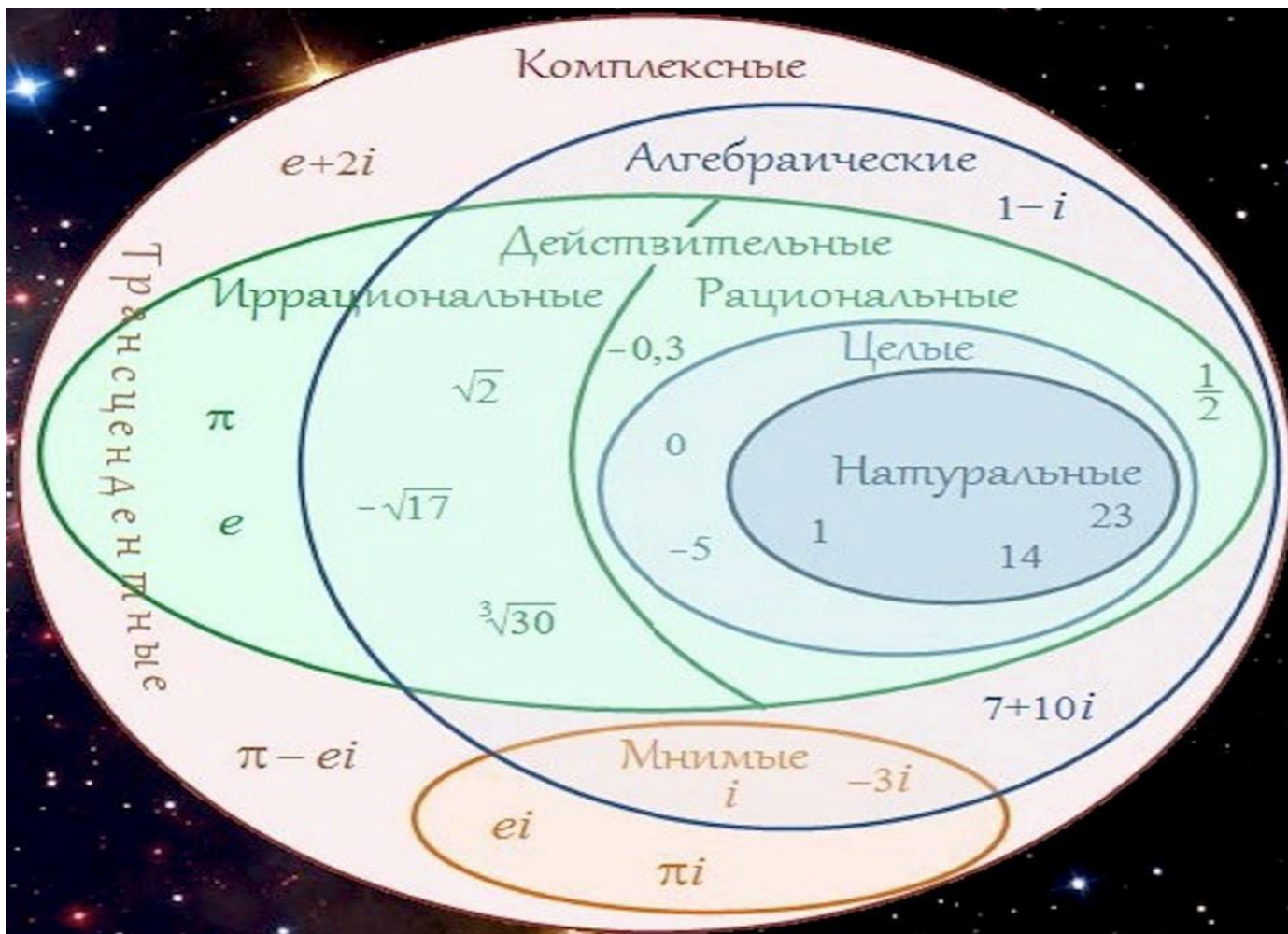


КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Числовые множества



Мнимая единица

Вид комплексного числа

$$x^2 = -1$$

$$x = \sqrt{-1}$$

$x = i$ - корень уравнения

i - число, такое, что $i^2 = -1$

i – мнимая единица

Элемент i называется мнимой единицей. («imaginary» - переводится «мнимый», «воображаемый»)





