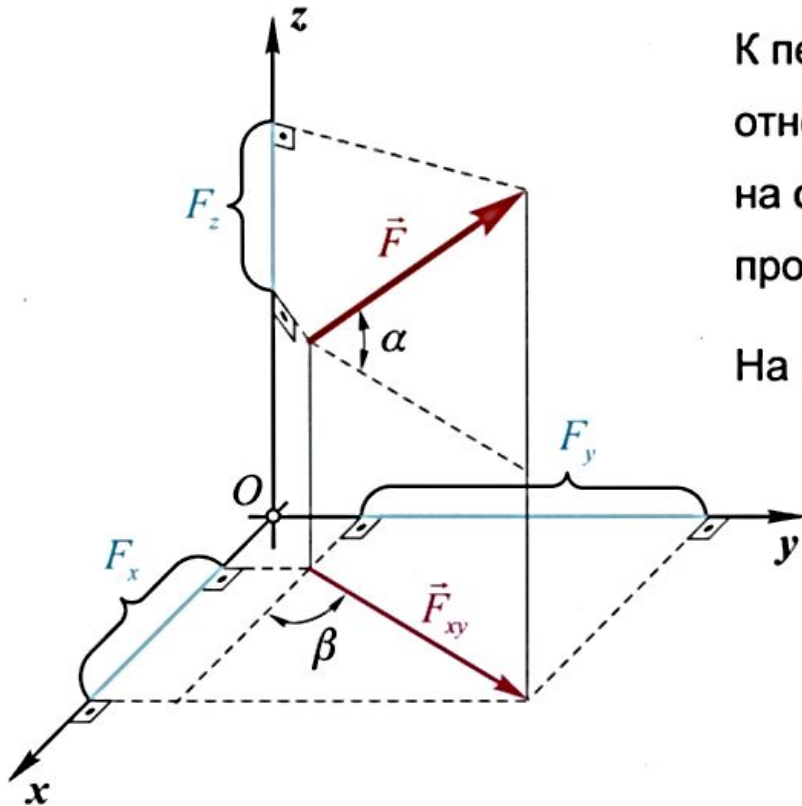


Статика

# СИЛЫ

**Статика** — наука о равновесии материальных объектов относительно каких-то других, изначально считающихся неподвижными (звезды, Солнце, Земля).



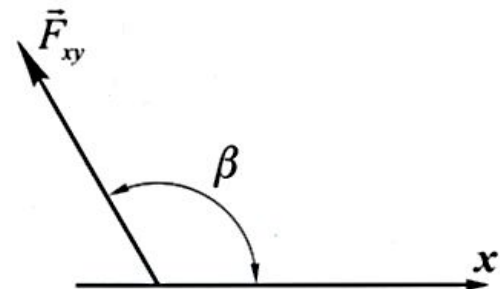
К первоначальным, неопределяемым через другие, относится понятие **силы**. Сила — вектор, ее действие на объект характеризуется тремя величинами — проекциями на оси координат.

На практике применяют двойное проецирование:

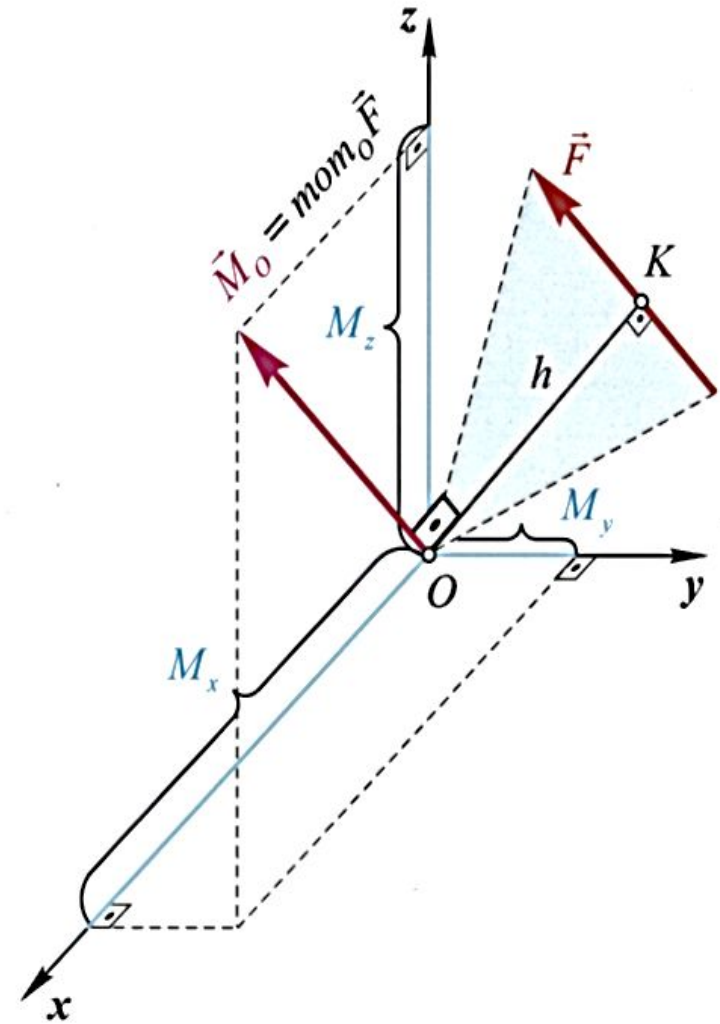
$$F_{xy} = F \cos \alpha; \quad F_x = F_{xy} \cos \beta = F \cos \alpha \cos \beta.$$

Размерность силы  $[H] = \left[ \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}^2} \right]$ .

Угол  $\beta$  может быть тупым, тогда проекция будет отрицательной величиной



# Момент силы



Момент силы относительно центра — вектор, перпендикулярный плоскости, образованной силой и центром.

Направлен в сторону, с которой мыслимый поворот плоскости под действием силы видится происходящим против часовой стрелки.

$$|\text{mom}_O \vec{F}| = M_O = h \cdot F.$$

$h$  — плечо силы — длина перпендикуляра  $OK$ .

