Решение тригонометрических уравнений методом введения новой переменной.

Решение квадратных уравнений показываем .

Метод замены переменной

Суть метода: в уравнении заменяем некоторое выражение другой переменной и решаем получившееся более простое уравнение, после решения которого возвращаемся и находим первоначально неизвестную переменную.

Например:

$x^4 + 2x^2 - 3 = 0$,

Пусть $x^2 = t, \ t \geq 0$

$t^2 + 2t - 3 = 0$,

$t_1 = -3, \ t_2 = 1$;

$-3 < 0, \quad x^2 = 1$;

$x = \pm 1$ Ответ: -1, 1

Задача 1 Решите уравнение $2\sin^2 x - 7\sin x + 3 = 0$.

Решение

► Пусть $\sin x = t$, тогда получаем:

$$2t^2 - 7t + 3 = 0.$$

Отсюда $t_1 = 3$; $t_2 = \frac{1}{2}$.

1. При $t = 3$ имеем $\sin x = 3$ — уравнение не имеет корней, поскольку $|3| > 1$.

2. При $t = \frac{1}{2}$ имеем $\sin x = \frac{1}{2}$,

тогда $x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n$,

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, \ n \in \boldsymbol{Z}.$$

Ответ: $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in \boldsymbol{Z}$. ◁

Комментарий

Анализируя вид этого уравнения, замечаем, что в его запись входит только одна тригонометрическая функция $\sin x$. Поэтому удобно ввести новую переменную $\sin x = t$.

После решения квадратного уравнения необходимо выполнить обратную замену и решить полученные простейшие тригонометрические уравнения.

Замечание. Записывая решения задачи 1, можно при введении замены $\sin x = t$ учесть, что $|\sin x| \leqslant 1$, и записать ограничения $|t| \leqslant 1$, а далее заметить, что один из корней $t = 3$ не удовлетворяет условию $|t| \leqslant 1$, и после этого обратную замену выполнять только для $t = \frac{1}{2}$.

Метод замены переменной

Решить уравнение:

$$2sin^2x - 5sinx + 2 = 0,$$

Пусть sinx=t, t∈[-1;1], тогда

$$2t^2 - 5t + 2 = 0$$

$$D = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9,$$

$$t_1 = 0{,}5;\ \ t_2 = 2{,}2 \text{ не принадлежит } [-1;1]$$

sinx=0,5

x= $(-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi n;\ n \in Z$

Ответ: $(-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi n;\ n \in Z$

Решение уравнений с помощью замены переменных

Пример: $\cos^2 x + \cos x - 2 = 0$

Решение: пусть $\cos x = t$, тогда

$t^2 + t - 2 = 0$

$t_1 = 1 \quad t_2 = -2$, то есть

$\cos x = 1$

$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

$\cos x = -2$

корней нет

Ответ: $\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in Z$

Основные методы решения тригонометрических уравнений

Решите уравнение:

$$6sin^2x - 5sinx - 4 = 0$$

введем новую переменную $sinx = t.$

Тогда уравнение примет вид

$$6t^2 - 5t - 4 = 0$$

$t_1 = \frac{4}{3}$ $\qquad$ $t_2 = -\frac{1}{2}$

$\sin x = \frac{4}{3}$ $\qquad$ $\sin x = -\frac{1}{2}$

корней нет $\qquad$ $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

Метод замены переменной

Решить уравнение:

$$cos^2x - sin^2x - cosx = 0,$$

$$cos^2x - (1 - cos^2x) - cosx = 0$$

$$2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

Пусть cosx=t, $t \in [-1;1]$, тогда

$$2t^2 - t - 1 = 0$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = 1 + 8 = 9,$$

$$t_1 = -0{,}5; \;\; t_2 = 1,$$

cosx=-0,5

$x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n;\ n \in \mathbf{Z}$

cosx=1

$x = 2\pi n;\ n \in \mathbf{Z}$

Ответ: $\pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n;\ 2\pi n;\ n \in \mathbf{Z}$

Домашнее задание

Решите уравнения:

а) $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$

б) $2\cos^2 x - \cos x - 1 = 0$