Определение комплексного числа

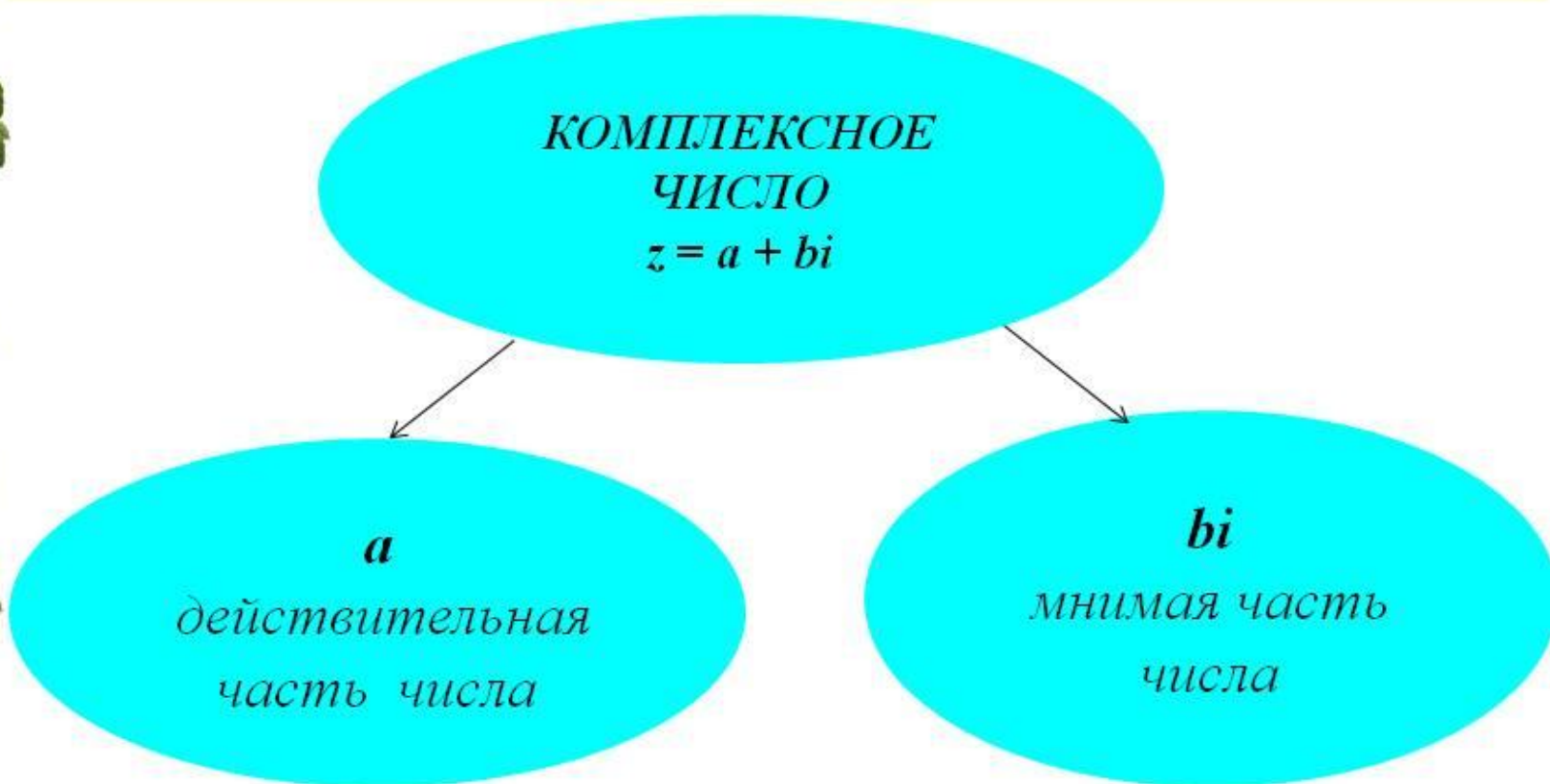
- 1) $a = 0$, то $a + bi = 0 + bi = bi$ (мнимое)
- 2) $b = 0$, то $a + bi = a + 0 = a$ (действительное)
- 3) a и b не равны нулю, то $a + bi$ ни действительное, ни мнимое. Оно более сложное составное число.

Определение 1. Комплексным числом называют сумму действительного числа и чисто мнимого числа.

$$z = a + bi \in \mathbb{C} \Leftrightarrow a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R},$$

i — мнимая единица.