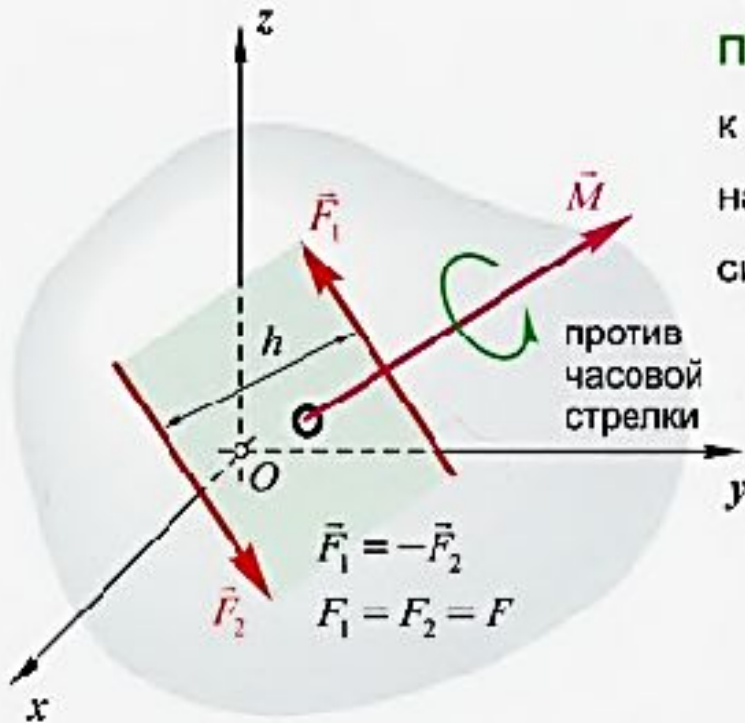
Проекция момента силы относительно центра на ось, содержащую этот центр, называется моментом силы относительно оси:

$$M_x = (\vec{M}_O)_x; \quad M_y = (\vec{M}_O)_y; \quad M_z = (\vec{M}_O)_z.$$

# Пара сил

Приводится в условиях задач как отдельное понятие.

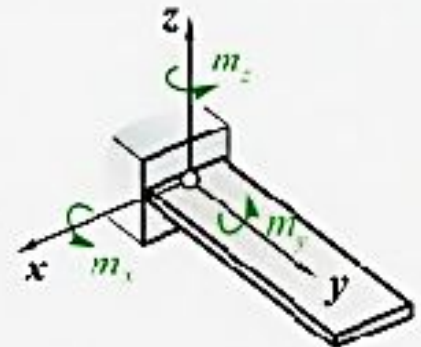
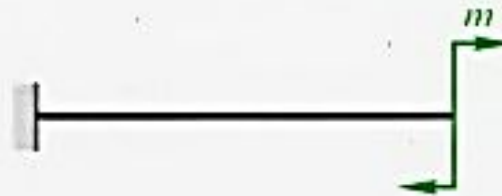
**Пару сил** представляют в виде двух сил, приложенных к твердому телу, равных по величине, и противоположно направленных. Расстояние между линиями действия сил пары — ее плечо.



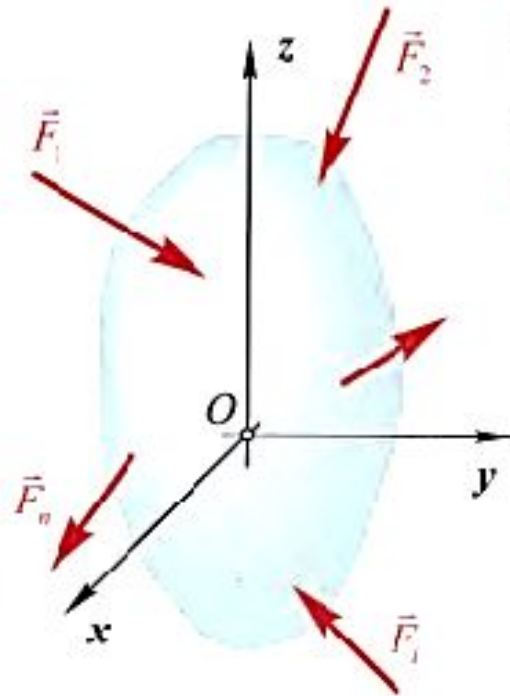
**Суммарный момент сил**, составляющих пару, **одинаков** относительно любого центра.

**Сумма проекций** сил пары на любую ось равна **нулю**. Поэтому действие пары сил на тело характеризуется только ее моментом, модуль которого  $M = F \cdot h$ .

## Условные обозначения



# Уравнение равновесия



Уравнения равновесия отражают сущность самого равновесия, покоя абсолютно твердого тела (АТТ).

АТТ — совокупность точек, расстояния между которыми неизменны.

Находится в точке произвольная точка  $O$ :

$$\sum_{i=1}^k \vec{F}_i = 0. \quad (1)$$

Тело не поворачивается вокруг этой точки:

$$\sum \text{mom}_O \vec{F}_i = 0. \quad (2)$$

Уравнения равновесия — проекции равенств (1) и (2) на оси:

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} = 0; \quad \sum F_{iy} = 0; \quad \sum F_{iz} = 0; \\ \sum \text{mom}_x \vec{F}_i = 0; \quad \sum \text{mom}_y \vec{F}_i = 0; \quad \sum \text{mom}_z \vec{F}_i = 0. \end{aligned}$$

Для равновесия абсолютно твердого тела необходимо и достаточно равенства нулю суммы проекций на какие-либо оси всех сил, на него действующих, а также равенства нулю суммы моментов этих сил относительно таких же осей.

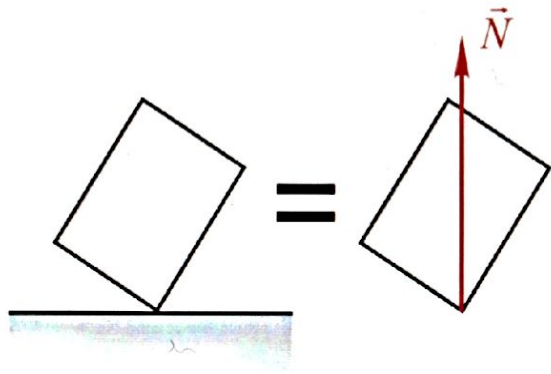
## СТАТИКА. Аксиома освобождения от связей

Какие либо устройства, ограничивающие движение тел и материальных точек называются **связями**.

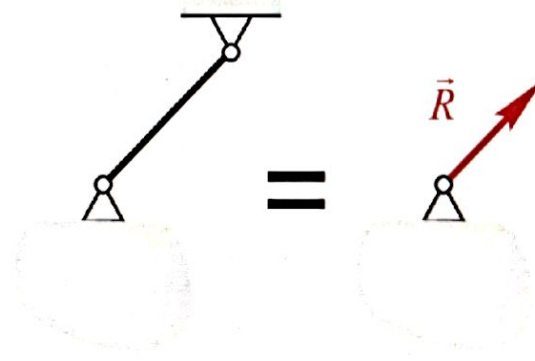
**Равновесие механической системы не изменится, если действие на нее связей заменить силами — реакциями связей.**

Связи классифицируют по числу ограничений, накладываемых на движение материальных точек и твердых тел. Каждому из таких ограничений соответствует составляющая реакции связи.

