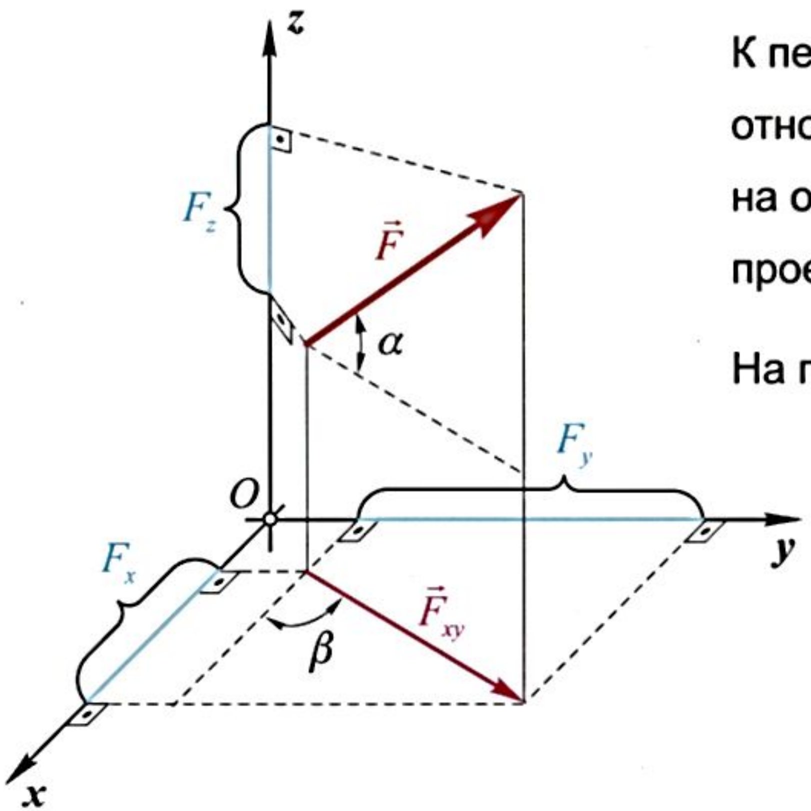
Статика

Силы

Статика — наука о равновесии материальных объектов относительно каких-то других, изначально считающихся неподвижными (звезды, Солнце, Земля).



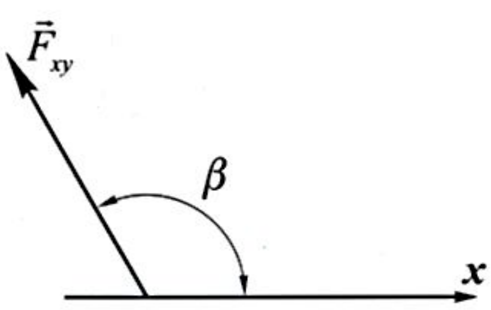
К первоначальным, неопределяемым через другие, относится понятие **силы**. Сила — вектор, ее действие на объект характеризуется тремя величинами — проекциями на оси координат.

На практике применяют двойное проецирование:

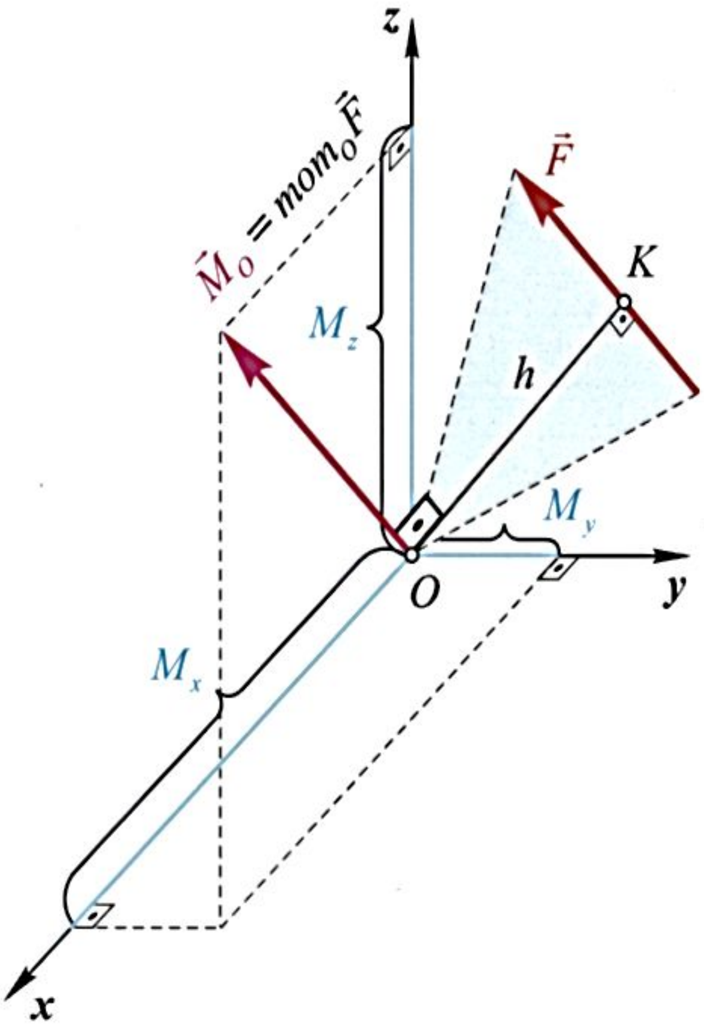
$$F_{xy} = F\cos\alpha; \quad F_x = F_{xy}\cos\beta = F\cos\alpha\cos\beta.$$

Размерность силы $[H] = \left[\dfrac{кг \cdot м}{c^2}\right].$

Угол β может быть тупым, тогда проекция будет отрицательной величиной



Момент силы



Момент силы относительно центра — вектор, перпендикулярный плоскости, образованной силой и центром.

Направлен в сторону, с которой мыслимый поворот плоскости под действием силы видится происходящим против часовой стрелки.

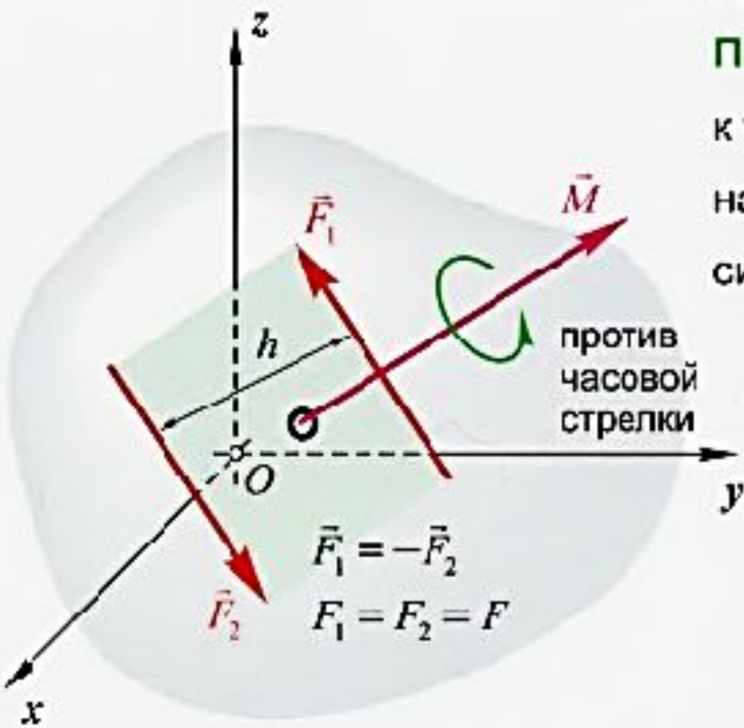
$$\left|mom_O\vec{F}\right| = M_O = h \cdot F.$$

h — плечо силы — длина перпендикуляра OK.