Состав комплексного числа



Например: $i, 2i, 3i$ – чисто мнимые числа.
 $3; -1,5; 82$ – действительные числа
 $3+12i; 0,8 - 36i$ – комплексные числа

Действия над комплексными числами в алгебраической форме

Сложение, вычитание, умножение комплексных чисел в алгебраической форме производят по правилам соответствующих действий над многочленами.

Пример. Даны комплексные числа $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 5 - 7i$.

Найти:

а) $z_1 + z_2$; б) $z_1 - z_2$; в) $z_1 z_2$.

Решение.

$$\begin{aligned} \text{а) } z_1 + z_2 &= (2 + 3i) + (5 - 7i) = 2 + 3i + 5 - 7i = (2 + 5) + (3i - 7i) \\ &= 7 - 4i; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } z_1 - z_2 &= (2 + 3i) - (5 - 7i) = 2 + 3i - 5 + 7i = (2 - 5) + (3i + 7i) \\ &= -3 + 10i; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } z_1 z_2 &= (2 + 3i)(5 - 7i) = 10 - 14i + 15i - 21i^2 = 10 - 14i + 15i \\ &+ 21 = (10 + 21) + (-14i + 15i) = 31 + i \end{aligned}$$

(здесь учтено, что $i^2 = -1$).

Два комплексных числа называются **сопряженными**, если они отличаются друг от друга только знаками перед мнимой частью.

Чтобы выполнить деление, произведем дополнительное действие: умножим делимое и делитель на комплексное число, сопряженное делителю.

Пример. Выполнить деление:

$$\frac{2 + 3i}{5 - 7i}$$

Решение. Произведем умножение для делимого и делителя в отдельности:

$$(2 + 3i)(5 + 7i) = 10 + 14i + 15i + 21i^2 = -11 + 29i;$$

$$(5 - 7i)(5 + 7i) = 25 - 49i^2 = 25 + 49 = 74.$$

Итак,

$$\frac{2 + 3i}{5 - 7i} = \frac{-11 + 29i}{74}$$

Решение квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом



Решение квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом ($D < 0$).

Решением квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом всегда будут два сопряженных комплексных числа.

Пример1. Решить квадратное уравнение $x^2 + 4x + 29 = 0$.

Решение: Вычислим дискриминант |

$$D = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 29 = 16 - 116 = -100 < 0.$$

Представляем отрицательное число как произведение (-1) и положительного числа и заменяем (-1) на i^2 : $D = -100 = -1 \cdot 100 = i^2 \cdot 10^2$.

Найдем $\sqrt{D} = \sqrt{i^2 \cdot 10^2} = \sqrt{i^2} \cdot \sqrt{10^2} = i \cdot 10$. Находим корни уравнения:

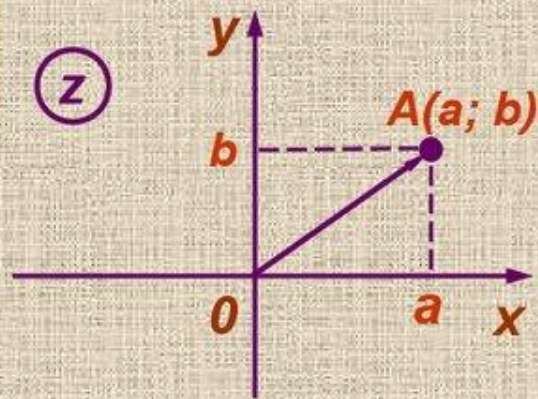
$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4 + i \cdot 10}{2} = \frac{-4}{2} + \frac{10i}{2} = -2 + 5i;$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{-4 - i \cdot 10}{2} = \frac{-4}{2} - \frac{10i}{2} = -2 - 5i.$$

Геометрическое изображение комплексных чисел

Всякое комплексное число $z = a + i \cdot b$, можно изобразить на плоскости XOY в виде точки $A(a; b)$.

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называют **плоскостью комплексной переменной**.