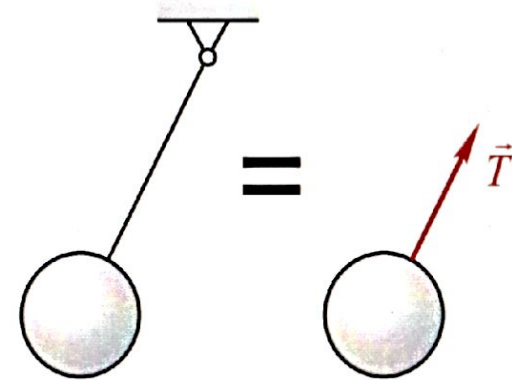
**Связи I-го рода — направление реакции заранее известно**



гладкая (без трения)  
плоскость



стержень

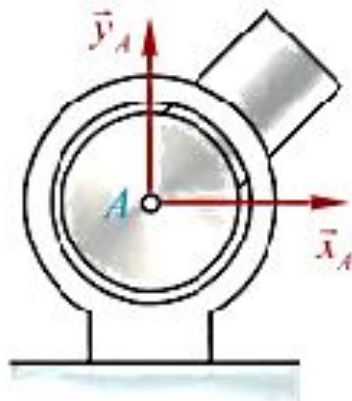


нить

# СТАТИКА. Аксиома освобождения от связей (продолжение)

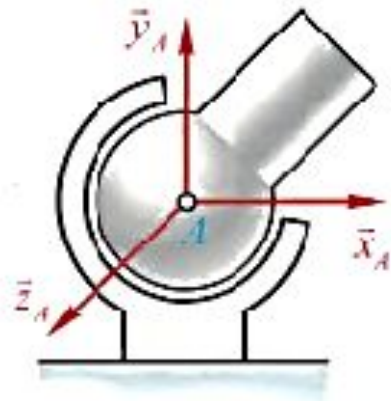
## Связи II-го рода — шарниры

цилиндрический шарнир



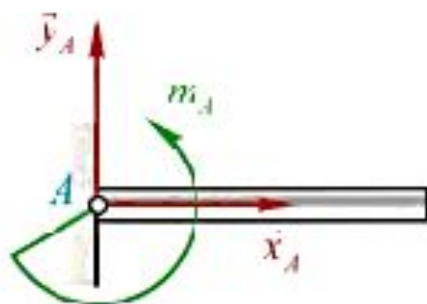
Запрещают перемещение точки твердого тела

сферический шарнир



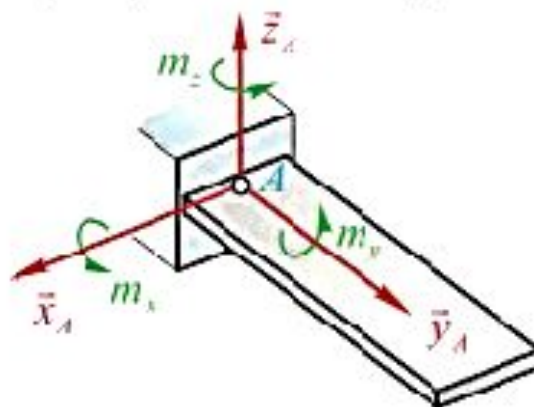
## Связь III-го рода — заделка

плоская заделка



Запрещает любые движения твердого тела

пространственная заделка



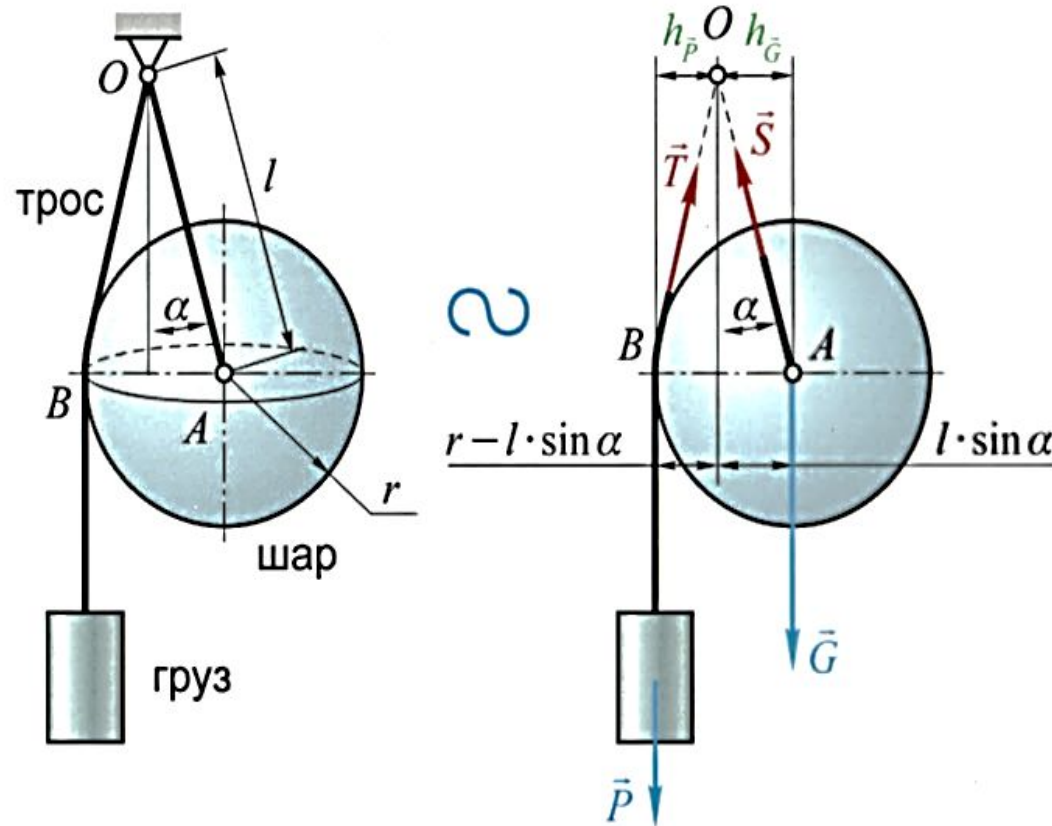
Силы по условию задачи можно расположить в одной плоскости

Решение задачи производится при произвольном расположении сил в пространстве

# Равновесие механической

## СИСТЕМЫ

Аксиомы «затвердевания» и «действия – противодействия» позволяют рассматривать равновесие механической системы как единого целого.



Определить угол  $\alpha$  при заданных весах шара  $G$  и груза  $P$ .

**Решение.**

Рассмотрим равновесие шара, прилегающего к нему троса и груза.

Заданные силы:  $\vec{P}$  и  $\vec{G}$ .

Связи: трос  $OA$  — реакция  $\vec{S}$ ;  
трос  $OB$  — реакция  $\vec{T}$ .

$$(\vec{P}; \vec{G}; \vec{T}; \vec{S}) \sim 0.$$

$$\sum \text{mom}_O \vec{F} = 0 = P(r - l \cdot \sin \alpha) - G \cdot l \cdot \sin \alpha;$$

$$P \cdot r = l \cdot \sin \alpha (G + P); \quad \sin \alpha = \frac{P}{P + G} \cdot \frac{r}{l}.$$



# Аксиома действия и противодействия

Две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по величине и противоположно направленными по прямой, соединяющей эти точки.

