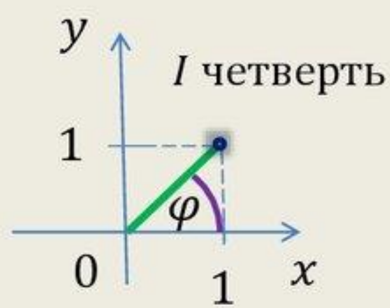
$$z_1 = 1\,(cos270^\circ + i\,sin270^\circ)$$

$$z_2 = 1\,(cos0^\circ + i\,sin0^\circ)$$

Пример тригонометрической формы записи комплексного числа

представим $1 + i$ в тригонометрической форме :

$$\mathbf{1} + 1i = \left| \begin{matrix} x = & |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ y = & \varphi = \operatorname{arctg}\frac{1}{1} = \operatorname{arctg}1 = \frac{\pi}{4} \end{matrix} \right| = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right);$$



В тригонометрической и показательной формах комплексные числа можно:

- умножать,

- делить,

- возводить в степень,

- извлекать корень из комплексного числа.

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме
Умножение комплексных чисел.

- Пусть
$$z_1 = r_1\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)$$
$$z_2 = r_2\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right)$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2\left(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1\right)\left(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\right) =$$
$$= r_1 r_2\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2\cos\varphi_1 + i^2\sin\varphi_1\sin\varphi_2\right) =$$
$$= r_1 r_2\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i\left(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2\right)\right) =$$
$$= r_1 r_2\left(\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)\right)$$

$$\boxed{z_1 z_2 = r_1 r_2\left(\cos\left(\varphi_1 + \varphi_2\right) + i\sin\left(\varphi_1 + \varphi_2\right)\right)}$$

8. Найти произведение комплексных чисел:

$$z_1 = \frac{7}{2}\left(\cos 95^0 + i\sin 95^0\right) \quad и \quad z_2 = 2\left(\cos\left(-65^0\right) + i\sin\left(-65^0\right)\right)$$

$$z_1 z_2 = \frac{7}{2}\cdot 2\left(\cos\left(95^0 + \left(-65^0\right)\right) + i\sin\left(95^0 + \left(-65^0\right)\right)\right) =$$

$$= 7\left(\cos\left(95^0 - 65^0\right) + i\sin\left(95^0 - 65^0\right)\right) = 7\left(\cos 30^0 + i\sin 30^0\right) =$$

$$= 7\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \underline{\frac{7\sqrt{3}}{2} + \frac{7}{2}i}$$

Деление комплексных чисел.

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\frac{\left(\cos\varphi_1+i\sin\,\varphi_1\right)}{\left(\cos\varphi_2+i\sin\,\varphi_2\right)}=\frac{r_1}{r_2}\frac{\left(\cos\varphi_1+i\sin\,\varphi_1\right)\left(\cos\varphi_2-i\sin\,\varphi_2\right)}{\left(\cos\varphi_2+i\sin\,\varphi_2\right)\left(\cos\varphi_2-i\sin\,\varphi_2\right)}=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\frac{\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+i\sin\,\varphi_1\cos\varphi_2-i\sin\,\varphi_2\cos\varphi_1-i^2\sin\,\varphi_1\sin\,\varphi_2\right)}{\left(\cos\varphi_2\right)^2-\left(i\sin\,\varphi_2\right)^2}=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\frac{\left(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\,\varphi_1\sin\,\varphi_2+i\left(\sin\,\varphi_1\cos\varphi_2-\cos\varphi_1\sin\,\varphi_2\right)\right)}{\cos^2\varphi_2+\sin^2\varphi_2}=$$

$$=\frac{r_1}{r_2}\left(\cos\left(\varphi_1-\varphi_2\right)+i\sin\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\right)$$

$$\boxed{\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\left(\cos\left(\varphi_1-\varphi_2\right)+i\sin\left(\varphi_1-\varphi_2\right)\right)}$$

16. Сделать действия над комплексными числами и ответ записать в тригонометрической форме:

1) $\dfrac{\sqrt{2}\left(\cos 40^0 + i\sin 40^0\right)}{3\left(\cos 60^0 + i\sin 60^0\right)}$

Ответ. $\dfrac{\sqrt{2}}{3}\left(\cos\left(-20^0\right) + i\sin\left(-20^0\right)\right)$

2) $2\left(\cos 30^0 + i\sin 30^0\right)\cdot\sqrt{3}\left(\cos 70^0 + i\sin 70^0\right)$

Ответ. $2\sqrt{3}\left(\cos 100^0 + i\sin 100^0\right)$

16. Сделать действия над комплексными числами и ответ записать в тригонометрической форме:

1) $$\frac{\sqrt{2}\left(\cos 40^0 + i\sin 40^0\right)}{3\left(\cos 60^0 + i\sin 60^0\right)}$$

Ответ. $$\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\cos\left(-20^0\right) + i\sin\left(-20^0\right)\right)$$

2) $$2\left(\cos 30^0 + i\sin 30^0\right)\cdot\sqrt{3}\left(\cos 70^0 + i\sin 70^0\right)$$

Ответ. $$2\sqrt{3}\left(\cos 100^0 + i\sin 100^0\right)$$

16. Сделать действия над комплексными числами и ответ записать в тригонометрической форме:

1) $$\frac{\sqrt{2}\left(\cos 40^0 + i\sin 40^0\right)}{3\left(\cos 60^0 + i\sin 60^0\right)}$$

Ответ. $\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\cos\left(-20^0\right) + i\sin\left(-20^0\right)\right)$

2) $$2\left(\cos 30^0 + i\sin 30^0\right)\cdot\sqrt{3}\left(\cos 70^0 + i\sin 70^0\right)$$

Ответ. $2\sqrt{3}\left(\cos 100^0 + i\sin 100^0\right)$

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме. Возведение в степень.

- Пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$$\boxed{z^n = r^n(\cos\varphi n + i\sin\varphi n)}$$ - формула Муавра

11. Возвести в четвертую степень комплексное число:

$$z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$z^4 = 2^4\left(\cos\frac{\pi}{3}\cdot 4 + i\sin\frac{\pi}{3}\cdot 4\right) = \underline{16\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)}$$

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме. Извлечение корня.

- Пусть $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Корнем n-ой степени из числа z (n∈N, n≥2) называется такое комплексное число u, для которого справедливо равенство $u^n = z$

Корень n-ой степени из комплексного числа z ***имеет ровно n значений****, которые находятся по формуле:*

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), k = 0,1,2,\ldots,n-1}$$

Извлечение корня n – степени из комплексного числа

Пусть комплексное число задано в алгебраической форме Z = 3i

Для извлечения корня запишем это число в тригонометрической форме

Z = 3(cos90°+ i sin90°)

$\sqrt[6]{Z}$ = ?

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), k = 0,1,2,\ldots,n-1$$

n = 6, Найдём все шесть значений корня при K = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6

$$k = 0, Z_0 = \sqrt[6]{3}\left(cos\frac{90° + 360° \cdot 0}{6} + i\ sin\frac{90° + 360° \cdot 0}{6}\right) =$$
$$= \sqrt[6]{3}(cos15° + \mathrm{i}\sin 15°)$$

Т.к. шесть значений корня 6-ой степени образуют вершины правильного шестиугольника, то последующий аргумент от предыдущего отличается на 360°:6 = 60°.

$$k = 1, Z_1 = \sqrt[6]{3}\big(\cos(15° + 60°) + \mathrm{i}\sin(15° + 60°)\big) = \sqrt[6]{3}(\cos 75° + \mathrm{i}\sin 75°)$$