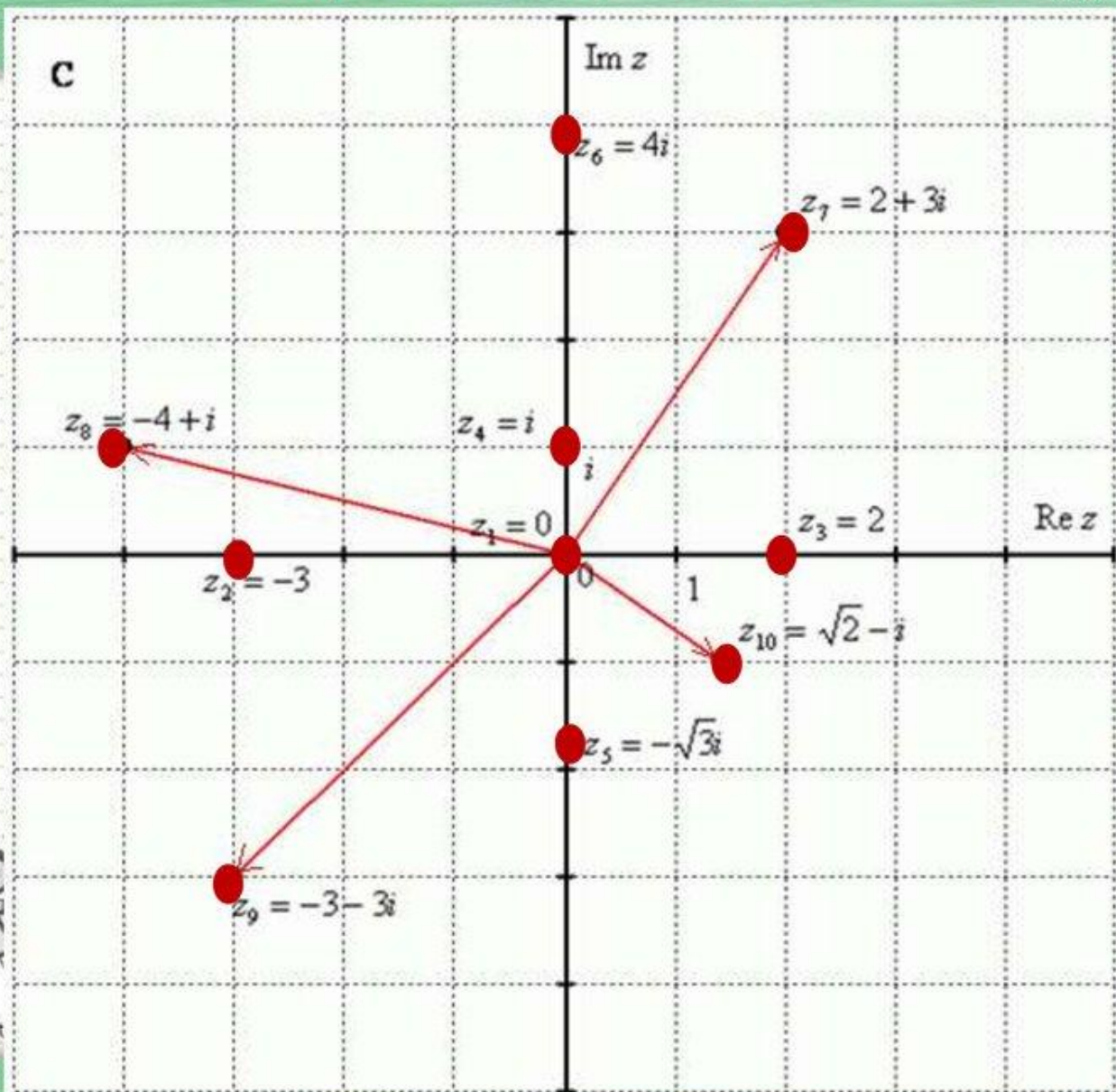


Точкам, лежащим на оси OX , соответствуют действительные числа ($b = 0$), поэтому ось OX называют **действительной осью**.

Точкам, лежащим на оси OY , соответствуют чисто мнимые числа ($a = 0$), поэтому ось OY называют **мнимой осью**.