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}.$$

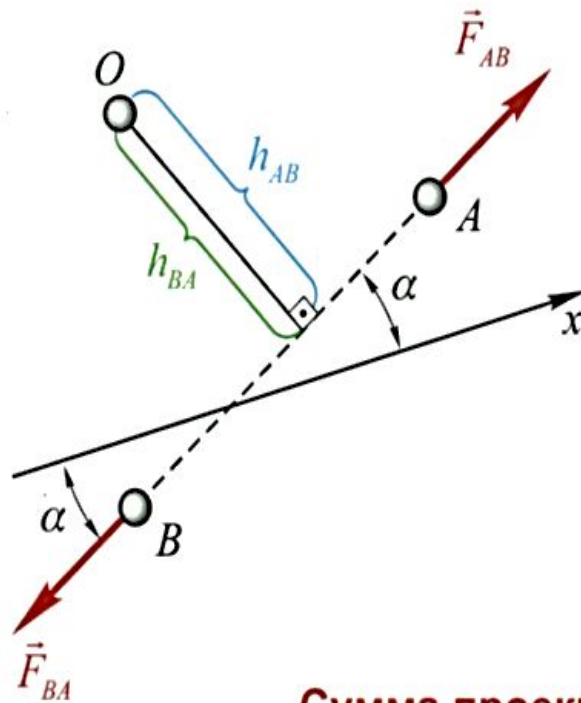
Силы взаимодействия между телами и точками, образующими механическую систему, называются внутренними.

**Сумма проекций внутренних сил на любую ось равна нулю.**

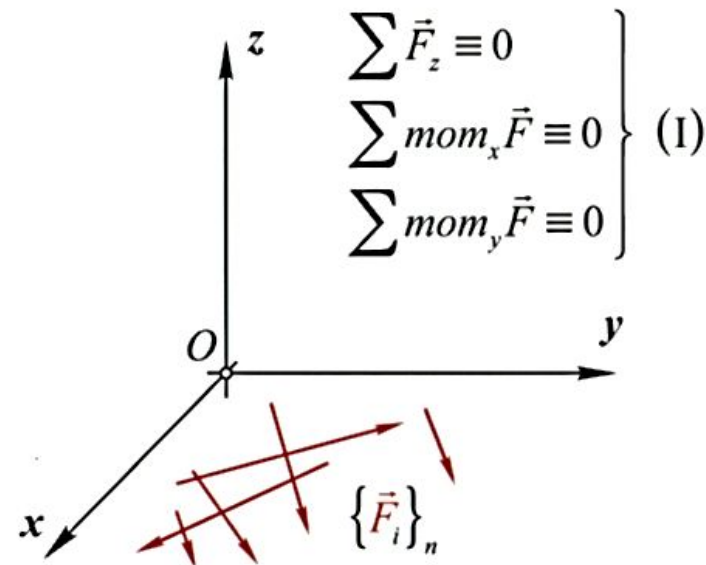
**Сумма моментов внутренних сил равна нулю относительно любого центра.**

Для любой внутренней силы найдется другая, парная, такая что:

$$-F_{BA} \cos \alpha = F_{AB} \cos \alpha; \quad -F_{BA} \cdot h_{BA} = F_{AB} \cdot h_{AB};$$



# Плоская система сил

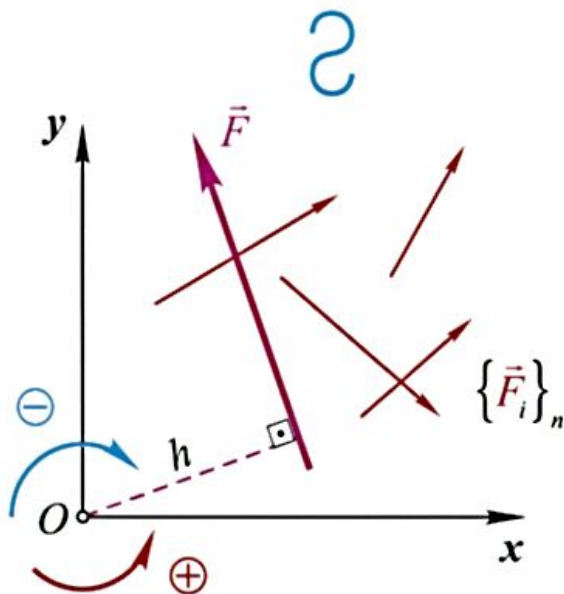


Пусть система сил располагается в плоскости  $xOy$ .

Тогда уравнения равновесия (I) выполняются тождественно, то есть в виде  $0 \equiv 0$ .

Независимых уравнений остается только три:

$$\sum F_{ix} = 0; \quad \sum F_{iy} = 0; \quad \sum \text{mom}_z \vec{F} = 0.$$



Вводится понятие алгебраического момента силы относительно центра.

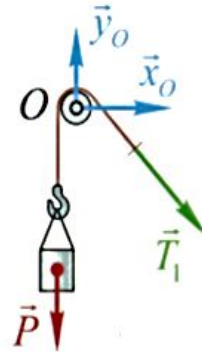
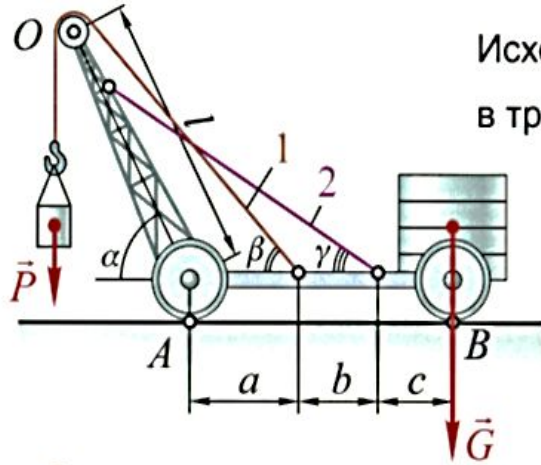
Момент силы относительно центра есть произведение модуля силы на ее плечо — длину перпендикуляра, опущенного из центра на линию действия силы:

$$M_O = \pm F \cdot h.$$

Правило знаков усматривается из рисунка.

# Пример. Силы внешние и внутренние

Исходя из схемы передвижного подъемного крана определить усилия в тросах 1 и 2 ( $T_1; T_2$ ) и реакции опор  $A$  и  $B$  при весах груза  $\vec{P}$  и противовеса  $\vec{G}$ .