Проекция момента силы относительно центра на ось, содержащую этот центр, называется моментом силы относительно оси:

$$M_x = \left(\vec{M}_O\right)_x; \quad M_y = \left(\vec{M}_O\right)_y; \quad M_z = \left(\vec{M}_O\right)_z.$$

Пара сил



Приводится в условиях задач как отдельное понятие.

Пару сил представляют в виде двух сил, приложенных к твердому телу, равных по величине, и противоположно направленных. Расстояние между линиями действия сил пары — ее плечо.

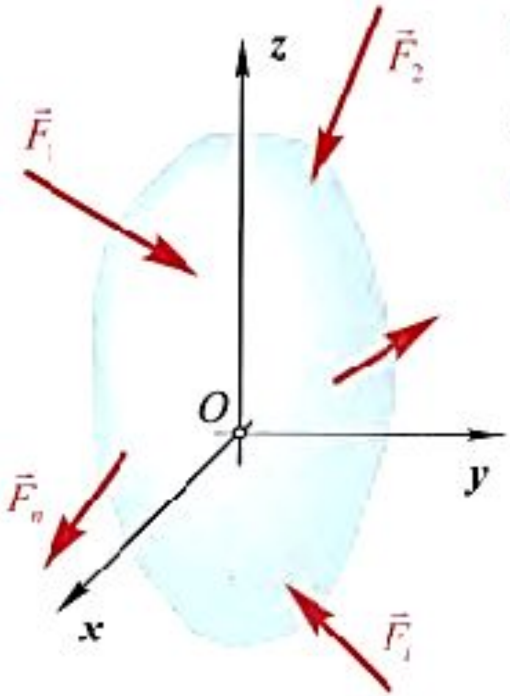
Суммарный момент сил, составляющих пару, **одинаков** относительно любого центра.

Сумма проекций сил пары на любую ось равна **нулю**.

Поэтому действие пары сил на тело характеризуется только ее моментом, модуль которого $M = F \cdot h$.

Условные обозначения

Уравнение равновесия



Уравнения равновесия отражают сущность самого равновесия, покоя абсолютно твердого тела (АТТ).

АТТ — совокупность точек, расстояния между которыми неизменны.

Находится в покое произвольная точка O:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0. \qquad (1)$$

Тело не поворачивается вокруг этой точки:

$$\sum mom_o \vec{F}_i = 0. \qquad (2)$$

Уравнения равновесия — проекции равенств (1) и (2) на оси:

$$\sum F_{ix} = 0; \quad \sum F_{iy} = 0; \quad \sum F_{iz} = 0;$$

$$\sum mom_x \vec{F}_i = 0; \quad \sum mom_y \vec{F}_i = 0; \quad \sum mom_z \vec{F}_i = 0.$$

Для равновесия абсолютно твердого тела необходимо и достаточно равенства нулю суммы проекций на какие-либо оси всех сил, на него действующих, а также равенства нулю суммы моментов этих сил относительно таких же осей.

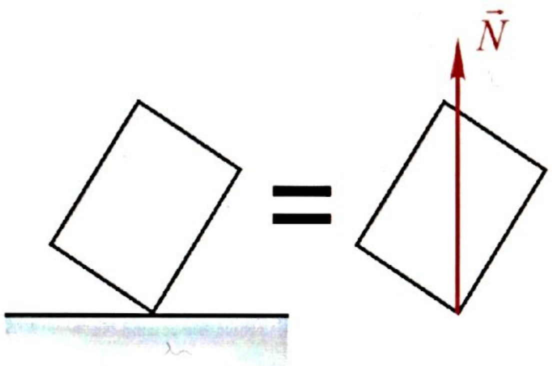
СТАТИКА. Аксиома освобождаемости от связей

Какие либо устройства, ограничивающие движение тел и материальных точек называются связями.

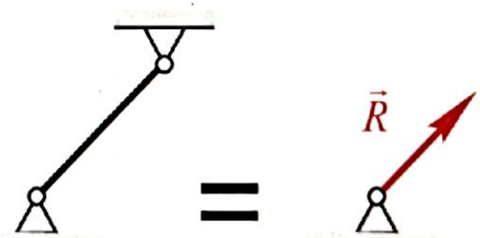
Равновесие механической системы не изменится, если действие на нее связей заменить силами — реакциями связей.

Связи классифицируют по числу ограничений, накладываемых на движение материальных точек и твердых тел. Каждому из таких ограничений соответствует составляющая реакции связи.

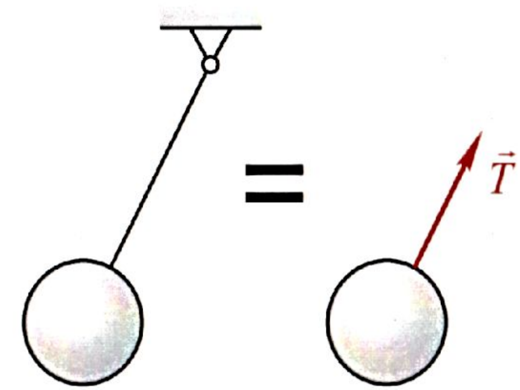
Связи I-го рода — направление реакции заранее известно



гладкая (без трения) плоскость



стержень

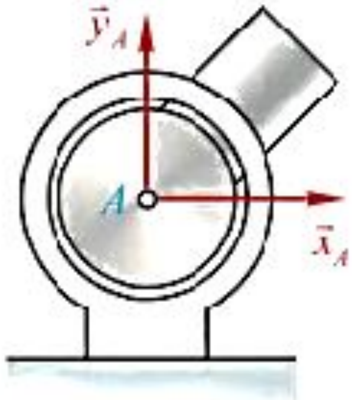


нить

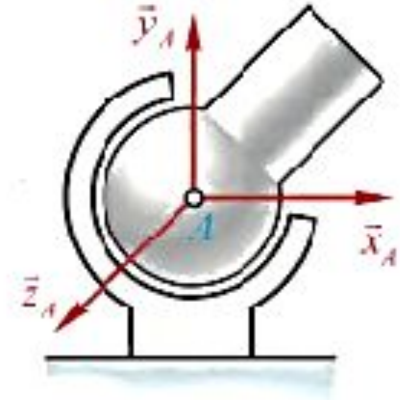
СТАТИКА. Аксиома освобождаемости от связей (продолжение)