$$k = 2, Z_2 = \sqrt[6]{3}(\cos 135° + \mathrm{i}\sin 135°)$$

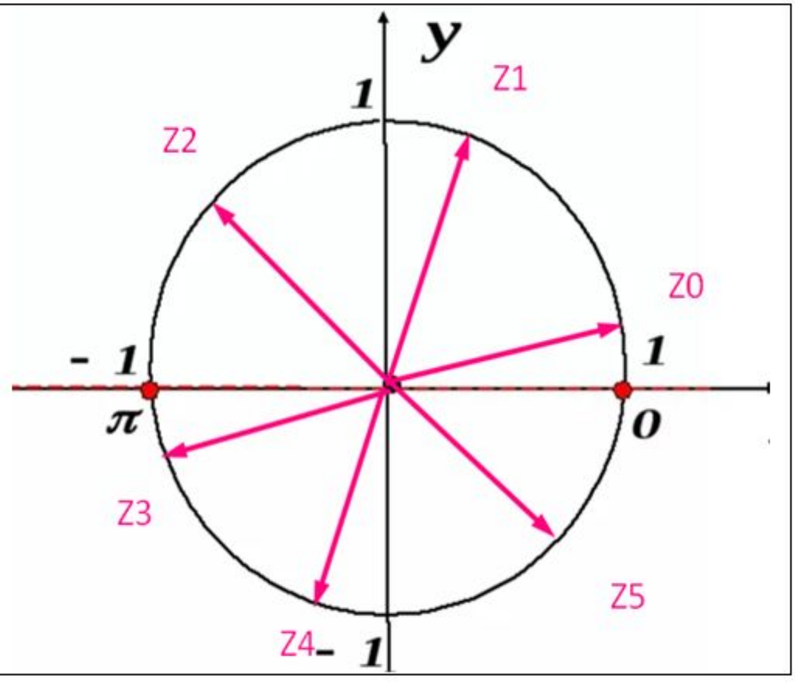
$$k = 3, Z_3 = \sqrt[6]{3}(\cos 195° + \mathrm{i}\sin 195°)$$

$$k = 4, Z_4 = \sqrt[6]{3}(\cos 255° + \mathrm{i}\sin 255°)$$

$$k = 5, Z_5 = \sqrt[6]{3}(\cos 315° + \mathrm{i}\sin 315°)$$

Шесть значений корня 6-ой степени образуют вершины правильного шестиугольника

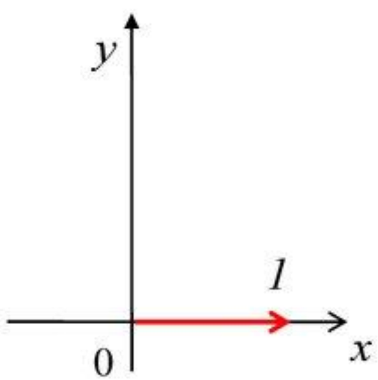
$$k = 0, Z_0 = \sqrt[6]{3}(cos15° + i\sin15°)$$
$$k = 1, Z_1 = \sqrt[6]{3}(\cos75° + i\sin75°)$$
$$k = 2, Z_2 = \sqrt[6]{3}(\cos135° + i\sin135°)$$
$$k = 3, Z_3 = \sqrt[6]{3}(\cos195° + i\sin195°)$$
$$k = 4, Z_4 = \sqrt[6]{3}(\cos255° + i\sin255°)$$
$$k = 5, Z_5 = \sqrt[6]{3}(\cos315° + i\sin315°)$$



13. Найти все значения корня: $\sqrt[6]{1}$

Пусть $z = 1$

Запишем данное число в тригонометрической форме:



$$r = |z| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$$

$$\varphi = 0$$

$$z = 1 = \cos 0 + i \sin 0$$

$$\sqrt[6]{1}=\sqrt[6]{\cos 0+i\sin 0}=\cos\frac{0+2\pi k}{6}+i\sin\frac{0+2\pi k}{6}=\cos\frac{\pi k}{3}+i\sin\frac{\pi k}{3}$$

$$k=0,1,2,3,4,5$$

$$k=0:\quad u_0=\cos 0+i\sin 0=1$$

$$k=1:\quad u_1=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$k=2:\quad u_2=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$k=3:\quad u_3=\cos\pi+i\sin\pi=-1$$

$$k=4:\quad u_4=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$k=5:\quad u_5=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$