I. Рассмотрим равновесие груза, блока  $O$  и соединяющего их троса:

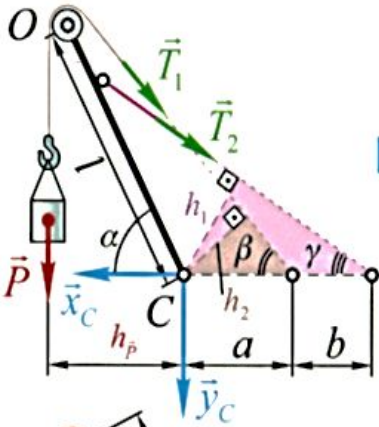
$$(\vec{P}; \vec{T}_1; \vec{x}_0; \vec{y}_0) \sim 0;$$

$$\sum \text{mom}_O \vec{F} = 0 \Rightarrow P \cdot r - T_1 \cdot r = 0 \Rightarrow T_1 = P.$$

II. Рассмотрим равновесие стрелы крана  $CO$ , груза, блока и прилегающих частей тросов:

$$(\vec{P}; \vec{x}_C; \vec{y}_C; \vec{T}_1; \vec{T}_2) \sim 0; \text{ Считаем, что } l \gg r; \sum \text{mom}_C \vec{F} = 0 \Rightarrow$$

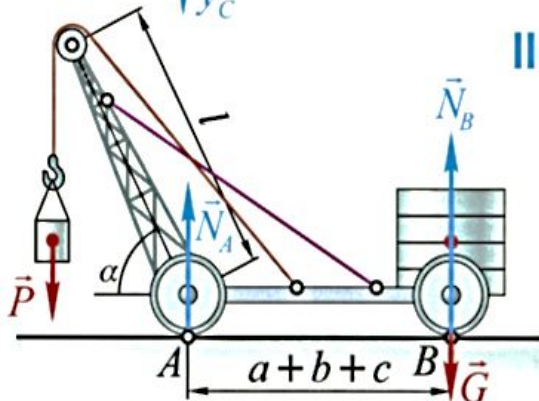
$$\Rightarrow Pl \cos \alpha - T_1 a \sin \beta - T_2 (a+b) \sin \gamma = 0; \quad T_2 = P \frac{l \cos \alpha - a \sin \beta}{(a+b) \sin \beta}.$$



III. Рассмотрим равновесие крана с грузом:  $(\vec{P}; \vec{G}; \vec{N}_A; \vec{N}_B) \sim 0.$

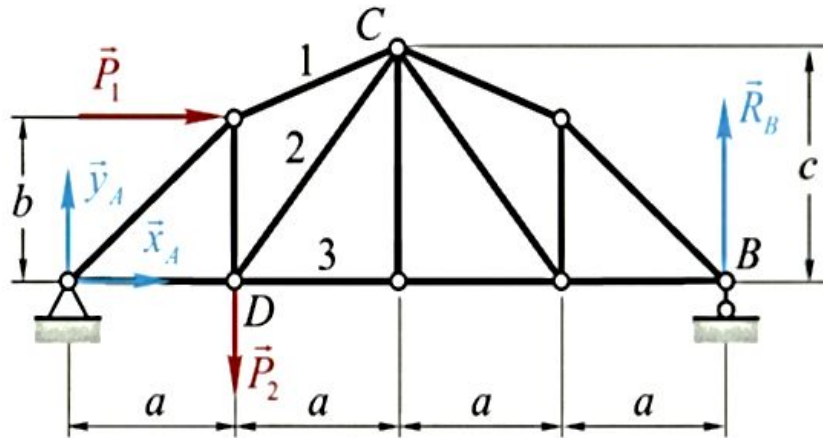
$$\left\{ \begin{array}{l} \sum \text{mom}_B \vec{F} = 0 \Rightarrow P(a+b+c+l \cos \alpha) - N_A(a+b+c) = 0; \\ \sum F_y = 0 \Rightarrow N_A + N_B - P - G = 0. \end{array} \right.$$

$$N_A = P \frac{a+b+c+l \cos \alpha}{a+b+c}; \quad N_B = G - P \frac{l \cos \alpha}{a+b+c}, \text{ требуется, чтобы } N_B > 0.$$



# Метод Риттера

**Метод Риттера** позволяет определить усилия в невесомых стержнях, образующих ферму — конструкцию, нагрузки на которую состоят из сосредоточенных сил, действующих в шарнирах крепления стержней друг к другу.



В статически определимых фермах всегда есть поперечные сечения стержней, в которых усилия найдутся из уравнений равновесия.

Из равновесия всей фермы:

$$(\vec{P}_1; \vec{P}_2; \vec{x}_A; \vec{y}_A; \vec{R}_B) \sim 0;$$

$$\sum \text{mom}_A \vec{F} = 0 = P_2 a + P_1 b - R_B \cdot 4a; \quad R_B = \frac{P_2 a + P_1 b}{4a}.$$

Из равновесия отсеченной части:

$$(\vec{S}_1; \vec{S}_2; \vec{S}_3; \vec{R}_B) \sim 0;$$

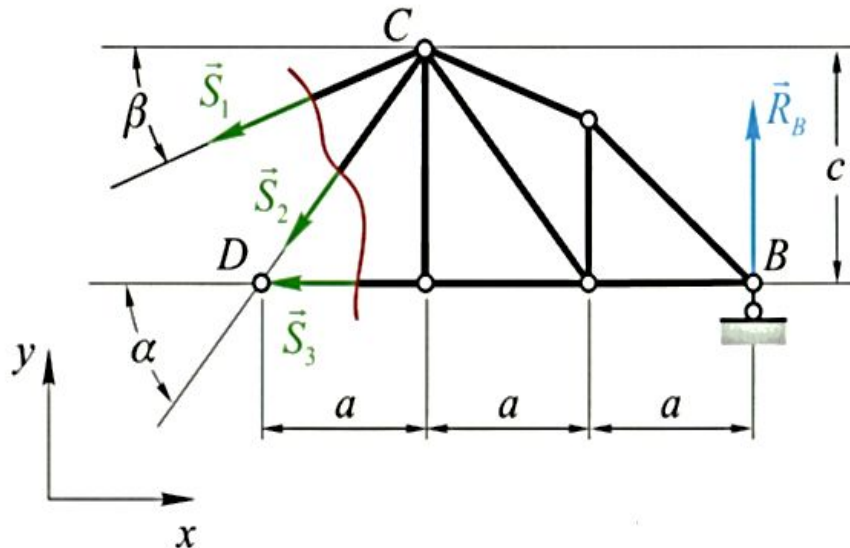
$$\sum \text{mom}_C \vec{F} = R_B \cdot 2a - S_3 c = 0;$$