Связи II-го рода — шарниры

цилиндрический шарнир



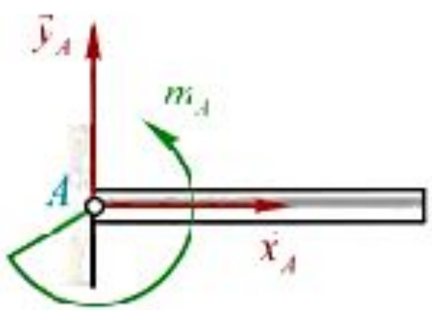
сферический шарнир



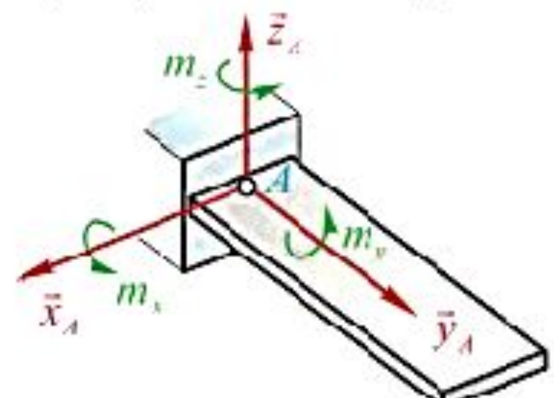
Запрещают перемещение точки твердого тела

Связь III-го рода — заделка

плоская заделка



пространственная заделка



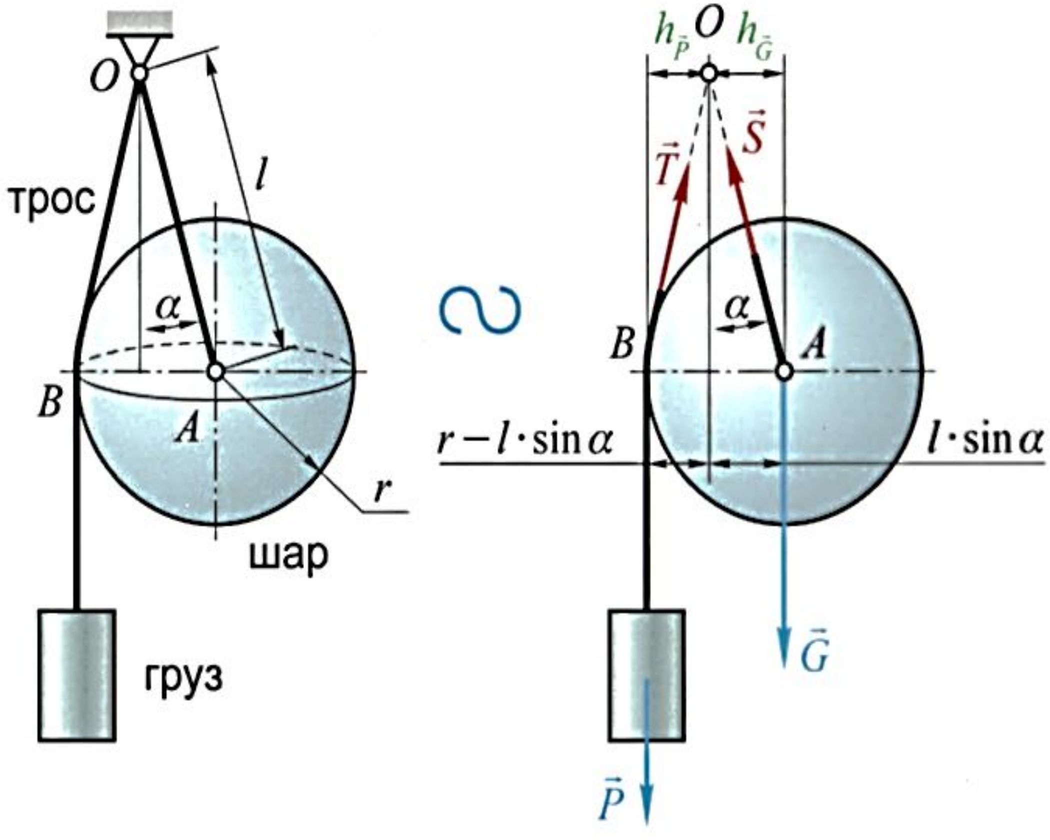
Запрещает любые движения твердого тела

Силы по условию задачи можно расположить в одной плоскости

Решение задачи производится при произвольном расположении сил в пространстве

Равновесие механической системы

Аксиомы «затвердевания» и «действия – противодействия» позволяют рассматривать равновесие механической системы как единого целого.



Определить угол α при заданных весах шара G и груза P.

Решение.

Рассмотрим равновесие шара, прилегающего к нему троса и груза.

Заданные силы: $\vec{P}$ и $\vec{G}$.

Связи: трос OA — реакция $\vec{S}$;

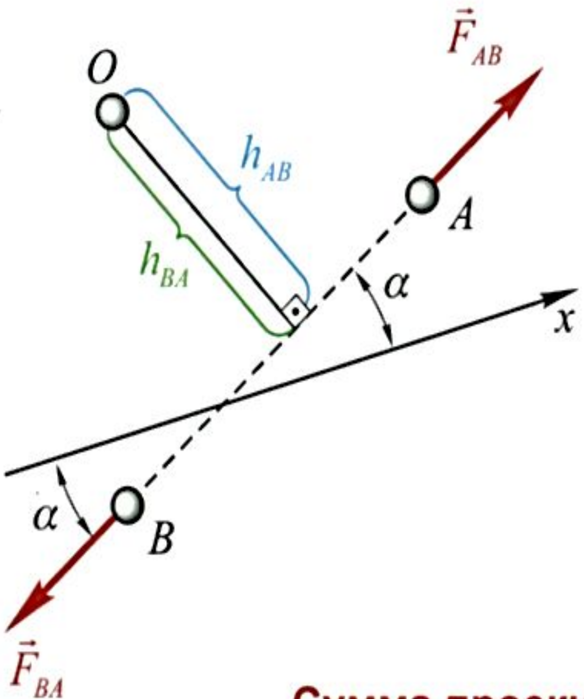
трос OB — реакция $\vec{T}$.

$$\left(\vec{P}; \vec{G}; \vec{T}; \vec{S}\right) \sim 0.$$

$$\sum mom_O \vec{F} = 0 = P(r - l\cdot\sin\alpha) - G\cdot l\cdot\sin\alpha;$$

$$P\cdot r = l\cdot\sin\alpha(G+P); \quad \sin\alpha = \frac{P}{P+G}\cdot\frac{r}{l}.$$

Аксиома действия и противодействия



Две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по величине и противоположно направленными по прямой, соединяющей эти точки.

$$\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}.$$

Силы взаимодействия между телами и точками, образующими механическую систему, называются внутренними.

Сумма проекций внутренних сил на любую ось равна нулю.

