

**Решение тригонометрических
уравнений методом введения
новой переменной.**

**Решение квадратных
уравнений показываем .**

Метод замены переменной

Суть метода: в уравнении заменяем некоторое выражение другой переменной и решаем получившееся более простое уравнение, после решения которого возвращаемся и находим первоначально неизвестную переменную.

Например:

$$x^4 + 2x^2 - 3 = 0,$$

Пусть $x^2 = t, t \geq 0$

$$t^2 + 2t - 3 = 0,$$

$$t_1 = -3, t_2 = 1;$$

$$-3 < 0, \quad x^2 = 1;$$

$$x = \pm 1 \quad \text{Ответ: } -1, 1$$

Задача 1Решите уравнение $2 \sin^2 x - 7 \sin x + 3 = 0$.**Решение**

► Пусть $\sin x = t$, тогда получаем:
$$2t^2 - 7t + 3 = 0.$$

Отсюда $t_1 = 3$; $t_2 = \frac{1}{2}$.

1. При $t = 3$ имеем $\sin x = 3$ — уравнение не имеет корней, поскольку $|3| > 1$.

2. При $t = \frac{1}{2}$ имеем $\sin x = \frac{1}{2}$,

тогда $x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n$,

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

Ответ: $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \quad n \in \mathbf{Z}.$ ◀

Комментарий

Анализируя вид этого уравнения, замечаем, что в его запись входит только одна тригонометрическая функция $\sin x$. Поэтому удобно ввести новую переменную $\sin x = t$.

После решения квадратного уравнения необходимо выполнить обратную замену и решить полученные простейшие тригонометрические уравнения.

Замечание. Записывая решения задачи 1, можно при введении замены $\sin x = t$ учесть, что $|\sin x| \leq 1$, и записать ограничения $|t| \leq 1$, а далее заметить, что один из корней $t = 3$ не удовлетворяет условию $|t| \leq 1$, и после этого обратную замену выполнять только для $t = \frac{1}{2}$.

Метод замены переменной

Решить уравнение:

$$2\sin^2 x - 5\sin x + 2 = 0,$$

Пусть $\sin x = t$, $t \in [-1; 1]$, тогда

$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9,$$

$$t_1 = 0,5; \quad t_2 = 2,2 \text{ не принадлежит } [-1; 1]$$

$$\sin x = 0,5$$

$$x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi n; \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi n; \quad n \in \mathbb{Z}$$

Решение уравнений с помощью замены переменных

Пример: $\cos^2 x + \cos x - 2 = 0$

Решение: пусть $\cos x = t$, тогда
 $t^2 + t - 2 = 0$

$t_1 = 1$ $t_2 = -2$, то есть

$\cos x = 1$

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$\cos x = -2$

корней нет

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$



Основные методы решения тригонометрических уравнений



Решите уравнение:

$$6\sin^2 x - 5\sin x - 4 = 0$$

введем новую переменную $\sin x = t$.

Тогда уравнение примет вид

$$6t^2 - 5t - 4 = 0$$

$$t_1 = \frac{4}{3}$$

$$\sin x = \frac{4}{3}$$

корней нет

$$t_2 = -\frac{1}{2}$$

$$\sin x = -\frac{1}{2}$$

$$x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$



Метод замены переменной

Решить уравнение:

$$\begin{aligned}\cos^2 x - \sin^2 x - \cos x &= 0, \\ \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) - \cos x &= 0 \\ 2\cos^2 x - \cos x - 1 &= 0\end{aligned}$$

Пусть $\cos x = t$, $t \in [-1; 1]$, тогда

$$\begin{aligned}2t^2 - t - 1 &= 0 \\ D &= (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 1 + 8 = 9, \\ t_1 &= -0,5; \quad t_2 = 1,\end{aligned}$$

$$\cos x = -0,5$$

$$\cos x = 1$$

$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \quad n \in \mathbf{Z}$$

$$x = 2\pi n; \quad n \in \mathbf{Z}$$

$$\text{ОТВЕТ: } \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n; \quad 2\pi n; \quad n \in \mathbf{Z}$$

Домашнее задание

Решите
уравнения:

$$а) 2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$$

$$б) 2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$