$$\sum \text{mom}_D \vec{F} = R_B \cdot 3a + S_1 c \cdot \cos \beta = 0;$$

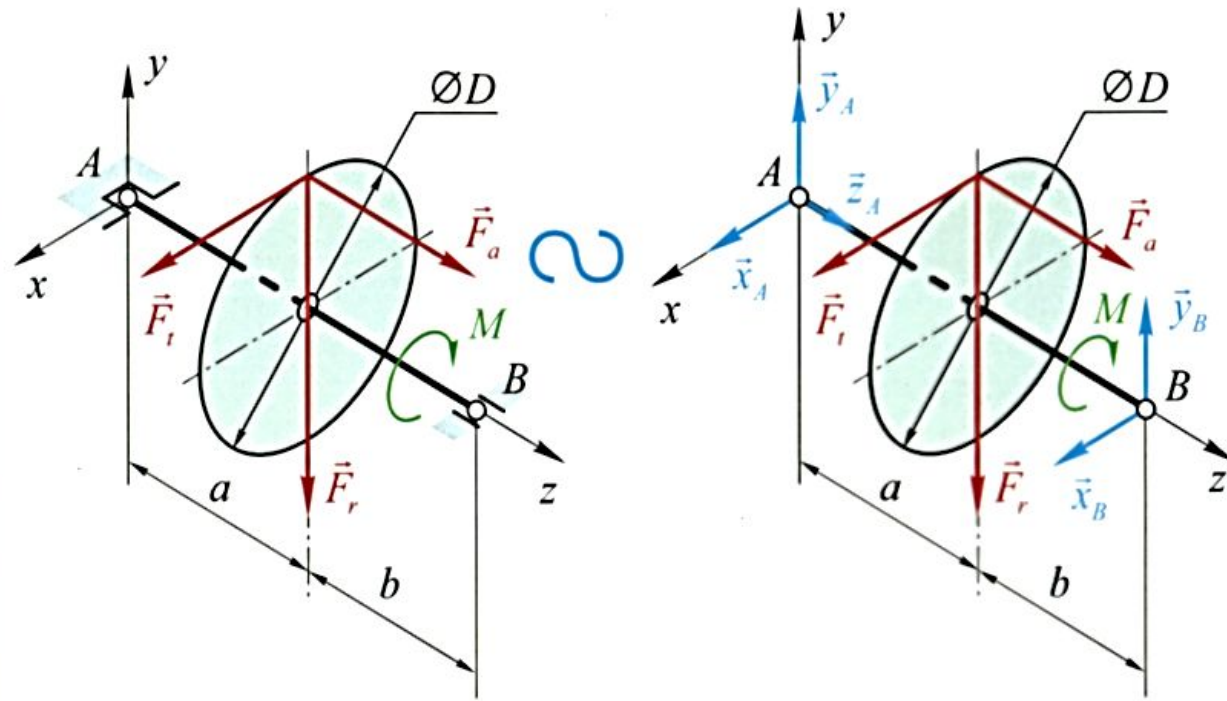
$$\sum F_y = S_1 \cos \beta + S_2 \cos \alpha = 0.$$

Система уравнений замкнутая.

$$\alpha = \arctg \frac{c}{a}; \quad \beta = \arctg \frac{c-b}{a}.$$



# Пространственная система сил



Зубчатое колесо насажено на вал, на который действует пара сил с моментом  $M$ .

Определить реакции на вал подпятника  $A$  и подшипника  $B$ .

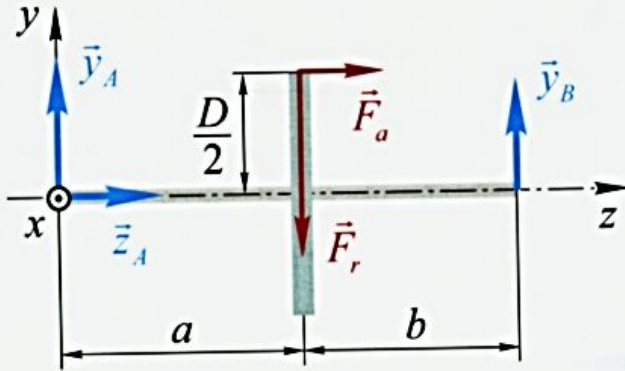
$$\vec{F}_t \parallel x; \quad \vec{F}_r \parallel y; \quad \vec{F}_a \parallel z.$$

$F_a, F_r$  определяются через  $F_t$ .  
(будет рассмотрено в разделе "Детали машин".)

1. Рассмотрим равновесие вала с колесом.
2. Заданные силы:  $\vec{F}_t; \vec{F}_r; \vec{F}_a; M$ .
3. Связи: подпятник  $A$  (реакции  $\vec{x}_A; \vec{y}_A; \vec{z}_A$ ); подшипник  $B$  ( $\vec{x}_B; \vec{y}_B$ ).
4.  $(\vec{F}_t; \vec{F}_r; \vec{F}_a; M; \vec{x}_A; \vec{y}_A; \vec{z}_A; \vec{x}_B; \vec{y}_B) \sim 0$ .

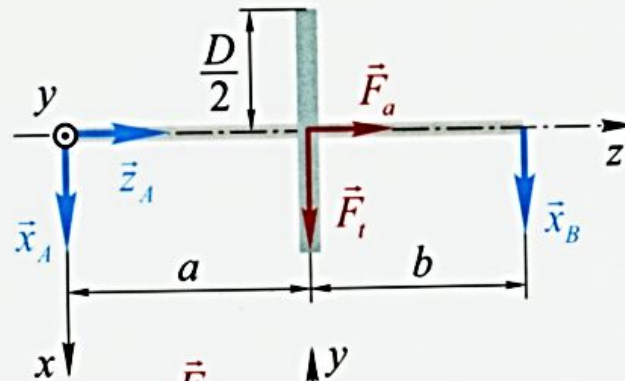
# Пример. Пространственная система сил

5. Уравнения равновесия:



$$\sum F_y = 0 = -F_r + y_A + y_B; \quad y_A = F_r - y_B.$$

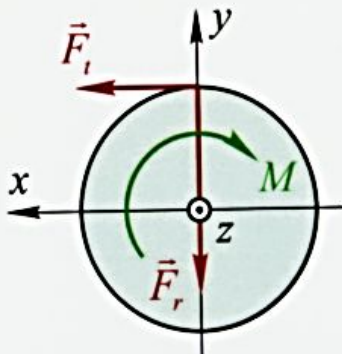
$$\sum \text{mom}_x \vec{F} = 0 = -\vec{F}_a \frac{D}{2} - F_r \cdot a + y_B(a+b); \quad y_B = \frac{F_a \frac{D}{2} + F_r \cdot a}{a+b}.$$



$$\sum F_x = 0 = F_t + x_A + x_B; \quad x_A = F_t - x_B.$$

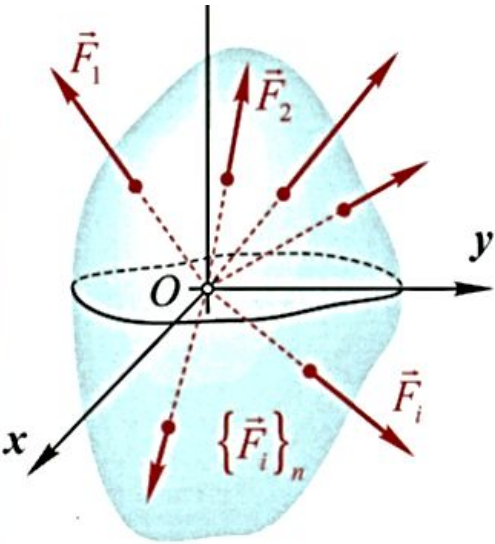
$$\sum \text{mom}_y \vec{F} = 0 = -F_t \cdot a - x_B(a+b); \quad x_B = -F_t \frac{a}{a+b}.$$

$$\sum F_z = F_A + z_A; \quad z_A = F_a.$$



$$\sum \text{mom}_z \vec{F} = 0 = -M + F_t \cdot \frac{D}{2}; \quad F_t = \frac{2M}{D}.$$

# Сходящаяся система сил



В такой системе линии действия сил пересекаются в одной точке.