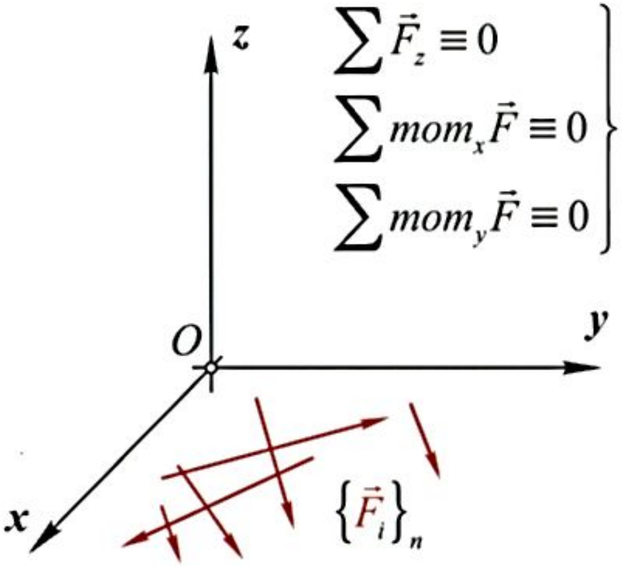
Сумма моментов внутренних сил равна нулю относительно любого центра

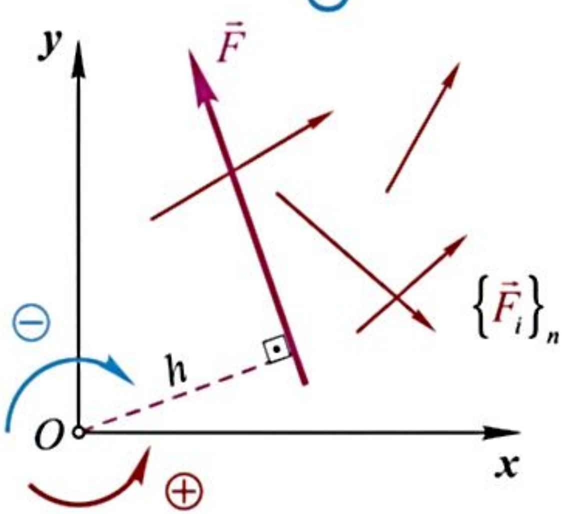
Для любой внутренней силы найдется другая, парная, такая что:

$$-F_{BA}\cancel{\cos}\alpha = F_{AB}\cancel{\cos}\alpha; \quad -F_{BA}\cdot h_{BA} = F_{AB}\cdot h_{AB};$$

Плоская система сил

$$\left.\begin{aligned}\sum \vec{F}_z &\equiv 0\\ \sum mom_x\vec{F} &\equiv 0\\ \sum mom_y\vec{F} &\equiv 0\end{aligned}\right\}\ (\mathrm{I})$$





Пусть система сил располагается в плоскости xOy.
Тогда уравнения равновесия (I) выполняются тождественно, то есть в виде $0\equiv 0$.
Независимых уравнений остается только три:

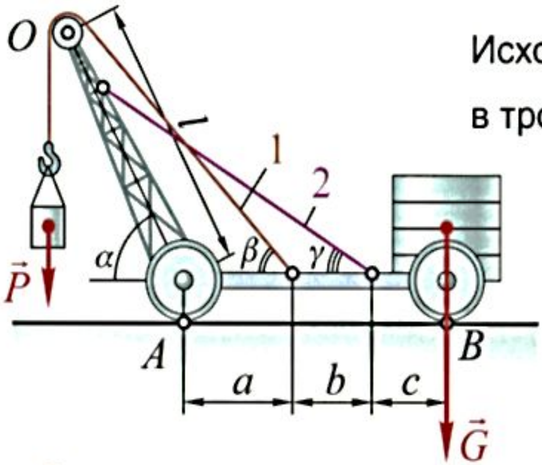
$$\sum F_{ix}=0;\quad \sum F_{iy}=0;\quad \sum mom_z\vec{F}=0.$$

Вводится понятие алгебраического момента силы относительно центра.
Момент силы относительно центра есть произведение модуля силы на ее плечо — длину перпендикуляра, опущенного из центра на линию действия силы:

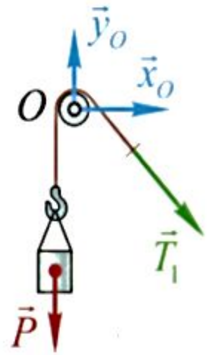
$$M_O=\pm F\cdot h.$$

Правило знаков усматривается из рисунка.

Пример. Силы внешние и внутренние



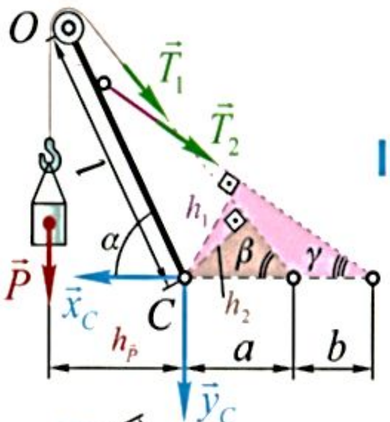
Исходя из схемы передвижного подъемного крана определить усилия в тросах 1 и 2 $(T_1; T_2)$ и реакции опор A и B при весах груза $\vec{P}$ и противовеса $\vec{G}$.



I. Рассмотрим равновесие груза, блока O и соединяющего их троса:

$$(\vec{P}; \vec{T}_1; \vec{x}_O; \vec{y}_O) \backsim 0;$$

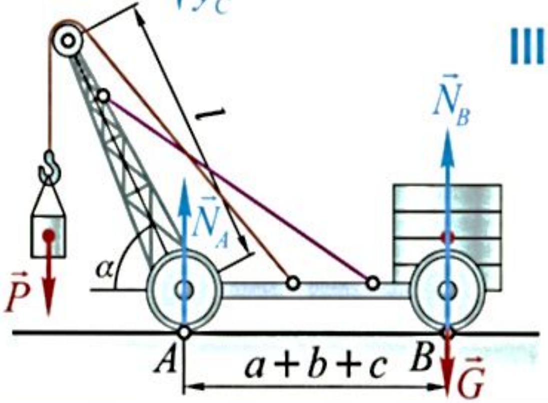
$$\sum mom_O \vec{F} = 0 \;\Rightarrow\; P \cdot r - T_1 \cdot r = 0 \;\Rightarrow\; T_1 = P.$$



II. Рассмотрим равновесие стрелы крана CO, груза, блока и прилегающих частей тросов:

$$(\vec{P}; \vec{x}_C; \vec{y}_C; \vec{T}_1; \vec{T}_2) \backsim 0; \quad \text{Считаем, что } l \gg r; \quad \sum mom_C \vec{F} = 0 \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow Pl\cos\alpha - T_1 a \sin\beta - T_2 (a+b)\sin\gamma = 0; \quad T_2 = P\frac{l\cos\alpha - a\sin\beta}{(a+b)\sin\beta}.$$



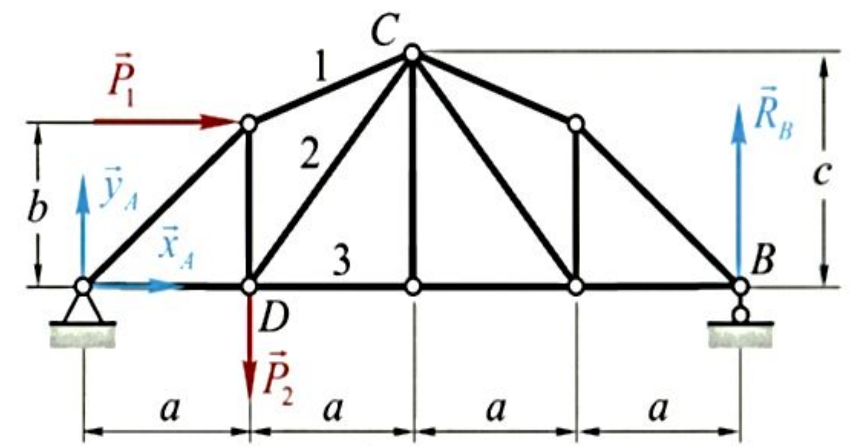
III. Рассмотрим равновесие крана с грузом: $(\vec{P}; \vec{G}; \vec{N}_A; \vec{N}_B) \backsim 0.$

$$\begin{cases} \sum mom_B \vec{F} = 0 \;\Rightarrow\; P(a+b+c+l\cos\alpha) - N_A (a+b+c) = 0; \\ \sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; N_A + N_B - P - G = 0. \end{cases}$$

$$N_A = P\frac{a+b+c+l\cos\alpha}{a+b+c}; \quad N_B = G - P\frac{l\cos\alpha}{a+b+c},$$ требуются, чтобы $N_B > 0$.