Иногда удобно считать геометрическим изображением комплексного числа z вектор \overline{OA}

Построим на комплексной плоскости следующие комплексные числа:



$$z_1 = 0$$

$$z_2 = -3$$

$$z_3 = 2$$

$$z_4 = i$$

$$z_5 = -\sqrt{3}i$$

$$z_6 = 4i$$

$$z_7 = 2 + 3i$$

$$z_8 = -4 + i$$

$$z_9 = -3 - 3i$$

$$z_{10} = \sqrt{2} - i$$

Различные формы комплексного числа

Алгебраическая форма

$$z = a + bi$$

↓ ↑

Тригонометрическая форма

$$z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

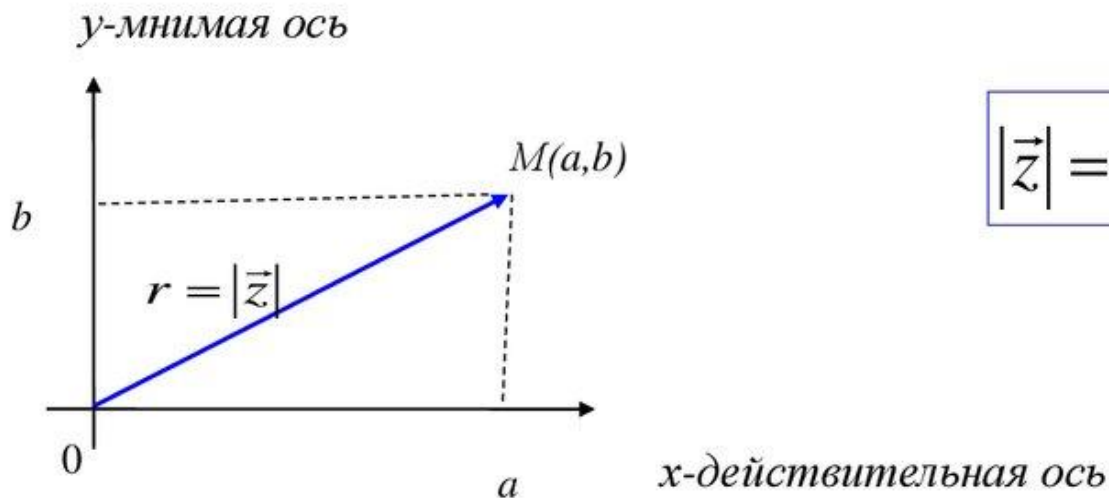
↓ ↑

Показательная форма

$$z = re^{i\varphi}$$

Модуль комплексного числа

- Модулем комплексного числа $z = a + bi$ называется длина вектора \vec{z}



$$|\vec{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

2. Найти модуль комплексного числа:

$$|\vec{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$z_1 = 2 - i$$

$$|z_1| = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

$$z_2 = 2\sqrt{6} + 5i$$

$$|z_2| = \sqrt{(2\sqrt{6})^2 + 5^2} = \sqrt{24+25} = \sqrt{49} = 7$$

$$z_3 = i$$

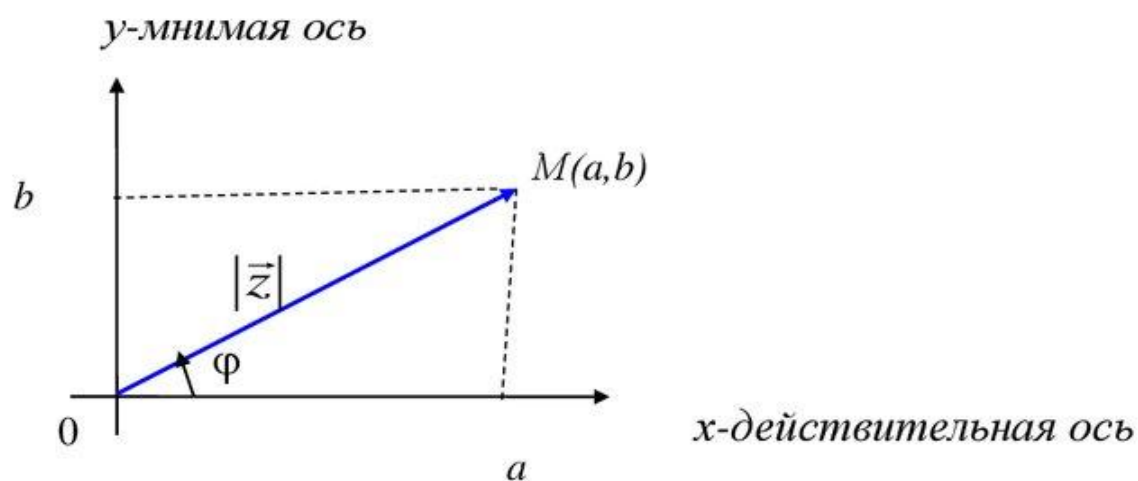
$$|z_3| = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$z_4 = -4$$