Тождественно выполняются (типа  $0 \equiv 0$ ) уравнения равновесия:

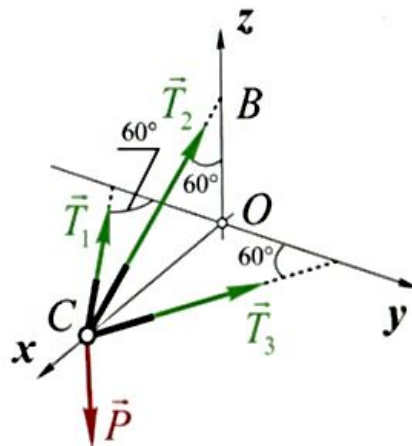
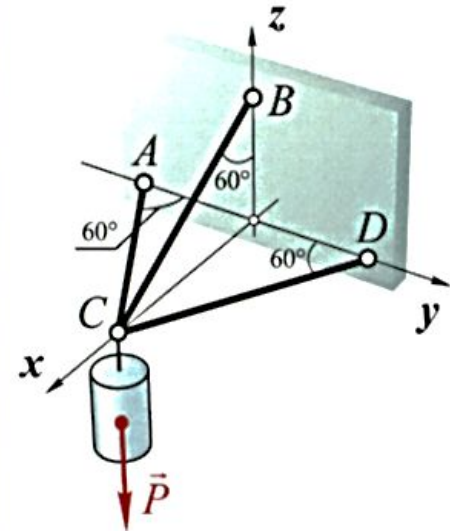
$$\sum_{i=1}^n \text{mom}_O \vec{F}_i \equiv 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^n \text{mom}_x \vec{F}_i \equiv 0; \quad \sum_{i=1}^n \text{mom}_y \vec{F}_i \equiv 0; \quad \sum_{i=1}^n \text{mom}_z \vec{F}_i \equiv 0.$$

Для определения реакций связей остаются только три уравнения:

$$\sum F_{ix} = 0; \quad \sum F_{iy} = 0; \quad \sum F_{iz} = 0.$$

**Пример.** Определить усилия в стержнях, удерживающих груз весом  $\vec{P}$ .

Рассмотрим равновесие болта шарнира C:  $(\vec{P}; \vec{T}_1; \vec{T}_2; \vec{T}_3) \sim 0$ .



$$\sum F_x = 0 = -T_1 \sin 60^\circ - T_2 \sin 60^\circ - T_3 \sin 60^\circ;$$

$$\sum F_y = 0 = -T_1 \cos 60^\circ + T_3 \cos 60^\circ;$$

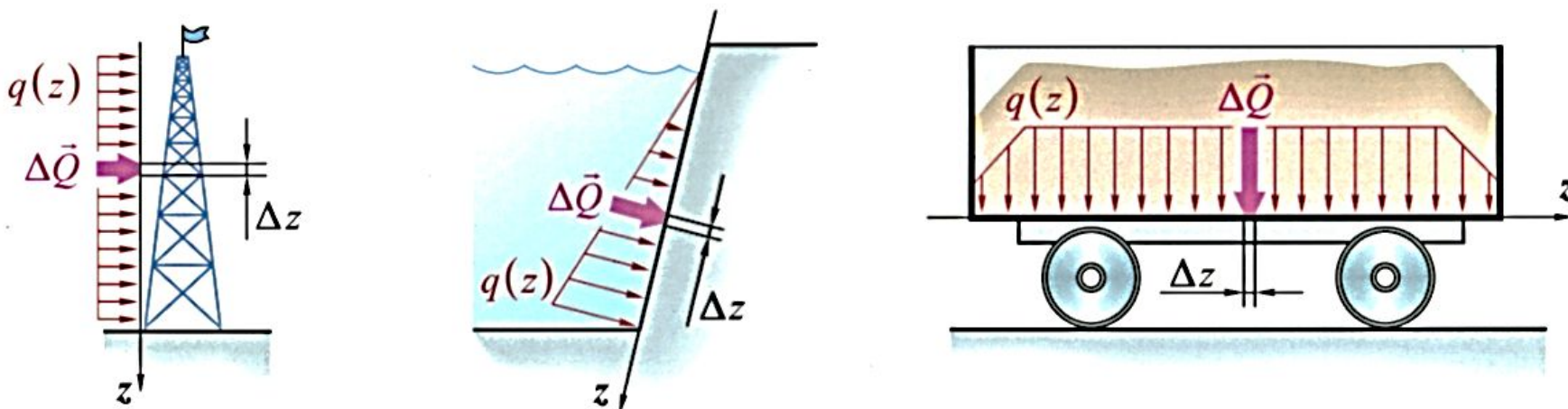
$$\sum F_z = 0 = -P + T_2 \cos 60^\circ.$$

$$T_2 = 2P; \quad T_1 = T_3 = \frac{1}{2} T_2 = -P.$$

$T_i$  — силы, с которыми стержни растягиваются (+) или сжимаются (-)

# Распределенные нагрузки

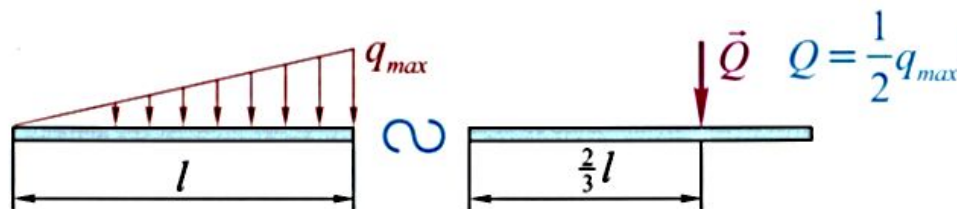
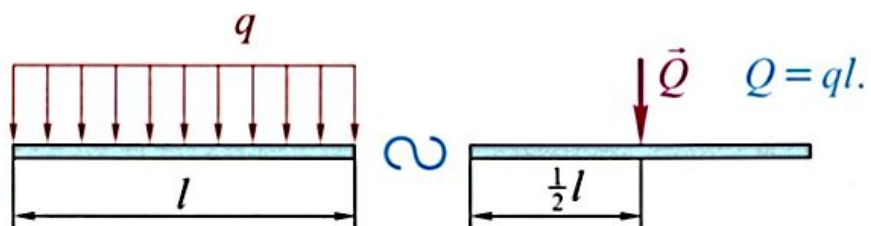
Распределенные нагрузки возникают, если площадь контакта взаимодействующих тел соизмерима с площадью их поверхности (ветровая нагрузка, давление воды на плотину, насыпной груз в вагоне и т. д.).