Метод Риттера

Метод Риттера позволяет определить усилия в невесомых стержнях, образующих ферму — конструкцию, нагрузки на которую состоят из сосредоточенных сил, действующих в шарнирах крепления стержней друг к другу.

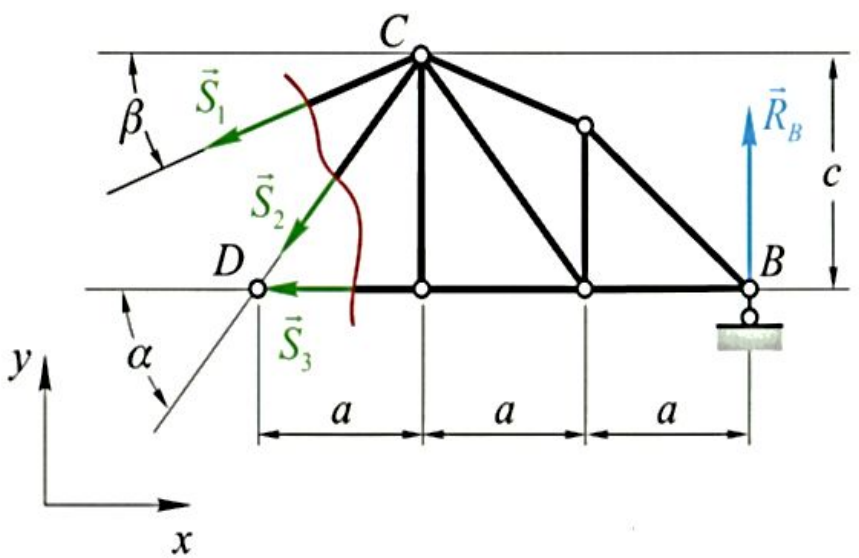


В статически определимых фермах всегда есть поперечные сечения стержней, в которых усилия найдутся из уравнений равновесия.

Из равновесия всей фермы:

$$\left(\vec{P}_1; \vec{P}_2; \vec{x}_A; \vec{y}_A; \vec{R}_B\right) \backsim 0;$$

$$\sum mom_A \vec{F} = 0 = P_2 a + P_1 b - R_B \cdot 4a; \quad R_B = \frac{P_2 a + P_1 b}{4a}.$$



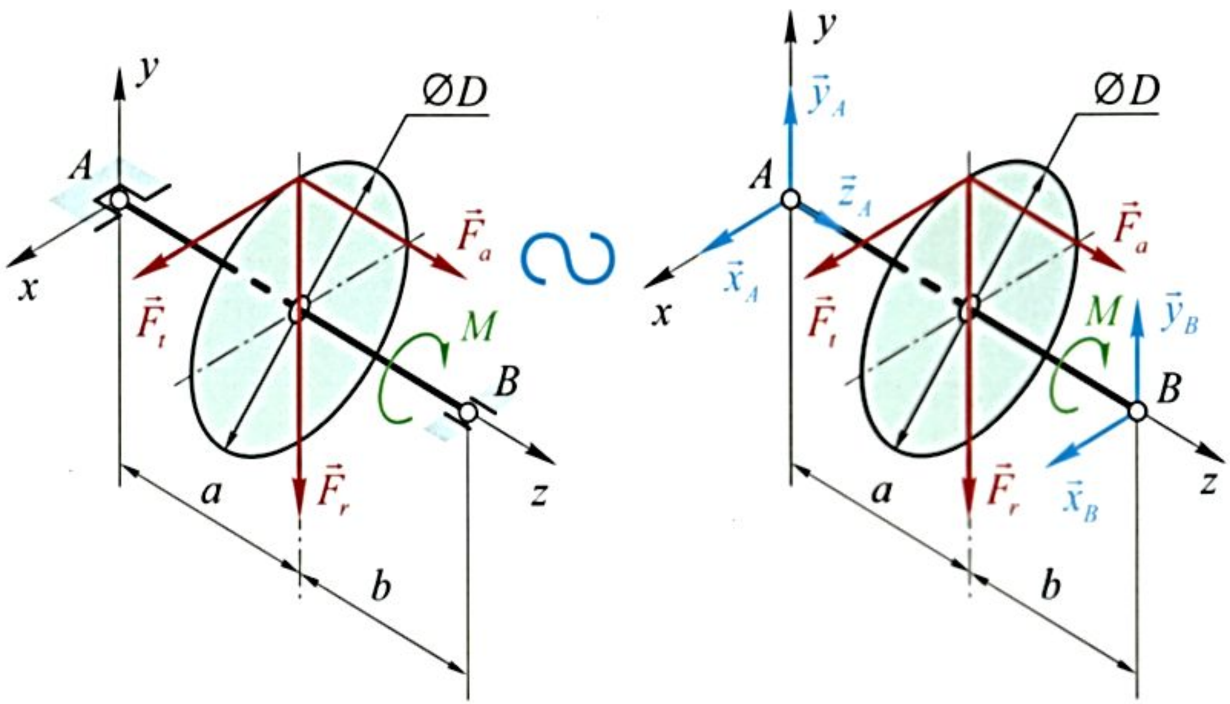
Из равновесия отсеченной части:

$$\left(\vec{S}_1; \vec{S}_2; \vec{S}_3; \vec{R}_B\right) \backsim 0;$$

$$\left.\begin{aligned} &\sum mom_C \vec{F} = R_B \cdot 2a - S_3 c = 0; \\ &\sum mom_D \vec{F} = R_B \cdot 3a + S_1 c \cdot \cos\beta = 0; \\ &\sum F_y = S_1 \cos\beta + S_2 \cos\alpha = 0. \end{aligned}\right\} \text{Система уравнений замкнутая.}$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{c}{a}; \quad \beta = \operatorname{arctg}\frac{c-b}{a}.$$

Пространственная система сил



Зубчатое колесо насажено на вал, на который действует пара сил с моментом M.

Определить реакции на вал подпятника A и подшипника B.

$\vec{F}_t \parallel x; \quad \vec{F}_r \parallel y; \quad \vec{F}_a \parallel z.$

F_a, F_r определяются через F_t.

(будет рассмотрено в разделе "Детали машин".)

1. Рассмотрим равновесие вала с колесом.