$$|z_4| = \sqrt{(-4)^2 + 0^2} = \sqrt{16} = 4$$

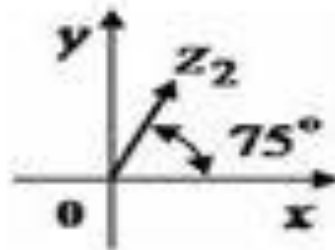
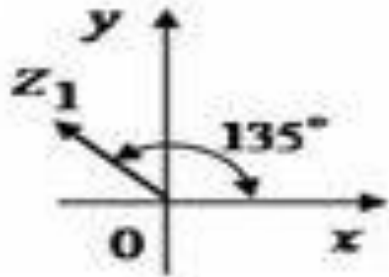
Аргумент комплексного числа

- **Аргументом** комплексного числа называется угол φ , который образует вектор OM с положительным направлением оси абсцисс. $\varphi = \arg z$



**В качестве аргумента
комплексного числа будем
брать положительный угол
между положительным
направлением оси OX и
вектором, изображающим
комплексное число**

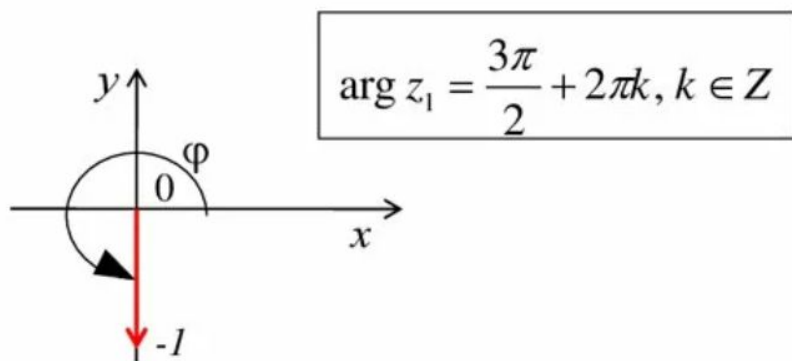
Даны два комплексных числа z_1, z_2



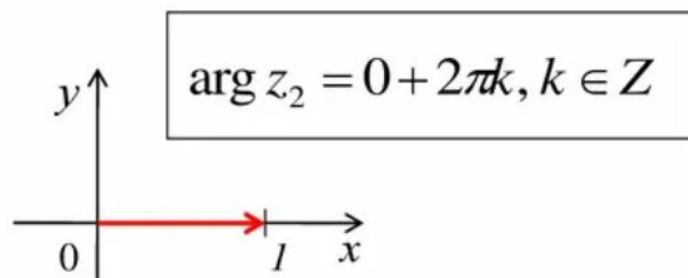
Тогда аргумент частного $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$ (в градусах) равен

Примеры записи комплексного числа в тригонометрической форме

$$z_1 = -i$$



$$z_2 = 1$$

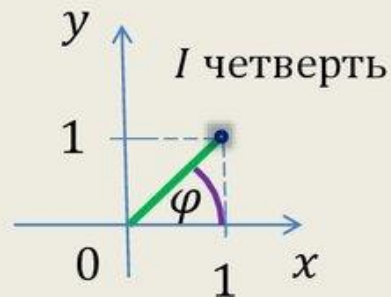


$$z_1 = 1 (\cos 270^\circ + i \sin 270^\circ) \quad z_2 = 1 (\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$$

Пример тригонометрической формы записи комплексного числа

представим $1 + i$ в тригонометрической форме :

$$1 + 1i = \left| \begin{array}{l} x = \\ y = \end{array} \right. \begin{array}{l} |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{1} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} x = \\ y = \end{array}} \right| = \sqrt{2} \cdot \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right);$$



В тригонометрической и показательной формах комплексные числа

МОЖНО:

- умножать,**
- делить,**
- возводить в степень,**
- извлекать корень из комплексного числа.**

Действия над комплексными числами в
тригонометрической форме
Умножение комплексных чисел.