Распределенные нагрузки задаются интенсивностью. При плоской нагрузке:

$$q(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta z} = \frac{dQ}{dz}; \quad \Delta Q \text{ — нагрузка, приходящаяся на участок } \Delta z \text{ с координатой } z.$$

В простейших случаях:





# Пример.

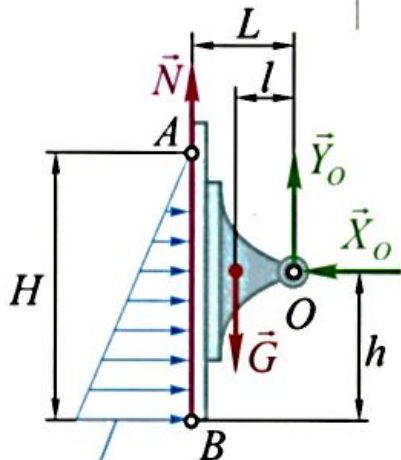
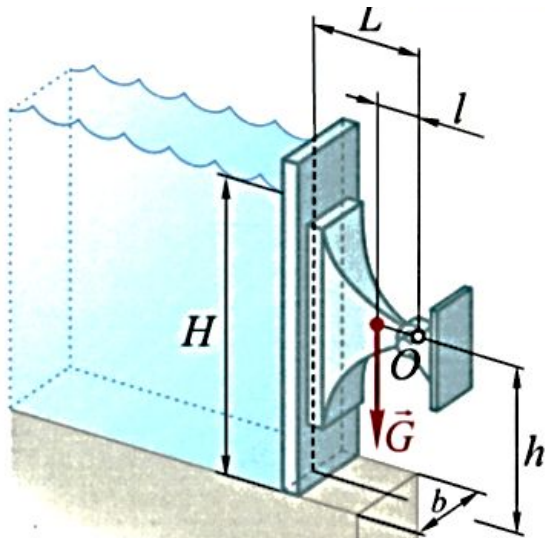
Определить усилие в шарнире  $O$  затвора плотины весом  $G$ .

Давление  $p$  в жидкости определяется глубиной и одинаково по всем направлениям. Давление равно весу столба жидкости единичной площади в основании, и высотой равной глубине:

$$p_A = 0; \quad p_B = \gamma \cdot H \cdot g; \quad \gamma \text{ — удельная масса воды.}$$

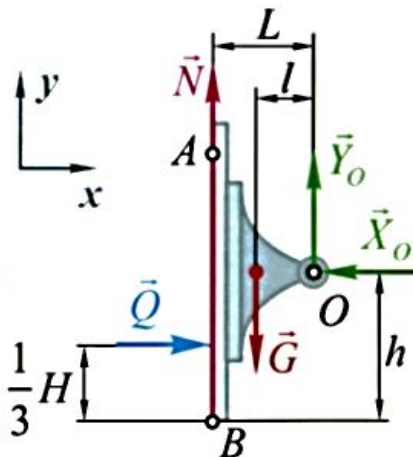
Рассмотрим равновесие затвора:

$$(\vec{G}; \vec{Q}; \vec{X}_O; \vec{Y}_O; \vec{N}) \approx 0.$$



$$q_{max} = \gamma \cdot H \cdot g \cdot b$$

~



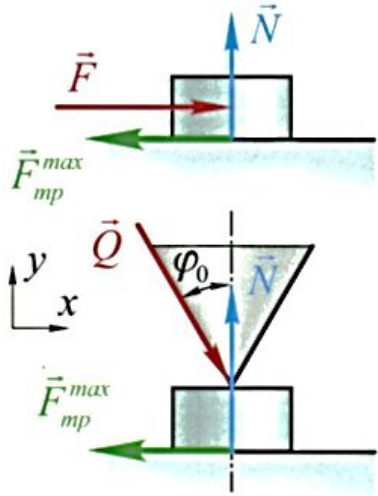
$$Q = \frac{1}{2} H \cdot q_{max} = \frac{1}{2} \gamma \cdot H^2 \cdot g \cdot b$$

$$(*) \begin{cases} \sum F_x = 0 = Q - X_O; \\ \sum F_y = 0 = -G + N + Y_O; \\ \sum \text{mom}_O \vec{F} = 0 = N \cdot L - G \cdot l - Q \left( h - \frac{1}{3} H \right). \end{cases}$$

Система уравнений (\*) — замкнутая, состоит из трех уравнений с тремя неизвестными:  $N; X_O; Y_O$ .

# Трение

**Трение скольжения** возникает при попытке «сдвинуть» одно тело относительно другого; появляется сила трения скольжения  $\vec{F}_{mp}$ .



Тело передвинется, если только  $F \geq F_{mp}^{max}$ ;  $F_{mp}^{max} = f \cdot N$ ;

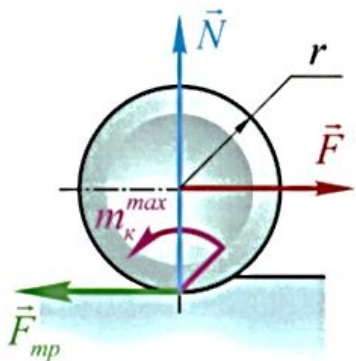
$f$  — коэффициент трения скольжения.

Из равновесия тела  $(\vec{Q}; \vec{N}; \vec{F}_{mp}^{max}) \sim 0$ .

$$\sum F_y = 0 = -Q \cos \varphi_0 + N; \quad \sum F_x = 0 = Q \sin \varphi_0 - F_{mp}^{max} = 0.$$

Тело может сдвинуться, если  $\operatorname{tg} \varphi_0 \geq f$ .  $\varphi$  — угол трения;  $\varphi = \operatorname{arctg} f$ .

**Трение качения** возникает при попытке «перекатить» друг относительно друга тела с криволинейной поверхностью; появляется пара трения качения с моментом  $m_k$ .

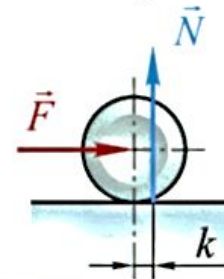


Колесо покатится, если только

$F \cdot r \geq m_k^{max}$ ;  $m_k^{max} = k \cdot N$ ;  $k$  — коэффициент трения качения.

Минимальная сила  $F = \frac{k \cdot N}{r}$ .

Чем больше радиус  $r$  —  
— тем меньше сила  $F$ .



$k$  — размерная величина [м]

# Центр тяжести

**Центр тяжести** — точка твердого тела, при закреплении которой само тело находится в равновесии в **любом** положении.

Сумма моментов сил веса частей тела относительно его центра тяжести равна нулю в **любом** положении тела:

$$\sum_i \text{mom}_{y_1} \vec{P}_i = 0 \Rightarrow \sum m_i g (x_c - x_i) = 0$$

$$\sum_i \text{mom}_{x_1} \vec{P}_i = 0 \Rightarrow \sum m_i g (y_c - y_i) = 0$$

Следовательно, координаты центра тяжести

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}; \quad y_c = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}; \quad \text{по аналогии} \quad z_c = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}.$$

**Пример.** Определить положение центра тяжести однородной пластины с отверстием радиуса  $r$ .

$$x_c = \frac{a \cdot b \cdot \frac{b}{2} + \frac{1}{2} a c \left( b + \frac{c}{3} \right) - \pi r^2 \cdot \frac{b}{3}}{a \cdot b + \frac{1}{2} a \cdot c - \pi r^2};$$

$$y_c = \frac{a \cdot b \cdot \frac{a}{2} + \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \frac{a}{3} - \pi r^2 \cdot \frac{a}{2}}{a \cdot b + \frac{1}{2} a \cdot c - \pi r^2}.$$

Площадь круга как отверстия взята со знаком «-».