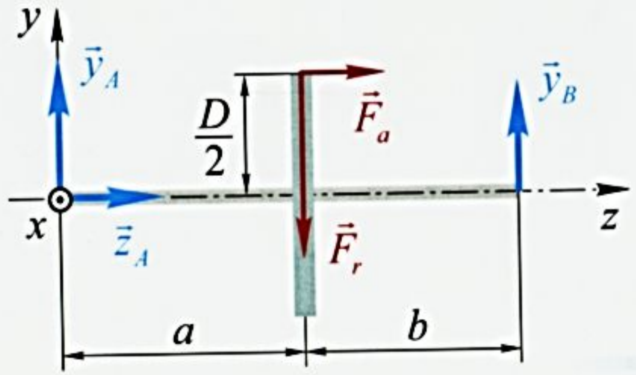
2. Заданные силы: $\vec{F}_t; \vec{F}_r; \vec{F}_a; M.$

3. Связи: подпятник A (реакции $\vec{x}_A; \vec{y}_A; \vec{z}_A$); подшипник B ($\vec{x}_B; \vec{y}_B$).

4. $\left(\vec{F}_t; \vec{F}_r; \vec{F}_a; M; \vec{x}_A; \vec{y}_A; \vec{z}_A; \vec{x}_B; \vec{y}_B\right) \backsim 0.$

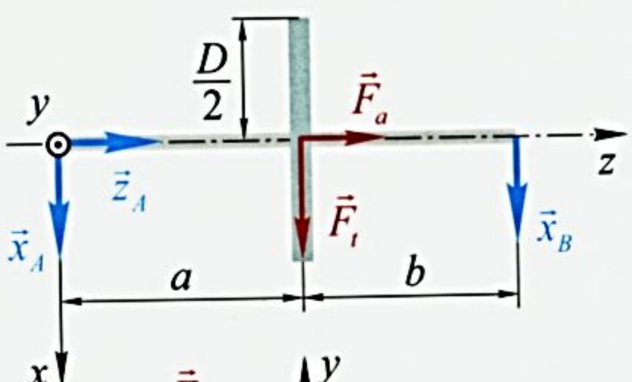
Пример. Пространственная система сил

5. Уравнения равновесия:



$$\sum F_y = 0 = -F_r + y_A + y_B;\quad y_A = F_r - y_B.$$

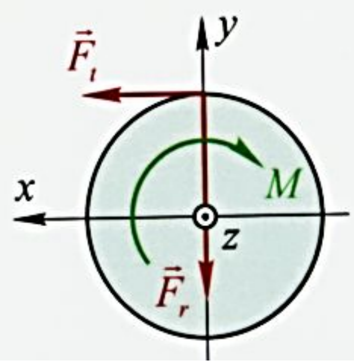
$$\sum mom_x \vec F = 0 = -\vec F_a \frac{D}{2} - F_r \cdot a + y_B(a+b);\quad y_B = \frac{F_A \frac{D}{2} + F_r \cdot a}{a+b}.$$



$$\sum F_x = 0 = F_t + x_A + x_B;\quad x_A = F_t - x_B.$$

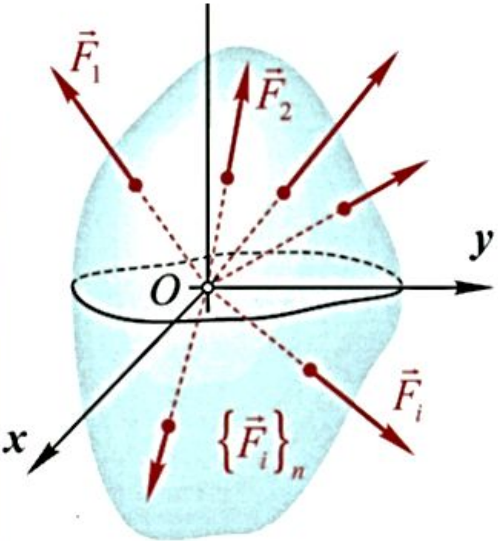
$$\sum mom_y \vec F = 0 = -F_t \cdot a - x_B(a+b);\quad x_B = -F_t \frac{a}{a+b}.$$

$$\sum F_z = F_A + z_A;\quad z_A = F_a.$$



$$\sum mom_z \vec F = 0 = -M + F_t \cdot \frac{D}{2};\quad F_t = \frac{2M}{D}.$$

Сходящаяся система сил



В такой системе линии действия сил пересекаются в одной точке.

Тождественно выполняются (типа $0 \equiv 0$) уравнения равновесия:

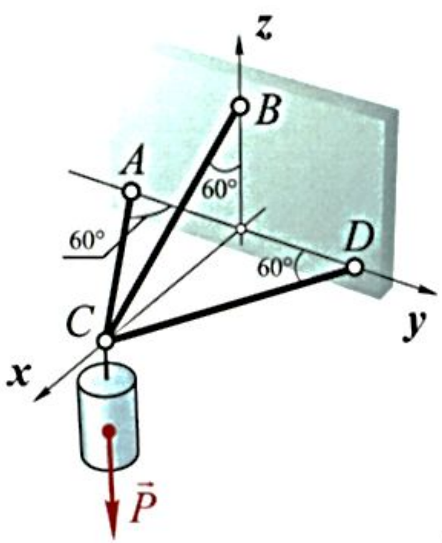
$$\sum_{i=1}^{n} mom_O \vec{F}_i \equiv 0 \;\Rightarrow\; \sum_{i=1}^{n} mom_x \vec{F}_i \equiv 0; \quad \sum_{i=1}^{n} mom_y \vec{F}_i \equiv 0; \quad \sum_{i=1}^{n} mom_z \vec{F}_i \equiv 0.$$

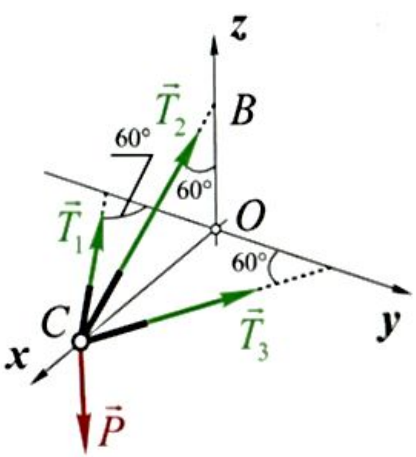
Для определения реакций связей остаются только три уравнения:

$$\sum F_{i\,x} = 0; \quad \sum F_{i\,y} = 0; \quad \sum F_{i\,z} = 0.$$

Пример. Определить усилия в стержнях, удерживающих груз весом $\vec{P}$.