• Пусть $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$
 $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + i \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2 \cos \varphi_1 + i^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)) = \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \end{aligned}$$

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

8. Найти произведение комплексных чисел:

$$z_1 = \frac{7}{2}(\cos 95^\circ + i \sin 95^\circ) \quad \text{и} \quad z_2 = 2(\cos(-65^\circ) + i \sin(-65^\circ))$$

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \frac{7}{2} \cdot 2 (\cos(95^\circ + (-65^\circ)) + i \sin(95^\circ + (-65^\circ))) = \\ &= 7 (\cos(95^\circ - 65^\circ) + i \sin(95^\circ - 65^\circ)) = 7 (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) = \\ &= 7 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right) = \underline{\underline{\frac{7\sqrt{3}}{2} + \frac{7}{2} i}} \end{aligned}$$

Деление комплексных чисел.

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)}{r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)(\cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2)} = \\ &= \frac{r_1 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + i \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - i \sin \varphi_2 \cos \varphi_1 - i^2 \sin \varphi_1 \sin \varphi_2)}{r_2 (\cos \varphi_2)^2 - (i \sin \varphi_2)^2} = \\ &= \frac{r_1 (\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2 + i (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_2))}{r_2 (\cos^2 \varphi_2 + \sin^2 \varphi_2)} = \\ &= \frac{r_1 (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))}{r_2}\end{aligned}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

16. Сделать действия над комплексными числами и ответ записать в тригонометрической форме:

$$1) \frac{\sqrt{2}(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ)}{3(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)}$$

Ответ. $\frac{\sqrt{2}}{3}(\cos(-20^\circ) + i \sin(-20^\circ))$

$$2) 2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) \cdot \sqrt{3}(\cos 70^\circ + i \sin 70^\circ)$$

Ответ. $2\sqrt{3}(\cos 100^\circ + i \sin 100^\circ)$

16. Сделать действия над комплексными числами и ответ записать в тригонометрической форме:

$$1) \frac{\sqrt{2}(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ)}{3(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)}$$

Ответ. $\frac{\sqrt{2}}{3}(\cos(-20^\circ) + i \sin(-20^\circ))$

$$2) 2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) \cdot \sqrt{3}(\cos 70^\circ + i \sin 70^\circ)$$

Ответ. $2\sqrt{3}(\cos 100^\circ + i \sin 100^\circ)$

16. Сделать действия над комплексными числами и ответ записать в тригонометрической форме:

$$1) \frac{\sqrt{2}(\cos 40^\circ + i \sin 40^\circ)}{3(\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)}$$

ОТВЕТ. $\frac{\sqrt{2}}{3}(\cos(-20^\circ) + i \sin(-20^\circ))$

$$2) 2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) \cdot \sqrt{3}(\cos 70^\circ + i \sin 70^\circ)$$

ОТВЕТ. $2\sqrt{3}(\cos 100^\circ + i \sin 100^\circ)$

Действия над комплексными числами в
тригонометрической форме. Возведение в
степень.

• Пусть $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

$z^n = r^n (\cos \varphi n + i \sin \varphi n)$ - формула Муавра

11. Возвести в четвертую степень комплексное
число:

$$z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$z^4 = 2^4 \left(\cos \frac{\pi}{3} \cdot 4 + i \sin \frac{\pi}{3} \cdot 4 \right) = \underline{16 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right)}$$

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме. Извлечение корня.

- Пусть $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$

Корнем n -ой степени из числа z ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) называется такое комплексное число u , для которого справедливо равенство

$$u^n = z$$

Корень n -ой степени из комплексного числа z имеет ровно n значений, которые находятся по формуле:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Извлечение корня n – степени из комплексного числа

Пусть комплексное число задано в алгебраической форме $Z = 3i$

Для извлечения корня запишем это число в тригонометрической форме

$$Z = 3(\cos 90^\circ + i \sin 90^\circ)$$

$$\sqrt[6]{Z} = ?$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

$n = 6$, Найдём все шесть значений корня при $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$

$$\begin{aligned} k = 0, Z_0 &= \sqrt[6]{3} \left(\cos \frac{90^\circ + 360^\circ \cdot 0}{6} + i \sin \frac{90^\circ + 360^\circ \cdot 0}{6} \right) = \\ &= \sqrt[6]{3} (\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ) \end{aligned}$$

Т.к. шесть значений корня 6-ой степени образуют вершины правильного шестиугольника, то последующий аргумент от предыдущего отличается на $360^\circ : 6 = 60^\circ$.