Рассмотрим равновесие болта шарнира C: $\left(\vec{P}; \vec{T}_1; \vec{T}_2; \vec{T}_3\right) \sim 0.$





$$\sum F_x = 0 = -T_1 \cancel{\sin 60°} - T_2 \cancel{\sin 60°} - T_3 \cancel{\sin 60°};$$

$$\sum F_y = 0 = -T_1 \cancel{\cos 60°} + T_3 \cancel{\cos 60°};$$

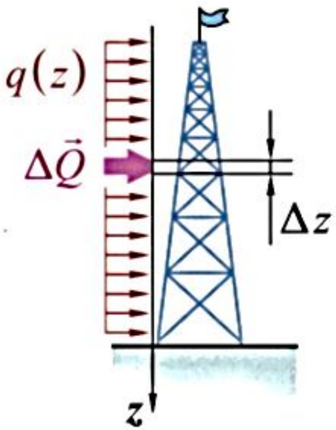
$$\sum F_z = 0 = -P + T_2 \cos 60°.$$

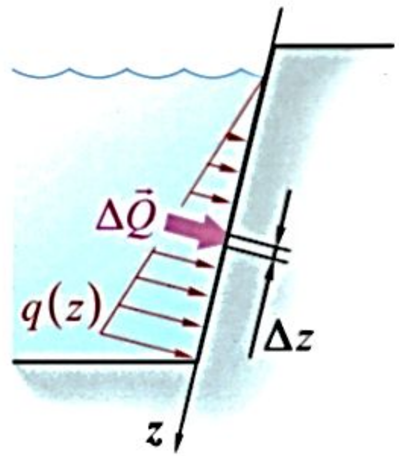
$$T_2 = 2P; \quad T_1 = T_3 = \frac{1}{2} T_2 = -P.$$

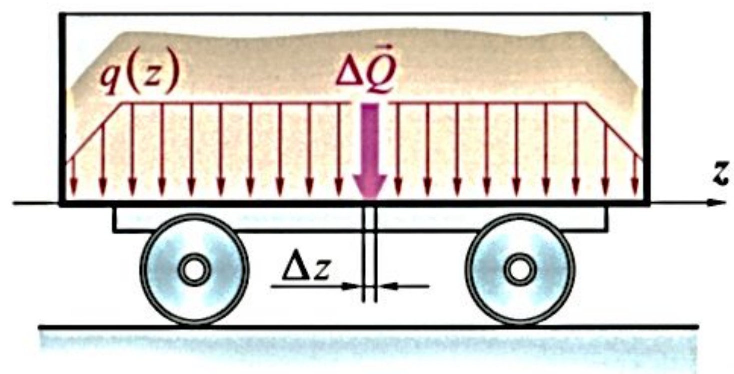
T_i — силы, с которыми стержни растягиваются (+) или сжимаются (–)

Распределенные нагрузки

Распределенные нагрузки возникают, если площадь контакта взаимодействующих тел соизмерима с площадью их поверхности (ветровая нагрузка, давление воды на плотину, насыпной груз в вагоне и т. д.).



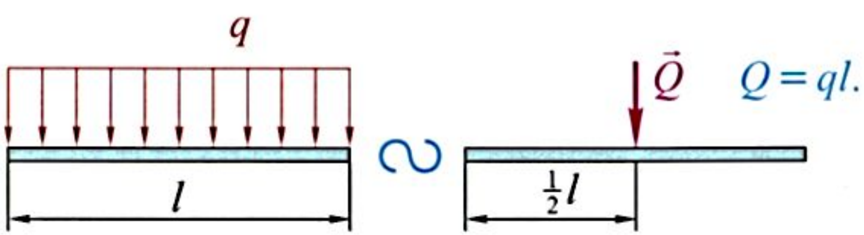


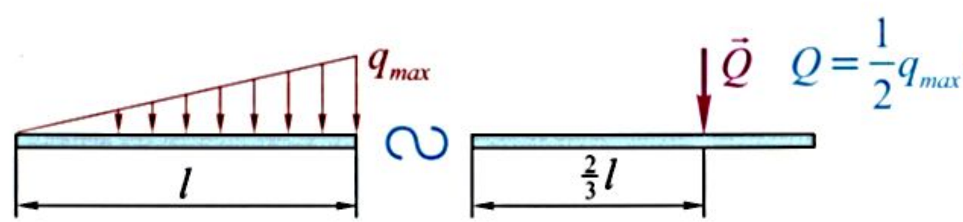


Распределенные нагрузки задаются интесивностью. При плоской нагрузке:

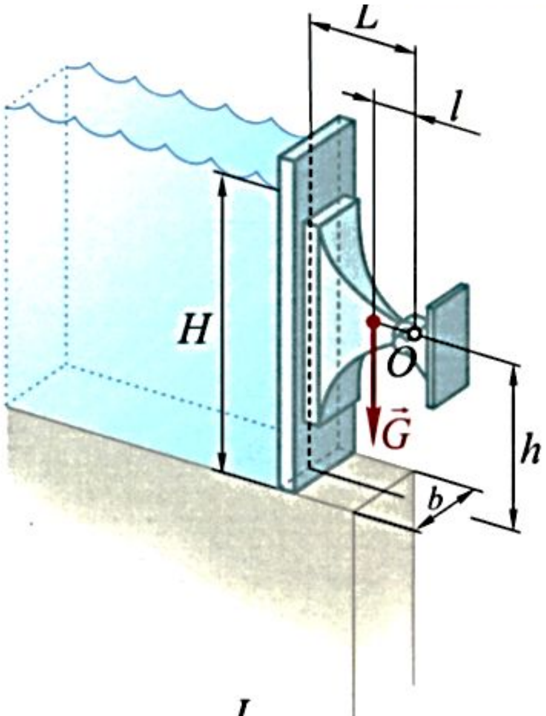
$q(z)=\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta Q}{\Delta z}=\dfrac{dQ}{dz}$; ΔQ — нагрузка, приходящаяся на участок Δz с координатой z.

В простейших случаях:





Пример.



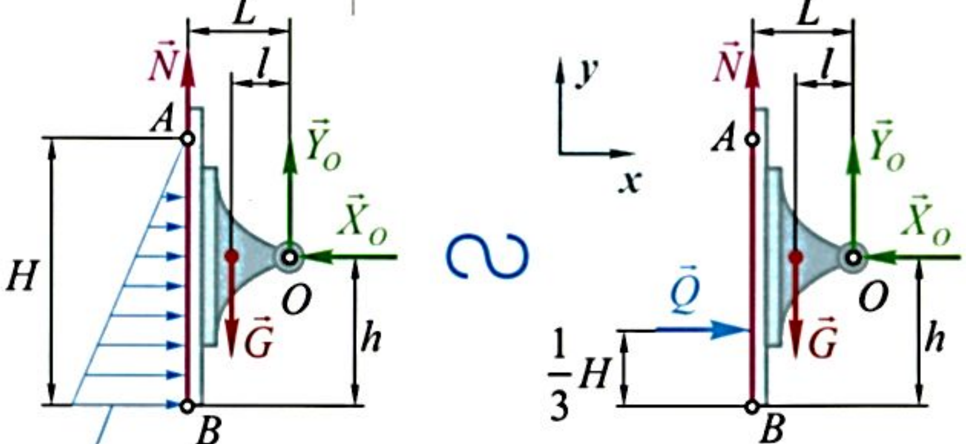
Определить усилие в шарнире O затвора плотины весом G.

Давление p в жидкости определяется глубиной и одинаково по всем направлениям. Давление равно весу столба жидкости единичной площади в основании, и высотой равной глубине:

$p_A = 0; \quad p_B = \gamma \cdot H \cdot g; \quad \gamma$ — удельная масса воды.

Рассмотрим равновесие затвора:

$(\vec{G}; \vec{Q}; \vec{X}_O; \vec{Y}_O; \vec{N}) \backsim 0.$



$q_{max} = \gamma \cdot H \cdot g \cdot b$

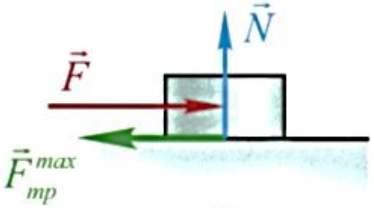
$Q = \frac{1}{2} H \cdot q_{max} = \frac{1}{2} \gamma \cdot H^2 \cdot g \cdot b$

$$(*) \begin{cases} \sum F_x = 0 = Q - X_O; \\ \sum F_y = 0 = -G + N + Y_O; \\ \sum mom_O \vec{F} = 0 = N \cdot L - G \cdot l - Q\left(h - \frac{1}{3} H\right). \end{cases}$$

Система уравнений (*) — замкнутая, состоит из трех уравнений с тремя неизвестными: $N; X_O; Y_O$.

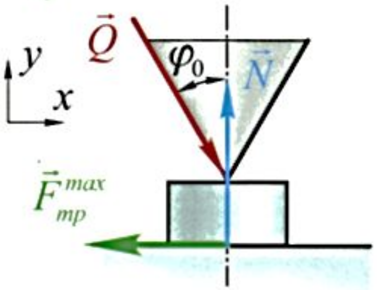
Трение

Трение скольжения возникает при попытке «сдвинуть» одно тело относительно другого; появляется сила трения скольжения $\vec{F}_{тр}$.



Тело передвинется, если только $F \geq F_{тр}^{max}$; $F_{тр}^{max} = f \cdot N$;

f — коэффициент трения скольжения.

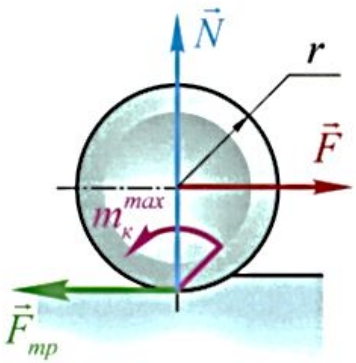


Из равновесия тела $\left(\vec{Q}; \vec{N}; \vec{F}_{тр}^{max}\right) \backsim 0.$

$$\sum F_y = 0 = -Q\cos\varphi_0 + N; \qquad \sum F_x = 0 = Q\sin\varphi_0 - F_{тр}^{max} = 0.$$

Тело может сдвинуться, если $\operatorname{tg}\varphi_0 \geq f.$ φ — угол трения; $\varphi = \operatorname{arctg} f.$

Трение качения возникает при попытке «перекатить» друг относительно друга тела с криволинейной поверхностью; появляется пара трения качения с моментом $m_к$.

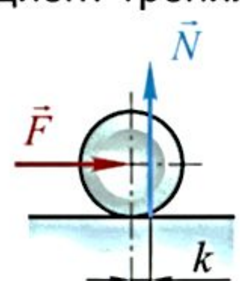


Колесо покатится, если только

$F \cdot r \geq m_к^{max}$; $m_к^{max} = k \cdot N$; k — коэффциент трения качения.

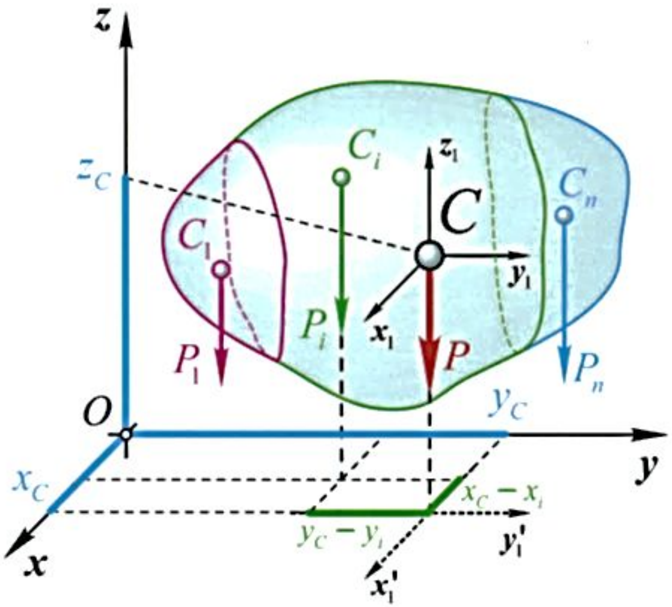
Минимальная сила $F = \dfrac{k \cdot N}{r}.$

Чем больше радиус r —
— тем меньше сила F.



k — размерная величина $[м]$

Центр тяжести



Центр тяжести — точка твердого тела, при закреплении которой само тело находится в равновесии в любом положении.

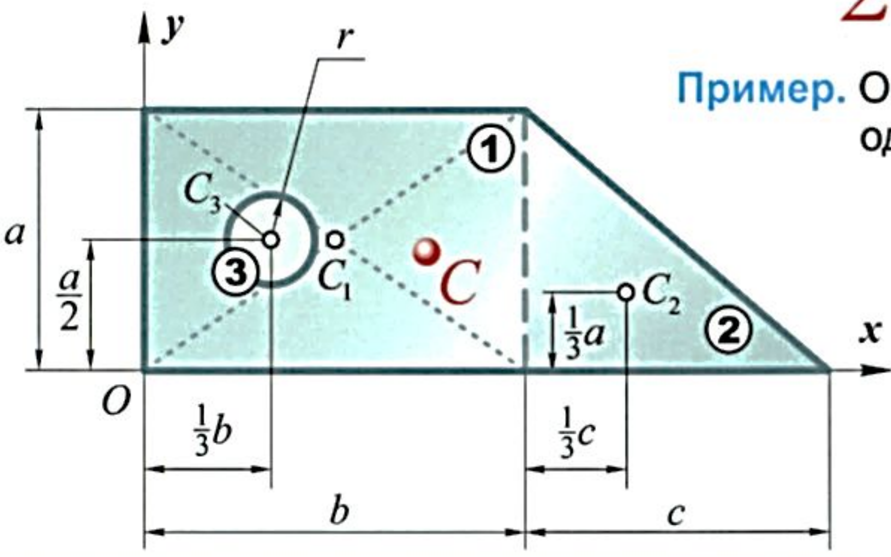
Сумма моментов сил веса частей тела относительно его центра тяжести равна нулю в любом положении тела:

$$\sum_i mom_{y_1}\vec{P}_i = 0 \;\Rightarrow\; \sum m_i g\left(x_C - x_i\right) = 0$$

$$\sum_i mom_{x_1}\vec{P}_i = 0 \;\Rightarrow\; \sum m_i g\left(y_C - y_i\right) = 0$$

Следовательно, координаты центра тяжести

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}; \quad x_C = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}; \quad \text{по аналогии} \quad z_C = \frac{\sum m_i z_i}{\sum m_i}.$$



Пример. Определить положение центра тяжести однородной пластины с отверстием радиуса r.

$$x_C = \frac{a\cdot b\cdot \frac{b}{2} + \frac{1}{2}ac\left(b + \frac{c}{3}\right) - \pi r^2\cdot\frac{b}{3}}{a\cdot b + \frac{1}{2}a\cdot c - \pi r^2};$$

$$y_C = \frac{a\cdot b\cdot \frac{a}{2} + \frac{1}{2}a\cdot c\cdot\frac{a}{3} - \pi r^2\,\frac{a}{2}}{a\cdot b + \frac{1}{2}a\cdot c - \pi r^2}.$$

Площадь круга как отверстия взята со знаком «–».