$$k = 1, Z_1 = \sqrt[6]{3} (\cos(15^\circ + 60^\circ) + i \sin(15^\circ + 60^\circ)) = \sqrt[6]{3} (\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)$$

$$k = 2, Z_2 = \sqrt[6]{3} (\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ)$$

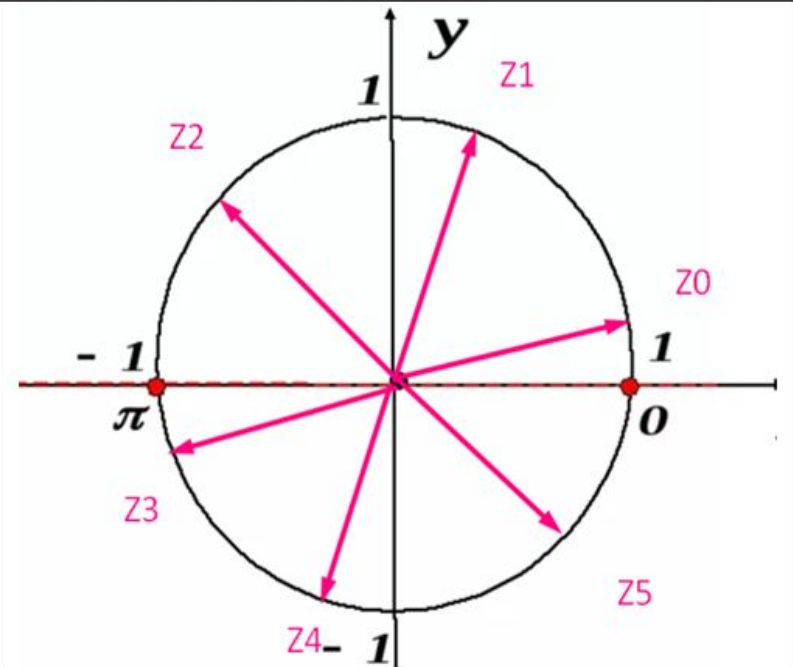
$$k = 3, Z_3 = \sqrt[6]{3} (\cos 195^\circ + i \sin 195^\circ)$$

$$k = 4, Z_4 = \sqrt[6]{3} (\cos 255^\circ + i \sin 255^\circ)$$

$$k = 5, Z_5 = \sqrt[6]{3} (\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ)$$

Шесть значений корня 6-ой степени образуют вершины правильного шестиугольника

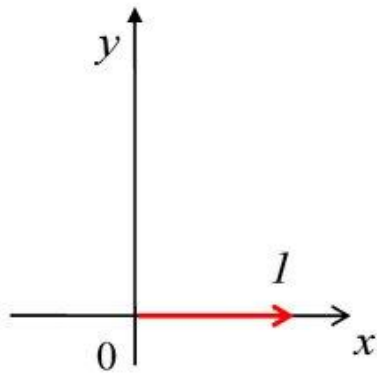
$$\begin{aligned}k = 0, Z_0 &= \sqrt[6]{3}(\cos 15^\circ + i \sin 15^\circ) \\k = 1, Z_1 &= \sqrt[6]{3}(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ) \\k = 2, Z_2 &= \sqrt[6]{3}(\cos 135^\circ + i \sin 135^\circ) \\k = 3, Z_3 &= \sqrt[6]{3}(\cos 195^\circ + i \sin 195^\circ) \\k = 4, Z_4 &= \sqrt[6]{3}(\cos 255^\circ + i \sin 255^\circ) \\k = 5, Z_5 &= \sqrt[6]{3}(\cos 315^\circ + i \sin 315^\circ)\end{aligned}$$



13. Найти все значения корня: $\sqrt[6]{1}$

Пусть $z = 1$

Запишем данное число в тригонометрической форме:



$$r = |z| = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$$

$$\varphi = 0$$

$$z = 1 = \cos 0 + i \sin 0$$

$$\sqrt[6]{1} = \sqrt[6]{\cos 0 + i \sin 0} = \cos \frac{0 + 2\pi k}{6} + i \sin \frac{0 + 2\pi k}{6} = \cos \frac{\pi k}{3} + i \sin \frac{\pi k}{3}$$

$$k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$$k = 0: u_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

$$k = 1: u_1 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$k = 2: u_2 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$k = 3: u_3 = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

$$k = 4: u_4 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$k = 5: u_5 = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

